Algebră liniară, Tema 3

1. Se consideră sistemele liniare şi omogene:

$$a)\ \begin{array}{rcl} y+z & = & 0 \\ x+z & = & 0 \\ x+y & = & 0 \end{array}, \quad b)\ \begin{array}{rcl} 2x-y+3z & = & 0 \\ -x+y+5z & = & 0 \\ 2x-y+z & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \end{array} \quad c)\ \begin{array}{rcl} 3x-y+z & = & 0 \\ x-y+4z & = & \end{array}$$

Să se analizeze fiecare caz în parte şi să se deducă dacă admite doar soluţia banală sau şi soluţii nebanale şi să se determine mulţimea soluţiilor fiecărui sistem.

Indicaţie: Observaţi ca primul sistem are 3 ecuaţii şi 3 necunoscute, deci calculaţi determinantul matricii sistemului şi vedeţi dacă este 0 sau nu.

Al doilea sistem şi al treielea au număr diferit de ecuaţii şi necunoscute. Pentru acestea determinaţi rangul matricii sistemului, un determinant principal, necunoscutele principale şi secundare şi rezolvaţi ecuaţiile principale.

2. Care din următoarele matrici este în formă scară pe linii:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Argumentaţi răspunsul. La cele care sunt în forma scară precizaţi rangul.

3. Să se reducă matricea

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

la forma scară pe linii şi apoi să se precizeze rangul ei.

4. Să se determine dacă sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{aligned} 2x+2y-2z &= 5\\ 7x+7y+z &= 10\\ 5x+5y-z &= 5 \end{aligned}$$

este compatibil sau incompatibil reducând matricea prelungită la forma scară. Dacă sistemul este compatibil, să se rezolve.

5. Să se reducă la forma scară matricea prelungită, $\overline{A}$, a sistemului următor, scris în formă matricială, $Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\\ 0\\ 2 \end{bmatrix}$$

Evidenţiaţi pivoţii din forma scară S_A şi respectiv $S_{\overline{A}}$. Este sistemul compatibil? Dacă da, scrieţi determinantul principal asociat sistemului $S_A x = u$, unde u este ultima coloană din $S_{\overline{A}}$ şi găsiţi mulţimea soluţiilor sistemului.

6. Se dă sistemul:

$$\begin{aligned} 2x-3y &= 3\\ 4x-5y+z &= 7\\ 2x-y-3z &= 5 \end{aligned}$$

Să se reducă matricea prelungită la forma scară, să se deducă apoi dacă sistemul este compatibil determinat sau nu şi dacă da, să se determine soluţia unică folosind metoda substituţiei inverse.

7. Folosind transformări elementare pe linie să se determine forma scară redusă a matricii prelungite a sistemului de 3 ecuaţii cu trei necunoscute:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 6\\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\\ 1\\ 5 \end{bmatrix}$$

Analizând forma scară redusă să se deducă dacă sistemul este sau nu compatibil determinat şi dacă da, să se determine soluţia acestuia.

8. Matricea prelungita unui sistem liniar $Ax=b$, are forma scară:

$$S_{\overline{A}} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

Transformaţi $S_{\overline{A}}$ în forma scară redusă. Analizaţi această formă scară şi precizaţi dacă sistemul este compatibil sau nu şi dacă da să se determine mulţimea soluţiilor sale.