Cursul 4

Spaţiul $\mathbb{R}^n$. Dependenţă şi independentaă liniară

4.1 Spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$

Definim între elementele lui $\mathbb{R}^n$ două operaţii:

• adunarea:

$$\text{pentru orice } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad x + y \overset{def}{=} \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

• înmulţirea cu scalari (adică cu numere reale):

$$\text{pentru orice } \alpha \in \mathbb{R} \text{ şi } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha x \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Cele două operaţii verifică condiţiile următoare:

SV1. $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T, z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ (asociativitatea adunării);

SV2. există un element în $\mathbb{R}^n$, notat $\theta = (0, 0, \ldots, 0)^T$, cu proprietatea că $x+\theta = \theta+x = x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$;

SV3. Pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ există un element $x' = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $x + x' = x' + x = \theta$;

SV4. $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$;

SV5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, şi $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$;

SV6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$;

SV7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$;

SV8. $1x = x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$.

Proprietăţile **SV5–SV8** stabilesc legături dintre operaţiile de adunare a vectorilor şi înmulţirea lor cu scalari.

- 1.Verficând cele 8 proprietăţi relativ la adunare şi înmulţirea cu scalari, se spune că $\mathbb{R}^n$ are structură de spaţiu vectorial real. Elementele lui se numesc **vectori**, iar cele din $\mathbb{R}$, **scalari**;

- 2. Elementul neutru, θ, faţa de adunarea vectorilor se numeşte **vectorul nul** al spaţiului;
- 3. Simetricul x' al vectorului x, faţa de adunare, se va nota $-x$ şi îl numim **opusul vectorului x**;

Operaţii particulare în spaţiu vectorial $\mathbb{R}^n$. Ştiind că θ este vectorul nul, iar 0 este scalarul zero şi 1 unitatea din $\mathbb{R}$, avem următoarele proprietăţi:
- $(-1)x = -x, \forall\ x \in \mathbb{R}^n$ (produsul scalarului -1 cu vectorul x este opusul lui x);
- $0x = \theta, \forall\ x \in \mathbb{R}^n$ şi $\alpha\theta = \theta, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$;
- dacă $\alpha x = \theta$, atunci $\alpha = 0$ sau $x = \theta$.

4.2 Dependenţă şi independenţă liniară

Fie $v_1, v_2, \ldots, v_m$ un număr finit de vectori din $\mathbb{R}^n$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, m scalari din $\mathbb{R}$. Cum produsul unui scalar cu un vector este vector şi suma unor vectori este vector, rezultă că $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \cdots \alpha_m v_m$ este un vector u. Spunem că vectorul

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \cdots \alpha_m v_m, \tag{4.1}$$

este *o combinaţie liniară* a vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Cu alte cuvinte, vectorul u depinde liniar de vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

De exemplu dacă $v_1 = (-2, 5, 1)^T, v_2 = (3, 0, -1)^T$ sunt doi vectori din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$, atunci vectorul $u = 4v_1 - 7v_2$ se exprimă ca o combinaţie liniară cu coeficienţii $4, -7$ a vectorilor v_1, v_2.

Având acum o familie finită de vectori $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ne întrebăm în ce condiţii un vector u_i din familie depinde liniar de ceilalţi, adică se poate exprima ca o combinaţie liniară a celorlalţi vectori, şi în ce condiţii u_i este independent de ceilalţi vectori.

Definiţia 4.2.1 *Vectorii $u_1, u_2, \ldots u_m$ din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ sunt vectori liniar dependenţi dacă există m scalari nu toţi nuli, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, astfel încât:*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots \alpha_m u_m = \theta \tag{4.2}$$

Această definiţie pare a nu avea legătură cu dependenţa explicată mai sus. Analizând însă condiţiile din Definiţia 4.2.1, rezultă că dacă scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nu sunt toţi nuli, atunci cel puţin unul din ei este nenul. Dacă, de exemplu, α_1 este nenul, atunci există $\alpha_1^{-1} := 1/\alpha_1$. Înmulţind relaţia (4.4) cu $1/\alpha_1$ obţinem:

$$u_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} u_3 - \cdots \frac{\alpha_m}{\alpha_1} u_m, \tag{4.3}$$

adică u_1 se exprimă ca o combinaţie liniară a vectorilor $u_2, u_3, \ldots, u_m$.

Combinaţia liniară a vectorilor $u_1, u_2, \ldots, u_m$ cu scalarii $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_m = 0$ dă întotdeauna vectorul nul:

$$0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots 0 \cdot u_m = \theta$$

Definiţia 4.2.2 *Vectorii $u_1, u_2, \ldots u_n$ din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ sunt vectori liniar independenţi dacă o combinaţie liniară a lor poate fi egală cu vectorul nul:*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots \alpha_n u_n = \theta, \tag{4.4}$$

doar dacă toţi scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt zero.

Exemplul 1. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ se dau vectorii

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; u_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 16 \\ 7 \end{bmatrix}, \; u_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Să se verifice dacă aceşti vectori sunt liniar dependenţi sau independenţi şi în caz de dependenţă să se determine relaţia dintre ei.
Rezolvare: Presupunem că există trei scalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \theta_3 \tag{4.5}$$

Evident că relaţia (4.5) are loc dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Pentru a stabili dacă vectorii daţi sunt liniar independenţi sau dependenţi trebuie să investigăm dacă relaţia (4.5) poate avea loc doar pentru cei trei scalari, simultan zero sau şi pentru un set de scalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, nu toţi nuli. În acest scop înlocuim în (4.5) fiecare vector prin tripletul reprezentativ şi efectuăm operaţiile corespunzătoare din $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -9 \\ 16 \\ 7 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ 3\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9\alpha_2 \\ 16\alpha_2 \\ 7\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\alpha_3 \\ -5\alpha_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\alpha_1 - 9\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + 16\alpha_2 - 5\alpha_3 \\ 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cum două triplete sunt egale dacă şi numai dacă coordonatele din aceeaşi poziţie coincid, obţinem:

$$\begin{aligned} -\alpha_1 - 9\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 16\alpha_2 - 5\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Prin urmare, problema independenţei sau dependenţei vectorilor u_1, u_2, u_3 s-a transformat în problema care cere să stabilim dacă sistemul liniar şi omogen (4.7) admite numai soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ sau şi soluţii nebanale.

> Dacă sistemul admite doar soluţia banală, atunci vectorii sunt liniar independenţi, iar dacă admite şi soluţii nebanale, atunci vectorii sunt liniar dependenţi.

Pentru a decide natura soluţiilor calculăm rangul matricii sistemului:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 3 \\ 2 & 16 & -5 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} = [u_1|u_2|u_3]$$

Cum determinantul matricii A este $\det(A) = 0$, rezultă că sistemul admite şi soluţii nebanale, cu alte cuvinte există trei scalari, nu toţi nuli, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, soluţie a sistemului omogen, astfel încât pe baza şirului de echivalenţe (4.6) avem relaţia (4.5), adică vectorii sunt liniar dependenţi. Pentru a determina relaţia dintre ei, rezolvăm efectiv sistemul omogen pentru a găsi o soluţie nebanală. Rangul matricii sistemului este 2 şi un determinant principal este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 2 & 16 \end{vmatrix} \neq 0,$$

constituit din coeficienţii necunoscutelor α_1, α_2. Prin urmare rezolvăm doar sistemul format din primele două ecuaţii în raport cu necunoscutele principale α_1, α_2. Necunoscuta secundară α_3 o notăm cu β:

$$\begin{aligned} -\alpha_1 - 9\alpha_2 &= -3\beta \\ 2\alpha_1 + 16\alpha_2 &= 5\beta \end{aligned}$$

Rezolvând obţinem $\alpha_1 = -3\beta/2$, $\alpha_2 = \beta/2$, $\alpha_3 = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Deci familia soluţiilor este $(-3/\beta/2, \beta/2, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$. O soluţie nebanală obţinem pentru $\beta \neq 0$, fixat. Luând $\beta = 2$ avem $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$ şi deci relaţia de dependenţa a celor trei vectori devine:

$$-3u_1 + u_2 + 2u_3 = \theta_3 \Leftrightarrow u_2 = 3u_1 - 2u_3 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3$$

Exemplul 2. Să se arate că vectorii $u_1 = (0, 2, -1, 5)^T, u_2 = (1, 3, -2, 4)^T, u_3 = (1, 0, -1, 3)^T$ din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$ sunt liniar independenţi.

Rezolvare: Presupunem că o combinaţie liniară a celor trei vectori este vectorul nul:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \theta_4, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$$

Înlocuind vectorii cu cvadrupletele reprezentative şi efectuând calculele obţinem succesiv:

$$\alpha_1(0, 2, -1, 5)^T + \alpha_2(1, 3, -2, 4)^T + \alpha_3(1, 0, -1, 3)^T = (0, 0, 0, 0)^T \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{aligned} 0\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3 &= 0 \\ -1\alpha_1 - 2\alpha_2 - 1\alpha_3 &= 0 \\ 5\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Din nou problema independenţei s-a transformat în problema tipului soluţiilor admise de un sistem liniar şi omogen de 4 ecuaţii cu trei necunoscute. Matricea sistemului de tip 4×3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = [u_1|u_2|u_3]$$

poate avea rangul maxim egal cu 3. Determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

asigură că rangul este 3, deci ecuaţiile principale conţinând necunoscutele principale sunt:

$$\begin{cases} 0\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3 & = & 0 \\ -1\alpha_1 - 2\alpha_2 - 1\alpha_3 & = & 0 \end{cases}$$

Acest sistem liniar şi omogen de trei ecuaţii cu trei necunoscute are determinantul diferit de 0, deci admite doar soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Prin urmare cei trei vectori sunt liniar independenţi, adică nici unul nu se poate exprima ca o combinaţie liniară a celorlaţi doi.

Observaţia 4.2.1 *Orice sistem (mulţime) de vectori ce conţine vectorul nul este sistem de vectori liniar dependenţi.*

Într-adevăr, fie $u_1, u_2, \dots, u_n$ un sistem de vectori din spaţiul vectorial $V/\mathbb{R}$. Presupunem că vectorul u_i este vectorul nul. Evident că sistemul de n scalari $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_{i-1} = 0, \alpha_i, \alpha_{i+1} = 0, , \dots \alpha_n = 0$ cu $\alpha_i \neq 0$, conduce la:

$$0u_1 + \cdots 0u_{i-1} + \alpha_i\theta + 0u_{i+1} + \cdots 0u_n = \theta,$$

adică vectorii $u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \theta, u_{i+1}, \dots, u_n$ sunt liniar dependenţi.

Mai concret, vectorii v_1, θ, v_2, v_3 din $\mathbb{R}^3$ sunt liniar dependenţi deoarece combinaţia lor liniară cu scalarii $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 5, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0$ (nu toţi nuli!) dă vectorul nul:

$$0v_1 + 5v_2 + 0v_3 + 0v_4 = \theta$$

4.3 Criteriul practic de dependenţă şi independenţă liniară

Criteriul practic de determinare a independenţei sau dependenţei liniare a unui sistem de vectori din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$.

Exemplele din cursul precedent au ilustrat că problema independenţei sau dependenţei liniare a unui sistem de vectori din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ se reduce la a deduce dacă un sistem de ecuaţii liniare şi omogene admite doar soluţia banală sau şi soluţii nebanale. Matricea sistemului, am observat de fiecare dată, că este matricea ale cărei coloane conţin n-uplurile ce definesc vectorii, $A = [u_1|u_2|\dots|u_k]$.

Se poate demonstra o regulă practică de determinare a dependenţei sau independenţei liniare a k vectori din $\mathbb{R}^n$, numită în continuare **Criteriul practic de determinare a dependenţei sau independenţei unui sistem de vectori**:

Vectorilor $u_1, u_2, \dots u_k \in \mathbb{R}^n$ li se asociază matricea ce are drept coloane, n–uplurile ce definesc vectorii:

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & & u_k \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

Dacă rangul matricii A este egal cu numărul de vectori, atunci vectorii sunt liniar independenţi.

Dacă rangul matricii este diferit de numărul de vectori, atunci aceştia sunt liniar dependenţi.

Pentru determinarea dependenţei sau independenţei unui sistem de vectori din $\mathbb{R}^n$ cu $n > 4$, este foarte utilă forma scară redusă a matricii asociate sistemului de vectori. Mai mult dacă vectorii sunt liniar dependenţi atunci din forma scară redusă se ”poate citi” şi relaţia de dependenţă între vectori.

Se poate demonstra că:

Prin transformări elementare pe linie, eventualele relaţii liniare între coloane nu se schimbă. Adică dacă anumite coloane din A formează un sistem independent de vectori, exact aceleaşi coloane din forma scară redusă sunt independente şi reciproc. Dacă unele coloane din A se exprimă ca o combinaţie liniară a altor coloane, atunci exact aceeaşi particularitate o au şi coloanele corespunzătoare din S^0_A şi reciproc.

Astfel în loc să analizăm rangul matricii iniţiale, A, asociate unui sistem de vectori $v_1, v_2 \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, analizăm forma scară redusă S^0_A.

Să ilustrăm această particularitate printr-un exemplu. Fie $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^4$, cinci vectori din $\mathbb{R}^4$, a căror matrice asociată, $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$, este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Forma scară redusă a matricii A este:

$$S^0_A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricea S_A^0 conţine 3 pivoţi. Prin urmare rangul ei este 3, la fel ca şi rangul matricii A. Rangul lui A fiind mai mic decât numărul de vectori, rezultă că vectorii v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sunt liniar dependenţi. Pentru a gasi relaţiile dintre ei ovservaăm că, coloane pivoţilor sunt coloanele $1, 3, 5$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aceste coloane sunt liniar independente pentru că matricea $M = [C_1|C_3|C_5]$ are rangul 3, egal cu numărul vectorilor coloană.

Orice coloană diferită de coloanele $1, 3, 5$, ce conţin pivoţii, se poate exprima ca o combinaţie liniară a coloanelor $1, 3, 5$.

$$C_2 = 2C_1 + 0C_3 + 0C_5, \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iar

$$C_4 = 1C_1 + 1C_3 + 0C_5, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exact aceleaşi proprietăţi le au şi coloanele matricii A, adică vectorii v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Mai precis vectorii v_1, v_3, v_5 sunt liniar independenţi iar vectorii v_2, v_4, se exprimă ca şi combinaţii liniare cu aceeaşi coeficienţi (ca şi în cazul matricii S_A^0) ale coloanelor $1, 3, 5$, adică ale vectorilor v_1, v_3, v_5:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = 2v_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad v_4 = 1v_1 + 1v_3 + 0v_5$$

În concluzie, având daţi m vectori din $\mathbb{R}^n$ pentru a studia dpenedenţa sau independenţa acestor vectori se procedează astfel:

• Li se asociază celor m vectori matricea ce are pe coloane vectorii respectivi, $A = [v_1|v_2|\dots|v_m]$.

• Se reduce matricea A la forma scară redusă, S_A^0.

• Dacă forma scară redusă are m pivoţi (m fiind numărul de vectori), atunci concluzionăm că vectorii $v_1, v_2, \dots, v_m$ sunt liniar independenţi.

• Dacă numărul de pivoţi r este strict mai mic decât m, atunci vectorii $v_1, v_2, \dots, v_m$ sunt liniar dependenţi şi relaţiile dintre ei se deduc astfel:

• Dacă pivoţii sunt plasaţi în coloanele $j_1, j_2, \dots, j_r$, atunci tragem concluzia că vectorii $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_r}$ sunt liniar independendenţi, iar ceilalţi vectori se pot exprima ca şi combinaţii liniare ale acestora.

Exemplul 3. Să se studieze dependenţa sau independenţa sistemului de vectori din $\mathbb{R}^5$:

$$v_1 = (1, 2, 4, -2, 5)^T, v_2 = (2, 3, 0, 1, -2)^T, v_3 = (4, 5, -8, 7, -16)^T$$

şi în caz de dependenţă sa se determine relaţia/relaţiile dintre vectori.

Matricea asociată $A = [v_1|v_2|v_3]$ este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -8 \\ -2 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & -16 \end{bmatrix}$$

Forma scară redusă:

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Din S_A^0 rezultă că rangul matricii A este 2 deci diferit de numărul de vectori. Prin urmare cei trei vectori sunt liniar dependenţi şi $v_3 = -2v_1 + 3v_3$, pentru că în S_A^0 avem:
coloana 3 = -2 $\times$ coloana 1+3 $\times$ coloana 2.

4.4 Definiţia bazei

Definiţia 4.4.1 *Un sistem ordonat de vectori,*

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$, formează o bază în $\mathbb{R}^n$ dacă:
B1. *Vectorii sunt liniar independenţi;*
B2. *Orice alt vector v din spaţiul $\mathbb{R}^n$ se exprimă ca o combinaţie liniară unică a vectorilor $e_1, e_2, \dots, e_n$:*

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \tag{4.8}$$

Scalarii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din exprimarea vectorlui v în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}$, se numesc **coordonatele vectorului** v în baza $\mathcal{B}$.

Numele de bază este sugestiv, deoarece vectorii ei constituie fundamentul, "baza", pe care se construieşte întreg spaţiul. Cunoscând vectorii bazei, prin combinaţii liniare ale acestora, se "construieşte" orice alt vector din spaţiu.

Exemplul 4. Sistemul de vectori $\mathcal{B} = (e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = (0,0,1)^T)$ constituie o bază în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

B1: Să arătăm că vectorii e_1, e_2, e_3 sunt liniar independenţi. Matricea asociată: $A = [e_1|e_2|e_3]$ este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deoarece $\det(A) = 1$, rangul matricii este 3, deci egal cu numărul de vectori. Prin urmare conform criteriului practic, vectorii e_1, e_2, e_3 sunt liniar independenţi.

B2: Fie $v = (x_1, x_2, x_3)^T$ un vector din $\mathbb{R}^3$. Să arătăm că el se exprimă ca o combinaţie liniară a vectorilor e_1, e_2, e_3. Într-adevăr:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

Observăm că coordonatele unui vector $v = (x_1, x_2, x_3)^T$ din $\mathbb{R}^3$, în baza $\mathcal{B}$, sunt chiar numerele reale ce definesc tripletul v. De exemplu coordonatele vectorului $v = (-5, 4, 1)^T$ în baza $\mathcal{B}$ sunt $-5, 4, 1$, adică $v = -5e_1 + 4e_2, +1e_3$. Această bază se numeşte *baza canonică* sau *baza standard* din $\mathbb{R}^3$.

În mod analog se arată că :

În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$, sistemul de vectori:

$$\mathcal{B} = (e_1 = (1,0,0,\ldots,0)^T, e_2 = (0,1,0,\ldots,0)^T, \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1)^T)$$

constiuie o bază. Această bază se numeşte baza canonică din $\mathbb{R}^n/R$.