Algebră liniară, Tema 5

Baze. Matricea de trecere dintre două baze

1. Să se arate folosind definiţia bazei că sistemul de vectori:

$$\mathcal{B}' = (u_1 = (1,-3,2)^T, u_2 = (2,1,-1)^T, u_3 = (4,-3,5)^T)$$

formează o bază în $\mathbb{R}^3$ şi să se determine coordonatele vectorului $v = (5,-1,7)^T$ relativ la baza $\mathcal{B}'$.

2. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$ se dă baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ şi baza $\mathcal{B}' = (u_1 = (1,2)^T, u_2 = (-1,3)^T)$. Să se determine matricea de trecere $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ şi coordonatele vectorului $v = (5,-2)^T$ în baza $\mathcal{B}'$. Ce reprezintă 5 şi -2 pentru vectorul v?

3. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se dă baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ şi baza $\mathcal{B}' = (u_1 = (0,1,1)^T, u_2 = (1,0,1)^T, u_3 = (1,1,0)^T$.

Să se determine matricile de trecere $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}, T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$. Din care din aceste două matrici puteţi deduce exprimarea vectorilor e_1, e_2, e_3 în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}'$ (vezi o problemă similară rezolvată în timpul cursului).

4. a) Vectorul v are următoarea exprimare în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}' = (f_1 = (-1,2,3)^T, f_2 = (0,3,-2)^T, f_3 = (5,1,-1)^T)$:

$$v = 2f_1 - 3f_2 + 7f_3$$

Să se determine coordonatele lui v în baza canonică.

b) Să se determine coordonatele vectorului $w = (1,0,4)^T$ în baza $\mathcal{B}'$.

5. În $\mathbb{R}^4$ se consideră subspaţiul vectorial:

$$S = \{v = (x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 \mid -2x + y - z + 5t = 0, 2x + 3z - 2t = 0\}$$

Să se determine o bază în subspaţiul S şi dimensiunea lui S .

6. În $\mathbb{R}^3$ se dă subspaţiul vectorial

$$S = \{v = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - y + z = 0\}$$

a) Cum verificaţi dacă vectorul $v = (0,1,-1)$ aparţine lui S?
b) Să se determine o bază în S.

7. Să se arate că submulţimea $S = \{v = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0, x - y + 5z = 0\}$ este subspaţiu vectorial de dimensiune 1 a lui $\mathbb{R}^3$.