Cursul 6

Produs scalar în $\mathbb{R}^n$. baze ortonormate

6.1 Definiţia produsului scalar în spaţiul $\mathbb{R}^n$

Din cele studiate pâna în prezent avem posibilitatea să adunăm doi vectori din $\mathbb{R}^n$ sau să-i înmulţim cu scalari. Să definim şi direcţia unui vector din $\mathbb{R}^n$:

Definiţia 6.1.1 *Doi vectori $v, w \in \mathbb{R}^n$ au aceeaşi* **direcţie** *sau sunt coliniari, şi notăm $v||w$, dacă există un scalar nenul $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $w = \lambda v$.*

Dacă $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ şi $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, atunci $w = \lambda v$ este echivalent cu:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix},$$

adică

$$y_1 = \lambda x_1, y_2 = \lambda x_2, \ldots, y_n = \lambda x_n$$

Dacă vectorul v nu are nici o coordonată zero, atunci coliniaritatea lui v cu w se se mai exprimă astfel:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = \lambda$$

Prin urmare pentru a verifica dacă doi vectori v şi w sunt coliniari se calculează rapoartele coordonatelor din aceeaşi poziţie: $\frac{y_i}{x_i}$, $i = \overline{1,n}$ şi dacă ele sunt egale, atunci vectorii sunt coliniari.

Exemplul 1. Să se testeze dacă vectorii $v = (-1, 2, 0, 3)$, $w = (2, -4, 0, -6)$ din $\mathbb{R}^4$ sunt sau nu coliniari.

Rapoartele coordonatelor din aceeaşi poziţie sunt:

$$\frac{2}{-1}, \frac{-4}{2}, \frac{0}{0}, \frac{-6}{3}$$

Observăm că rapoartele 1, 2 şi 4 sunt egale:

$$\lambda = \frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = \frac{-6}{3} = -2$$

La prima vedere suntem tentaţi să afirmăm că raportul al treielea nu are sens, deoarece în analiza matematică $0/0$ este caz de nedeterminare. Dar scrierea rapoartelor este doar o operaţie ajutătoare, pentru că practic coliniaritatea revine la a verifica dacă $y_i = \lambda x_i$, ori în cazul nostru $0 = \lambda 0$, adică $0 = -2 \cdot 0$, şi deci cei doi vectori sunt coliniari.

Dacă $v||w$ şi $w = \lambda v$ cu $\lambda > 0$, atunci spunem că v şi w au aceeaşi direcţie şi acelaşi **sens**. Dacă scalarul λ este negativ, atunci vectorii v şi w au aceeaşi direcţie şi sens opus.

Exemplul 2. Vectorii v, w din exemplul precedent au aceeaşi direcţie, dar sens opus. Vectorii $u_1 = (0, -6, 15)^T$, $u_2 = (0, -2, 5)^T \in \mathbb{R}^3$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens, pentru că $u_2 = 0.5u_1$.

În fizică vectorii din plan, respectiv din spaţiul tri-dimensional sunt caracterizaţi în plus şi de modulul sau mărimea vectorului. Pentru a asocia unui vector din $\mathbb{R}^n$, modulul său, vom defini noţiunea de produs scalar a doi vectori, care în plus ne va permite să caracterizăm şi poziţia relativă a doi vectori (unghiul a doi vectori).

Definiţia 6.1.2 *Produsul scalar a doi vectori* $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ *din* $\mathbb{R}^n$ *este un număr, notat* $v \cdot w$ *sau* $< v, w >$, *unde:*

$$v \cdot w = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n$$

Observăm că

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n = v^T w = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Produsul scalar verifică următoarele proprietăţi:

PS1. $v \cdot v \geq 0, \forall\, v \in \mathbb{R}^n$ şi $v \cdot v = 0$ dacă şi numai dacă $v = \theta$ (adică produsul scalar al unui vector cu el însuşi este un număr mai mare sau egal cu zero, şi este egal cu zero, doar dacă v este vectorul nul);

Într-adevăr, $v \cdot v = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Suma unor pătrate de numere reale este evident un număr pozitiv şi este egal cu zero doar dacă $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, adică $v = \theta_n = (0, 0, \dots, 0)$;

PS2. $v \cdot w = w \cdot v, \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$, deoarece:

$v \cdot w = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots y_nx_n = w \cdot v$;

PS3. $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \cdot w = \alpha_1(v_1 \cdot w) + \alpha_2(v_2 \cdot w), \forall\, v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n, \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ şi $v \cdot (\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1(v \cdot w_1) + \beta_2(v \cdot w_2), \forall v, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ şi $\forall\, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Discuţie:

- Numele produsului este sugestiv, deoarece asociază la doi vectori un scalar.
- Datorită proprietăţii PS1 se spune că **produsul scalar este pozitiv definit**.

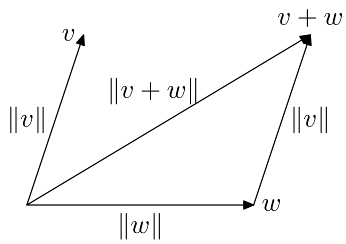

Fig.6.1: Ilustrarea inegalităţii triunghiului determinat de doi vectori şi suma lor.

• Proprietatea PS2 se numeşte proprietatea de simetrie a produslui scalar. (Atenţie nu este comutativitate, pentru că produsul scalar nu este operaţie internă, adică nu asociază la doi vectori un vector!).

• Proprietatea PS3 se numeşte liniaritatea produsului scalar în primul argument (factor).

Proprietate: Produsul scalar dintre un vector v şi vectorul nul θ este 0:

$$v \cdot \theta = 0, \quad \forall\ v \in \mathbb{R}^n. \tag{6.1}$$

Într-adevăr, $\theta = v - v$. Deci $v \cdot \theta = v \cdot (v - v) = (v \cdot v) - (v \cdot v) = 0$.

Spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ în zestrat cu produsul scalar de mai sus se numeşte spaţiu vectorial euclidian şi se notează $(\mathbb{R}^n, <>)$ sau $(\mathbb{R}^n\ \cdot)$.

6.1.1 Mărimi şi noţiuni definite cu ajutorul produsului scalar

1. Norma sau modulul unui vector

Proprietatea PS1 ne asigură că produsul scalar al unui vector cu el însuşi, $v \cdot v$, este un număr pozitiv. Are deci sens radical din $v \cdot v$. Notăm $\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{v \cdot v} \in \mathbb{R}$ şi numim acest număr, norma vectorului v (modulul sau "lungimea" vectorului").

Norma are următoarele proprietăţi:

N1. $\|v\| \geq 0$ şi $\|v\| = 0$, dacă şi numai dacă $v = \theta$;

Într-adevăr, dacă $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, atunci $\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ şi evident că este număr pozitiv, egal cu zero, doar dacă toate coordonatele vectorului sunt zero.

N2. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n$;

N3. $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|, \forall\ v \in \mathbb{R}^n$ şi $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Proprietatea **N1** a normei indică că norma sau modulul unui vector este un număr pozitiv, şi acesta este egal cu zero, doar dacă vectorul este vectorul nul. Prin urmare doar vectorul nul are modulul (mărimea) egală cu zero.

Proprietatea **N2** înseamnă că modulul sumei a doi vectori este mai mic sau egal cu suma modulelor celor doi vectori. Această proprietate reprezintă generalizarea la un spaţiu vectorial de orice dimensiune, a inegalităţii triunghiului din geometrie (Fig.6.1).

N3 evidenţiază că norma produsului dintre un scalar şi un vector este modul scalarului ori norma vectorului.

Exemplul 3. În spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ se dau vectorii $v = (-3, 1, 4)^T$, $w = (2, -5, 1)^T$. Să se calculeze produsul scalar $v \cdot w$ şi să se compare normele celor doi vectori.

Produsul scalar $v \cdot w = -3 \cdot 2 + 1(-5) + 4 \cdot 1 = -6 - 5 + 4 = -7$;
$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 1 + 4^2} = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26} = 5.099$, $\|w\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1} = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30} = 5.477$. Deci $\|w\| > \|v\|$.

6.2 Versorul unei direcţii. Vectori ortogonali

Fiind dat un vector $v \neq \theta$ din $\mathbb{R}^n$ există o infinitate de vectori coliniari cu v (ce au aceeaşi direcţie ca v), şi anume toţi vectorii de forma αv, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Vectorii $w = \alpha v$, $\alpha > 0$ au acelaşi sens ca v, iar cei pentru care $\alpha < 0$ au sens opus. Vectorii αv, corespunzători la diferiţi scalari α au norme diferite. Dintre toţi vectorii ce au aceeaşi direcţie şi sens ca v alegem unul particular, şi anume, acela care are norma egală cu 1:

Definiţia 6.2.1 *Fie v un vector nenul din $\mathbb{R}^n$. Vectorul ce are aceeaşi direcţie şi sens ca v şi norma egală cu 1, se numeşte* **versorul lui v** *şi se notează v^0.*

Conform acestei definiţii, versorul se exprimă astfel:

$$v^0 = \alpha v, \ \alpha > 0, \quad \text{şi } \ \|v^0\| = 1.$$

Să deducem o formulă de calcul a versorului lui $v \neq \theta$: Calculând norma $\|v^0\| = \|\alpha v\| = \alpha\|v\| = 1$, rezultă că $\alpha = \dfrac{1}{\|v\|}$ şi deci versorul lui v se exprimă în funcţie de v astfel:

$$\boxed{\mathrm{v}^0 = \frac{1}{\|v\|}v = \frac{v}{\|v\|}} \tag{6.2}$$

Deci dacă $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ atunci versorul său va fi:

$$v^0 = \frac{v}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}, \dots \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}\right)$$

Exemplul 4. Să se determine versorul vectorului $v = (5, -1, 4, 3)^T \in \mathbb{R}^4$.

Norma vectorului v, este $\|v\| = \sqrt{25 + 1 + 16 + 9} = \sqrt{51}$. Deci versorul vectorului v este:

$$v^0 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(5, -1, 4, 3)^T}{\sqrt{51}} = \left(\frac{5}{\sqrt{51}}, \frac{-1}{\sqrt{51}}, \frac{4}{\sqrt{51}}, \frac{3}{\sqrt{51}}\right)$$

3. Cosinusul unghiului a doi vectori

Pentru a putea defini unghiul dintre doi vectori, precizăm că produsul scalar a doi vectori $v \cdot w$ este un număr real pozitiv, negativ sau zero. Astfel modulul produsului scalar, $|v \cdot w|$ este modulul acestui număr real, $v \cdot w$. Se poate arăta că avem următoarea inegalitate:

$$|v \cdot w| \leq \|v\|\|w\|, \quad \forall\ v, w \in \mathbb{R}^n. \tag{6.3}$$

numită inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz. Dacă vectorii v şi w sunt diferiţi de vectorul nul, atunci normele lor $\|v\|$, $\|w\|$ sunt diferite de zero si inegalitatea Cauchy se poate scrie în forma echivalentă:

$$\frac{|v\cdot w|}{\|v\|\|w\|}\leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|}\right|\leq 1 \quad \Leftrightarrow -1\leq |\frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|}\leq 1$$

Se ştie că $\cos\theta\in[-1,1]$, $\forall\ \theta\in\mathbb{R}$, deci $|\cos\theta|\leq 1$ şi funcţia $\cos$ este bijectivă pe intervalul $[0,\pi]$. Deoarece pentru doi vectori nenuli $v,w\in\mathbb{R}^n$,

$$-1\leq |\frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|}\leq 1$$

rezultă că există există un unic $\theta\in[0,\pi]$ astfel încât

$$\cos\theta=\frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|} \tag{6.4}$$

Unghiul de măsură θ îl numim unghiul dintre vectorii v şi w, şi astfel **cosinusul unghiului dintre doi vectori nenuli** este:

$$\boxed{\cos(\angle v,w)=\frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|}} \tag{6.5}$$

Observaţia 6.2.1 *La fizică produsul scalar a doi vectori din plan s-a definit ca fiind produsul modulelor celor doi vectori cu cosinusul unghiului dintre vectori. Din relaţia (6.5) rezultă că în orice spaţiu vectorial cu produs scalar, avem că:*

$$v\cdot w=\|v\|\|w\|\cos(\angle v,w). \tag{6.6}$$

În concluzie cosinusul unghiului a doi vectori dă informaţie despre poziţia relativă a doi vectori într-un spaţiu vectorial. Observăm că dacă produsul scalar a doi vectori nenuli este zero: $v\cdot w=0$, atunci cosinusul unghiului dintre cei doi vectori este 0: $\cos(\angle v,w)=0$. Deci măsura unghiului $(\angle v,w)$ este $\pi/2$ (90°). Această particularitate ne conduce la:

Definiţia 6.2.2 *Doi vectoi nenuli $v,w\in\mathbb{R}^n$ care au produsul scalar egal cu zero se numesc* **vectori ortogonali** (*perpendiculari*). *Notăm $v\perp w$ şi citim v este ortogonal pe w.*

Exemplul 5. Se dau vectorii $v=(-7,1,3)^T, w=(0,2,-1)^T\in\mathbb{R}^3$, $u=(3,1,2)^T$. Să se calculeze cosinusul unghiului dintre v şi w şi să se arate că $w\perp u$.

$$\cos(\angle v,w)=\frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|}=\frac{-7\cdot 0+1\cdot 2-3\cdot 1}{\sqrt{49+1+9}\sqrt{4+1}}=\frac{-1}{\sqrt{59}\sqrt{5}}=\frac{-1}{\sqrt{295}}$$

Pentru a verifica ortogonalitatea vectorilor w şi u calculăm produsul lor scalar: $w\cdot u=0\cdot 3+2\cdot 1-1\cdot 2=0$. În concluzie vectorii w şi u sunt ortogonali.

6.3 Baze ortonormate în $\mathbb{R}^n$

Definiţia 6.3.1 *Un sistem de m vectori nenuli din $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, cu proprietatea că oricare doi vectori distincţi sunt ortogonali, adică $v_i \cdot v_j = 0$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j$, se numeşte sistem ortogonal de vectori.*

Propoziţia 6.3.1 *Un sistem ortogonal de vectori este un sistem liniar independent.*

Demonstraţie: Fie $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ un sistem ortogonal de vectori, adică:

$$v_i \cdot v_j = 0, \forall\, i, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j \tag{6.7}$$

Presupunem că o combinaţie liniară a acestor vectori este egală cu vectorul nul:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots \alpha_m v_m = \theta, \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m \in \mathbb{R} \tag{6.8}$$

Înmulţim scalar ambii membrii ai relaţie (6.8) cu vectorul v_i:

$$(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots \alpha_m v_m) \cdot v_i = (\theta \cdot v_i) \tag{6.9}$$

Aplicând proprietăţile produsului scalar şi ortogonalitatea a doi vectori distincţi, avem:

$$\alpha_1 \underbrace{(v_1 \cdot v_i)}_{=0} + \cdots + \alpha_i \underbrace{(v_i \cdot v_i)}_{\neq 0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{(v_n \cdot v_i)}_{=0} = (\theta \cdot v_i) = 0 \tag{6.10}$$

Rezultă deci că

$$\alpha_i (v_i \cdot v_i) = 0 \tag{6.11}$$

Dar produsul a două numere reale este zero doar dacă cel puţin unul din factori este zero. Cum $v_i \cdot v_i \neq 0$ (pentru că $v_i \neq \theta$), rezultă că $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, m}$. Prin urmare vectorii ortogonali sunt liniar independenţi. □

Această particularitate a sistemelor de vectori ortogonali ne asigură că un sistem ortogonal de n vectori din $\mathbb{R}^n$ formează o bază.

Definiţia 6.3.2 *O bază din $\mathbb{R}^n$ formată din vectori ortogonali doi câte doi se numeşte* **bază ortogonală**. *Baza $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ce are vectorii distincţi ortogonali doi câte doi şi fiecare vector are norma egală cu 1 numeşte* **bază ortonormată**.

Deoarece doi vectori e_i, e_j sunt ortogonali dacă produsul lor scalar este egal cu zero, matematic, faptul că baza $\mathcal{B}$ este ortonormată se exprimă astfel:

$$e_i \cdot e_j = 0, \forall\, i \neq j \quad \text{şi} \quad \|e_i\| = 1, \forall\, i = \overline{1, n} \tag{6.12}$$

Precizăm că produsul scalar $e_i \cdot e_i$, al unui vector dintr-o bază ortonormată, cu el însuşi, este egal cu 1, $e_i \cdot e_i = 1$. Într-adevăr, norma vectorului e_i este egală cu 1, adică, $\sqrt{e_i \cdot e_i} = 1$ sau echivalent, ridicând la pătrat, $e_i \cdot e_i = 1$.

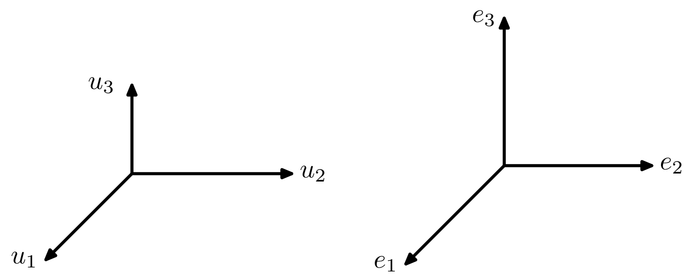

Fig.6.2: Bază ortogonală în stânga şi ortonormată în dreapta.

Diferenţa dintre o bază ortogonală (u_1, u_2, u_3) şi una ortonormată (e_1, e_2, e_3), din $\mathbb{R}^3$ este ilustrată în Fig.6.2.

Exemplul 6. Baza canonică din spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ este o bază ortonormată.

Să verificăm în cazul $n = 3$: $\mathcal{B} = (e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T)$.

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_2 &= (1,0,0)^T \cdot (0,1,0)^T &&= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \\ e_1 \cdot e_3 &= (1,0,0)^T \cdot (0,0,1)^T &&= 0 \\ e_2 \cdot e_3 &= (0,1,0)^T \cdot (0,0,1)^T &&= 0 \end{aligned}$$

Deci baza canonică este ortogonală. Să arătăm că este şi normată, adică fiecare vector are norma 1 (este versor):

$$\|e_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1, \quad \|e_2\| = 1, \quad \|e_3\| = 1.$$

În continuare vom arăta că spre deosebire de bazele arbitrare, coordonatele unui vector într-o bază ortonormată se calculează foarte simplu.

Propoziţia 6.3.2 *Dacă $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ este o bază ortonormată în $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ şi v un vector arbitrar din $\mathbb{R}^n$, atunci coordonatele vectorului v în baza $\mathcal{B}$ sunt $x_i = v \cdot u_i$, $i = \overline{1, n}$, adică coordonatele vectorului v se obţin calculând succesiv produsul scalar dintre v şi vectorii bazei $\mathcal{B}$.*

Demonstraţie: Baza $\mathcal{B}$ fiind ortonormată avem

$$u_i \cdot u_j = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq j \\ 1 & \text{dacă } i = j \end{cases} \tag{6.13}$$

Fie

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_i u_i + \cdots + x_n u_n \tag{6.14}$$

exprimarea vectorului v în baza ortonormată $\mathcal{B}$. Înmulţind scalar fiecare membru al relaţiei (6.14) cu vectorul u_i obţinem:

$$v \cdot u_i = x_1(\underbrace{u_1 \cdot u_i}_{=0}) + x_2(\underbrace{u_2 \cdot u_i}_{=0}) + \cdots + x_i(\underbrace{u_i \cdot u_i}_{=1}) + \cdots x_n(\underbrace{u_n \cdot u_i}_{=0}), \tag{6.15}$$

adică $v \cdot u_i = x_i$, $i = \overline{1, n}$. □

Observaţia 6.3.1 *Un vector v are următoarea exprimare în baza ortonormată $\mathcal{B}$:*

$$v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \cdots + (v \cdot u_n)u_n. \tag{6.16}$$

Exemplul 7. În spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ se dă baza

$$\mathcal{B} = \left(u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right), u_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$$

Să se arate că $\mathcal{B}$ este o bază ortonormată şi să se determine coordonatele vectorului $v = (-3, 1, 2)$ relativ la baza $\mathcal{B}$.

Verificăm ortogonalitatea:

$$\begin{aligned}
u_1 \cdot u_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right) = \frac{1}{\sqrt{36}} - \frac{1}{\sqrt{36}} = 0 \\
u_1 \cdot u_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} = 0 \\
u_2 \cdot u_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{18}} - \frac{4}{3\sqrt{18}} + \frac{2}{3\sqrt{18}} = 0.
\end{aligned}$$

Să calculăm norma fiecărui vector din bază:

$$\|u_1\| = \sqrt{1/2 + 1/2} = 1, \quad \|u_2\| = \sqrt{1/18 + 16/18 + 1/18} = 1, \quad \|u_3\| = \sqrt{4/9 + 1/9 + 4/9} = 1$$

Coordonatele vectorului v relativ la baza $\mathcal{B}$ sunt

$$\begin{aligned}
x_1 &= v \cdot u_1 = (-3, 1, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{\sqrt{2}} \\
x_2 &= v \cdot u_2 = (-3, 1, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{4}{\sqrt{18}} + \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
x_3 &= v \cdot u_3 = (-3, 1, 2) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{6}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = -1.
\end{aligned}$$

Deci v se exprimă în baza $\mathcal{B}$ astfel $v = -\frac{5}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}u_2 - u_3$.