Cursul 13

Curbe în spaţiu (continuare)

13.1 Tangenta la o curbă în spaţiu. Planul normal şi reperul mobil al lui Frenet

Fie Γ o curbă în spaţiu parametrizată de $r : I \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = x(t), y(t), z(t))$, $r \in C^2(I)$.

Definiţia 13.1.1 *Curba Γ se numeşte curbă regulată de ordin 2 dacă în fiecare punct al curbei vectorii asociaţi $\overrightarrow{\dot{r}}(t)$, $\overrightarrow{\ddot{r}}(t)$ sunt liniar independenţi (adică sunt nenuli şi necoliniari).*

În această secţiune considerăm doar curbe regulate de ordin 2.

Fie M un punct al curbei corespunzător parametrului $t = t_0$, adică punctul de coordonate $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. Ecuaţiile tangentei în punctul M, la curbă, sunt:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

În cazul curbelor plane am numit normală, dreapta perpendiculară pe tangentă în punctul de tangenţă. Această dreaptă este unică pentru că complementul ortogonal al vectorului tangent, ca vector din $\mathbb{R}^2$, are dimensiunea 1, deci există o unică direcţie perpendiculară pe tangentă. În spaţiu însă, complementul ortogonal al vectorului tangent este de dimensiune doi şi deci există o infinitate de vectori perpendiculari pe vectorul tangent (vectori normali) în punctul de tangenţă. Din această infinitate în mecanică se aleg două direcţii particulare, numite direcţia binormalei şi direcţia normalei principale. Mai precis, se asociază unui punct $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ un reper ortonormat pozitiv orientat, numit reperul lui Frenet. Pentru a defini baza reperului lui Frenet construim mai întâi o bază ortogonală (w_1, w_2, w_3) pe care apoi o normăm.

Se ia drept vector w_1, **vectorul tangent** în M:

$$w_1 = \overrightarrow{\dot{r}}(t_0)$$

Vectorul

$$w_3 = \overrightarrow{\dot{r}}(t_0) \times \overrightarrow{\ddot{r}(t_0)}$$

se numeşte **vectorul binormal** în M, pentru că este simultan perpendicular şi pe vectorul viteză $\overrightarrow{\dot{r}}(t_0)$ şi pe vectorul acceleraţie $\overrightarrow{\ddot{r}}(t_0)$.

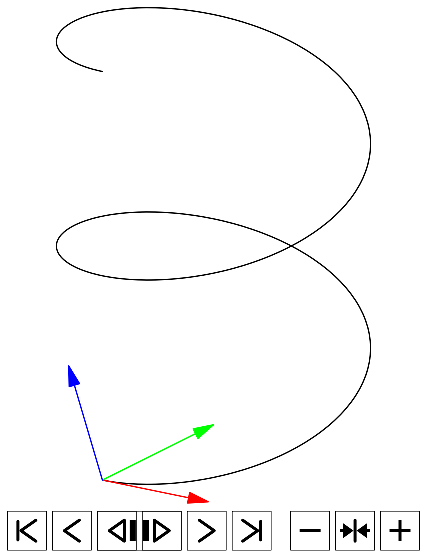

Fig.13.1: Animarea reperului mobil al lui Frenet. Cei trei vectori din baza reperului sunt coloraţi în roşu (tangenta), verde (normala principală), albastru (binormala.

Pentru ca baza să fie pozitiv orientată se defineşte

$$w_2 = w_3 \times w_1 = (\overrightarrow{\dot r}(t_0) \times \overrightarrow{\ddot r(t_0)}) \times \overrightarrow{\dot r}(t_0)$$

w_2 defineşte **normala principală** în punctul M (este evident vector normal pentru că este perpendicular pe vectorul tangent $\overrightarrow{\dot r}(t_0)$.

Baza ortonormată se notează $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{\tau}(t_0), \overrightarrow{n}(t_0), \overrightarrow{b}(t_0)) = (w_1^0, w_2^0, w_3^0)$. Reperul $\mathcal{R}_F = (M; (\overrightarrow{\tau}(t_0), \overrightarrow{n}(t_0), \overrightarrow{b}(t_0))$ este reperul lui Frenet asociat curbei în punctul M. Exact ca şi în cazul curbelor plane reperul este mobil (Fig.13.1).

Exemplul 1. Să se determine reperul lui Frenet asociat punctului $M(2, 0, 1)$ de pe curba $\Gamma = \mathrm{im}(r)$, $r : [-0.5, 5] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = (2t, \ln t, t^2)$.

Deoarece direcţiile reperului lui Frenet într-un punct se determină pornind de la vectorii viteză, $\overrightarrow{\dot r}(t)$, şi acceleraţie, $\overrightarrow{\ddot r}(t)$, în acel punct şi aceşti vectori nu depind de coordonatele carteziene ale punctului, ci de parametrul t corespunzător punctului respectiv, determinăm în prealabil parametrul t astfel încât $r(t) = (2, 0, 1)$ sau echivalent acel t care satidface simultan condiţiile:

$$\begin{aligned} 2t &= 2 \\ \ln t &= 0 \\ t^2 &= 1 \end{aligned}$$

Evident $t = 1$ şi deci baza reperului lui Frenet în punctul M se calculează pornind de la vectorii $\overrightarrow{\dot r}(1)$, $\overrightarrow{\ddot r}(1)$. sectionCurbura unei curbe Şoferii ştiu că atunci când şoseaua este "mai curbată", trebuie să accelereze dacă o parcurg traiectoria cu viteză constantă. Definim ‘n continuare cum se calculeaz‘a curbura unei curbe ‘n spa‘tiu ‘si apoi a unei curbe plane.

Curbura unei curbe diferen‘tiabile dat‘a prin parametrizarea $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$ este num‘arul real $\kappa(t)$ definit astfel:

$$\kappa(t) = \frac{\|\overrightarrow{\dot{r}}(t) \times \overrightarrow{\ddot{r}}(t)\|}{\|\overrightarrow{\dot{r}}(t)\|^3}$$

Să deducem formula curburii pentru o curbă plană (2D), interpretată ca fiind o curbă în $\mathbb{R}^3$, inclusă în planul xOy deci, parametrizarea sa este:

$$r(t) = (x(t), y(t), 0)$$

Astfel avem:

$$\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))e_3$$

şi deci **curbura curbei plane** va fi:

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}^3}$$

De obicei, pentru o curbă plană se consideră formula curburii cu semn, adică nu se ia modulul în formula de mai sus, ci:

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}^3}$$

Exemplul 2. a) Să se calculeze curbura dreptei de ecuaţie $y = mx + n$;

b) Să se calculeze curbura cercului parametrizat de:

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos t \\ y(t) &= R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

a) notăm $x = t$ şi astfel dreapta are parametrizarea:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= mt + b \end{aligned}$$

Calculăm:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 \qquad & x''(t) &= 0 \\ y'(t) &= m \qquad & y''(t) &= 0 \end{aligned}$$

Curbura dreptei este aşa cum ne aşteptăm:

$$\kappa(t) = 0, \forall\ t \in \mathbb{R},$$

adică dreapta nu este curbată.

b) Pentru a deduce curbura unui cerc de rază R, parametrizat de $r(t) = (\underbrace{R\cos t}_{x(t)}, \underbrace{R\sin t}_{y(t)})$ calculăm:

$$\begin{array}{rclcrcl} x'(t) & = & -R\sin t & \quad & x''(t) & = & -R\cos t \\ y'(t) & = & R\cos t & \quad & y''(t) & = & -R\sin t \end{array}$$

Astfel curbura cercului

$$k(t) = \frac{|R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t|}{\sqrt{R^2\sin^2 + R^2\cos^2 t}^3} = \frac{1}{R}$$

este constantă (nu depinde de t) şi este egală cu inversul razei. Deci dintre două cercuri concentrice are curbura mai mare cercul cu raza mai mică.