# Cursul 5

# Baze în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$, continuare

În cursul precedent am arătat că sistemul de vectoriî

$$\mathcal{B} = (e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)^T)$$

constiuie o bază în $\mathbb{R}^n$. Această bază se numeşte *baza canonică* din $\mathbb{R}^n/R$.

Baza canonică nu este însă singura bază din $\mathbb{R}^n$. Să ilustrăm existenţa altor baze în cazul concret al lui $\mathbb{R}^3$.

**Exemplul 1**. Să se arate că sistemul de vectori

$$\mathcal{B}' = (v_1 = (-1, 2, 0)^T, v_2 = (2, 3, -2)^T, v_3 = (4, 1, 1)^T)$$

constituie o bază îin spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$. Să se determine apoi coordonatele vectorului $v = (-3, 1, 5)^T$ relativ la această bază.

**B1**. Să arătăm că vectorii din sistem sunt liniar independenţi folosind criteriul practic:

$$A = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinantul matricii este det(A)=-7, deci rangul matricii este 3 şi egal cu numărul de vectori. deci vectorii sunt liniar independenţi.

**B2**. fie $v = (a_1, a_2, a_3)^T$, un vector arbitrar din $\mathbb{R}^3$. Trebuie să arătăm că $v$ se poate exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor $v_1, v_2, v_3$: $v = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$, unde $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Înlocuind fiecare vector cu tripletul reprezentativ avem:

$$\begin{array}{rcl} (a_1, a_2, a_3)^T & = & y_1(-1, 2, 0)^T + y_2(2, 3, -2)^T + y_3(4, 1, 1)^T \quad \Leftrightarrow \\ (a_1, a_2, a_3)^T & = & (-y_1 + 2y_2 + 4y_3, 2y_1 + 3y_2 + y_3, 0y_1 - 2y_2 + 1y_3)^T \end{array}$$

Egalitatea celor doi vectori conduce la sistemul:

$$\begin{array}{rcl} -y_1 + 2y_2 + 4y_3 & = & a_1 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 & = & a_2 \\ 0y_1 - 2y_2 + 1y_3 & = & a_3 \end{array} \tag{5.1}$$

A arăta că orice vector $v = (a_1, a_2, a_3)$ se poate exprima unic ca o combinaţie linira a vectorilor $v_1, v_2, v_3$ revine la arăta că oricare ar fi termenii liberi ai sistemului de ecuaţii liniare şi neomogene (5.1), acesta este compatibil determinat, adică există o unică soluţie $(y_1, y_2, y_3)$. Matricea sistemului este $A = [v_1|v_2|v_3]$. Determinantul ei este diferit de zero, deci sistemul este compatibil determinat. Unica soluţie se poate determina fie cu metoda lui Cramer, fie prin metoda matricială, adică:

$$A\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

În concluzie sistemul de vectori $\mathcal{B}'$ constituie o bază în $\mathbb{R}^3$, însă spre deosebire de baza canonică, coordonatele unui vector $v$ în această bază nu se pot ”citi” automat din tripletul reprezentativ, ci trebuie să rezolvăm sistemul (5.1) pentru a afla aceste coordonate.

Să determinăm coordonatele vectorului $v = (-3, 1, 5)^T$ în baza $\mathcal{B}'$, adică scalarii $y_1, y_2, y_3$ astfel încât $(-3, 1, 5)^T = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3$. Efectuând calculele ca mai sus, determinarea coordonatelor $y_i, i = \overline{1, 3}$ revine la a rezolva sistemul:

$$\begin{aligned} -y_1 + 2y_2 + 4y_3 &= -3 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 &= 1 \\ 0y_1 - 2y_2 + 1y_3 &= 5 \end{aligned} \tag{5.2}$$

adică:

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Acest exemplu ilustrează că în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ nu există doar o singură bază.

*Se poate demonstra că în $\mathbb{R}^n$ există o bază $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, atunci există o infinitate de baze cu acelaşi număr de vectori $n$. Numărul $n$ se numeşte dimensiunea spaţiului.*

**Exemplul 2**. Spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ are dimensiunea 2, deoarece baza canonică $\mathcal{B} = (e_1 = (1, 0)^T, e_2 = (0, 1)^T)$, conţine doi vectori. În mod analog, $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ are dimesiunea 3, iar $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ are dimesiunea $n$.

## 5.1 Matricea schimbării de bază

Fie $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ două baze în $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. $\mathcal{B}$ o numim *baza veche*, iar $\mathcal{B}'$, *baza nouă*. Deobicei $\mathcal{B}$ va fi baza canonică!

Orice vector $v$ din spaţiu se exprimă ca o combinaţie liniară a vectorilor unei baze. În baza $\mathcal{B}$, $v$ are exprimarea $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, iar în baza $\mathcal{B}'$:

$v = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n$, $y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$. În mod natural ne întrebăm în ce relaţie sunt cele două seturi de coordonate ale vectorului $v$:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{I}: & x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \mathrm{II}: & y_1, y_2, \ldots, y_n \end{array}$$

Pentru a determina o relaţie între ele, ţinem seama că $\mathcal{B}$ este o bază şi deci vectorii noii baze se pot exprima ca o combinaţie liniară a vectorilor $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n \\ u_2 & = & a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n \\ \vdots & & \\ u_n & = & a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{array} \tag{5.3}$$

unde $a_{ij}$ sunt scalari din $\mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,n}$.

**Definiţia 5.1.1** *Matricea $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ ce are pe coloane coordonatele vectorilor $u_j$, $j = \overline{1,n}$ în baza $\mathcal{B}$, se numeşte matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.*

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & & u_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right] \end{array} \tag{5.4}$$

În mod analog se defineşte matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}$. Adică dacă exprimăm vectorii vechii baze, $e_i$, $i = \overline{1,n}$, ca şi combinaţii liniare a vectorilor noii baze, $e_i = c_{i1}u_1 + c_{i2}u_2 + \cdots c_{in}u_n$, matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}$ este:

$$T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & & e_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{array}\right] \end{array} \tag{5.5}$$

$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ fiind matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$, $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ realizează trecerea inversă de la $\mathcal{B}'$ la $\mathcal{B}$. Astfel ne este sugerată ideea că cele două matrici sunt inverse una alteia. În continuare vom arăta că într-adevăr:

$$T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} \tag{5.6}$$

În acest scop exprimăm relaţiile dintre vectorii celor două baze în formă matricială, şi anume (5.3):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

respectiv

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Combinând ultimele două relaţii matriciale, avem:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Dacă am efectua înmulţirile în această ultimă relaţie am obţine exprimarea vectorilor bazei $\mathcal{B}'$ în funcţie de ei înşişi. Dar vectorii $u_1, u_2, \dots, u_n$ sunt liniar independenţi şi deci nu se pot exprima unul ca o combinaţie liniară a celorlalţi. Singura exprimare posibilă este:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ u_2 &= u_2 \\ &\vdots \\ u_n &= u_n, \end{aligned}$$

care matricial se scrie:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Comparând ultimele două relaţii (5.9, 5.10), rezultă că:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

sau aplicând transpunerea în fiecare membru al acestei ultime egalităţi matriciale, obţinem:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = I_n \quad \Leftrightarrow \quad T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

adică *matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}$ este inversa matricii de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$* şi evident că *matricile de trecere sunt nesingulare*.

Vom arăta în continuare că matricea de trecere dintre două baze intervine în relaţia dintre coordonatele aceluiaşi vector în cele două baze. Mai precis:

**Propoziţia 5.1.1** *Dacă vectorul $v$ are exprimarea $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$ în baza $\mathcal{B}$, respectiv $v = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n$ în baza $\mathcal{B}'$, atunci între cele două seturi de coordonate există relaţia:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}, \tag{5.12}$$

**Demonstraţie**: Pornim de la exprimarea vectorului $v$ în baza $\mathcal{B}'$, $v = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots y_nu_n$ şi înlocuim vectorii bazei $\mathcal{B}'$ în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}$ (conform (5.7):

$$\begin{aligned} v = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots y_nu_n &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \overset{5.7}{=} \\ &\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Pe de altă parte $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$, adică

$$v = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Ultimul membru din (5.13) reprezintă de asemenea exprimarea vectorului $v$ în baza $\mathcal{B}$. Deoarece exprimarea unui vector într-o bază este unică, rezultă că:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

Aplicând transpunerea în ambii membri ai relaţiei (5.15) matricile linie devin matrici coloană şi conform proprietăţii $(AB)^T = B^T A^T$, obţinem:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} \tag{5.16}$$

□

Notăm în cele ce urmează prin $[v]_{\mathcal{B}}$, matricea coloană constituită din coordonatele vectorului $v$ în baza $\mathcal{B}$.

Cu această notaţie relaţia dintre coordonatele vectorului $v$ în bazele $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ se exprimă concentrat astfel:

$$[v]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v_{\mathcal{B}'}] \tag{5.17}$$

respectiv:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v_{\mathcal{B}}] \tag{5.18}$$

**Exemplul 3**. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ considerăm baza canonica $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ şi baza $\mathcal{B}' = (u_1 = (-1, 2, 1)^T, u_2 = (3, 0, -4)^T, u_3 = (2, 5, -1)^T)$
a) Să se determine matricile de trecere între cele două baze: $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$. Din matricea $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ să se deducă exprimarea vectorilor bazei canonice în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}'$.
b) Să se determine coordonatele vectorului $v = (0, 4, -3)$ relativ la baza $\mathcal{B}'$.

**Rezolvare:** a) Observăm că vectorii bazei $\mathcal{B}'$ sunt exprimaţi ca triplete de numere reale, deci în baza canonică:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1e_1 + 2e_2 - 1e_3$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = 3e_1 + 0e_2 - 4e_3$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 2e_1 + 5e_2 - 1e_3$$

Astfel, fără nici un calcul prealabil putem da matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [u_1|u_2|u_3] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ -4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Matricea de trecere de la baza nouă la baza veche, $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ este inversa matricii $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Pentru determinarea inversei calculăm:

- determinantul: $\det(A) = -90$
- transpusa matricii $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$:

$$T^T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

- adjuncta:

$$T^*_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -18 & 9 & 9 \\ -8 & -16 & -6 \end{bmatrix}$$

Astfel inversa este:

$$T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \equiv T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = -\frac{1}{90} \begin{bmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -18 & 9 & 9 \\ -8 & -16 & -6 \end{bmatrix}$$

Conform teoriei, coloana $j$ a matricii $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ reprezintă coordonatele vectorului $e_j$ în baza $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{1}{90}(20u_1 - 18u_2 - 8u_3) \\ e_2 &= -\frac{1}{90}(-5u_1 + 9u_2 - 16u_3) \\ e_3 &= -\frac{1}{90}(15u_1 + 9u_2 - 6u_3) \end{aligned}$$

b) Vectorul $v$ este exprimat în baza canonică şi se cere să găsim descompunerea sa în baza $\mathcal{B}'$: $v = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$, $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Coordonatele $y_1, y_2, y_3$ se pot calcula în două moduri:

1. Înlocuim fiecare vector din baza $\mathcal{B}'$, cu tripletul reprezentativ:

$$\begin{aligned} v &= y_1 \underbrace{(-1e_1 + 2e_2 - 4e_3)}_{u_1} + y_2 \underbrace{(3e_1 + 0e_2 - 4e_3)}_{u_2} + y_3 \underbrace{(2e_1 + 5e_2 - 1e_3)}_{u_3} \\ &= (-1y_1 + 3y_2 + 2y_3)e_1 + (2y_1 + 0y_2 + 5y_3)e_2 + (-4y_1 - 4y_2 - 1y_3)e_3 \end{aligned}$$

   Dar din enunţul problemei $v = (0, 4, -3)^T$, deci coordonatele lui în baza canonică sunt: $0, 4, -3$. Astfel egalând coordonatele de mai sus cu $0, 4, -3$, obţinem sistemul:

$$\begin{aligned} -1y_1 + 3y_2 + 2y_3 &= 0 \\ 2y_1 + 0y_2 + 5y_3 &= 4 \\ -4y_1 - 4y_2 - 1y_3 &= -3 \end{aligned}$$

   sau matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Observăm că matricea sistemului este $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Această matrice fiind nesingulară, rezultă că sistemul are o unică soluţie:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{90} \begin{bmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -18 & 9 & 9 \\ -8 & -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} =$$
$$\frac{-1}{90} \begin{bmatrix} -65 \\ 9 \\ -46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65/90 \\ -1/10 \\ 46/90 \end{bmatrix}$$

Prin urmare vectorul $v$ se exprimă în baza $\mathcal{B}'$ astfel:

$$v = \frac{65}{90} u_1 - \frac{1}{10} u_2 + \frac{46}{90} u_3$$

2. Metoda a doua se bazează pe relaţia dedusă între coordonatele aceluiaşi vector în două baze:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}},$$

adică:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{90} \begin{bmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -18 & 9 & 9 \\ -8 & -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Observăm că relaţia dintre coordonatele unui vector relativ la două baze este algoritmică şi evită calcule suplimentare (comparativ cu metoda directă 1).

## 5.2 Subspaţii vectoriale

Fie $S$ o submulţime nevidă în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$. Ne întrebăm în ce condiţii $S$ are structură de spaţiu vectorial relativ la operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari, definite între vectorii lui $\mathbb{R}^n$ deci şi cei ai lui $S$. Evident că dacă sunt verificate cele 8 condiţii din definiţia spaţiului vectorial pentru $S$, atunci $S$ are structură de spaţiu vectorial real şi în acest caz spunem că $S$ este *subspaţiu vectorial* sau *subspaţiu liniar* al lui $\mathbb{R}^n$.

**Propoziţia 5.2.1** *O submulţime nevidă $S$ a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$ este subspaţiu vectorial dacă şi numai dacă următoarele două condiţii sunt verificate:*
*SSV1. $\forall\ s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 + s_2 \in S$,, adică o dată cu doi vectori din $S$ şi suma lor este tot din $S$;*
*SSV2. $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ şi $\forall\ s \in S \Rightarrow \alpha s \in S$ ( produsul cu un scalar a unui vector din $S$ este tot din $S$).*

**Exemplul 4**. Fie $\theta$ vectorul nul din $\mathbb{R}^n$. Submulţimea $S = \{\theta\} \subset \mathbb{R}^n$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$, numit *subspaţiul nul*.

Orice subspaţiu vectorial $S \neq \{\theta\}$, conţine vectorul nul $\theta$, deoarece dacă $s \in S$, atunci $-1s = -s \in S$ şi deci $\theta = s - s \in S$.

**Exemplul 5**. Mulţimea soluţiilor $S$ ale unui sistem liniar şi omogen de $m$ ecuaţii cu $n$ necunoscute, de matrice $A(a_{ij})$, este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$.

Într-adevăr, fie sistemul liniar şi omogen exprimat în forma matricială:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

sau mai concis $Ax = \theta$, unde $x$ este vectorul coloană al necunoscutelor. Să arătăm că $S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

SSV1: Fie $x$, $y$ două soluţii, adică $Ax = 0$ şi $Ay = 0$. Atunci $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$, deci $x + y$ este soluţie a sistemului.

SSV2: Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $x$ o soluţie, adică $Ax = 0$. Atunci $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha 0 = 0$, deci $\alpha x$ este soluţie şi prin urmare $S$, mulţimea soluţiilor formează un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

Datorită acestui exemplu, de acum înainte vom indica un subspaţiu din $\mathbb{R}^n$ ca fiind mulţimea soluţiilor unui sistem omogen dat. Ecuaţiile sistemului se numesc **ecuaţiile subspaţiului**.

**Exemplul 6**. Mulţimea soluţiilor sistemului:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z - 5t &= 0 \\ -x + 4y + z + 7t &= 0 \end{aligned}$$

este subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^4$, pentru că sistemul are $4$ necunoscute.

**Exemplul 7**. Subspaţiul vectorial de ecuaţie:

$$-3x + 2y - 11z = 0$$

este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$, deoarece sistemul omogen (ce are doar o ecuaţie) are trei necunoscute.

## 5.3 Dimensiunea unui subspaţiu vectorial

Dimensiunea unui subspaţiu vectorial, $S$, al lui $\mathbb{R}^n$, este mai mică sau egală cu $n$. Dacă dimensiunea lui $S$ este $n$, atunci $S \equiv \mathbb{R}^n$.

Deoarece dimensiunea unui spaţiu vectorial este dată de numărul de vectori dintr-o bază, **putem determina dimensiunea unui susbspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$, de ecuaţii $\mathrm{Ax} = \theta$, după ce determinăm efectiv mulţimea soluţiilor sistemului $\mathrm{AXx}\theta$ şi identificăm o bază în această mulţime.**

**Exemplul 8**. Să se determine o bază în subspaţiul vectorial

$$S = \{s = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0\}$$

al lui $\mathbb{R}^3$ şi dimensiunea acestui subspaţiu.

$S$ este conform definiţiei mulţimea soluţiilor sistemului format dintr-o ecuaţie liniară şi omogenă: $x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0$. Pentru a determina mulţimea soluî tiilor observăm că matricea sistemului este $A = [1 - 3 - 5]$. $\Delta_p = |1|$ este un determinant principal. Deci $x_1$ este necunoscută principală, iar $\alpha := x_2, \beta := x_3$ sunt necunoscute secundare. Deci $x = 3\alpha + 5\beta$. Prin urmare $S$, mulţimea soluţiilor se poate exprima astfel:

$$S = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \begin{bmatrix} 3\alpha + 5\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Astfel subspaţiul $S$ este generat de vectorii $f_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Deoarece aceşti vectori sunt liniar independenţi, rezultă că o bază în $S$ este $\mathcal{B}_S = (f_1, f_2)$, iar dimensiunea subspaţiului $S$ este 2 (numărul de vectori din bază).

Se demonstrează că subspaţiul vectorial $S$ al lui $\mathbb{R}^n$ ce este mulţimea soluţiilor unui sistem liniar şi omogen $A_{m\times n}x = 0$ este egală cu numărul de coloane ale matricii $A$ minus rangul lui $A$ (adică este egală cu numărul de necunoscute secundare din sistemul ce se rezolvă).