Cursul 1

Matrici. Operaţii cu matrici

1.1 Operaţii cu matrici

În problemele economice şi financiare se manipulează mulţimi mari de date, care cel mai adesea se înregistrează în tabele. Datele dintr-un tabel definesc matrici. De aceea studiem operaţii cu matrici şi metode de a extrage informaţie din matrici, pe baza căreia se fac predicţii şi se iau decizii.

Exemplu de date cărora le asociem o matrice:

Un retailer ţine evidenţa unitătilor din produsele P_1, P_2, P_3, vândute în 4 săptămâni consecutive, S_1, S_2, S_3, S_4, într-un tabel de forma:

	S_1	S_1	S_1	S_4
P_1	24	31	15	27
P_2	21	19	18	33
P_3	17	23	30	26

O matrice de elemente reale, cu m linii şi n coloane este ”un tablou” ce are înregistrat în linia i, coloana j, un număr real, notat a_{ij}:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

• Mulţimea matricilor A, de elemente reale, de tip $m \times n$ se notează $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

• Dacă numărul de linii este egal cu numărul de coloane, atunci matricea se numeşte **matrice pătratică**.

• Mulţimea matricilor pătratice de n linii şi n coloane se notează $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Tabelului de date de mai sus i se asociază matricea

$$A = \begin{bmatrix} 24 & 31 & 15 & 27 \\ 21 & 19 & 18 & 33 \\ 17 & 23 & 30 & 26 \end{bmatrix}$$

Elementul din linia 2 coloana 3, $a_{23} = 18$, reprezintă, de exemplu, numărul de unităţi din produsul P_2 vândut în săptămâna a treia, S_3.
Exemple generale de matrici:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 & 34 & 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 51 \\ -12 \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 7 & -4 & 5 \\ 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Matricea nulă. O matrice $\mathcal{O}$ de tip $m \times n$ care are toate elementele egale cu zero se numeşte matricea nulă.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

O matrice pătratică particulară este **matricea unitate**:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea unitate are elementele de pe diagonala principală egale cu 1 şi restul sunt egale cu 0.

Matricea linie, este o matrice de forma $[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n] \in \mathcal{M}_{1,n}$, iar o matrice coloană este o matrice cu n linii şi o coloană:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

De exemplu, matricea $p = [p_1\ p_2\ p_3] = [25\ 50\ 100]$ este matricea taxelor de restantă la Algebră pentru prezentarea a III-a, în anul II şi respectiv anul III.

Numărul de angajaţi în departamentul tehnic al UPT îl putem indica printr-o matrice coloană.

$$\begin{array}{l} \text{economişti} \\ \text{tehnicieni hardware} \\ \text{ingineri hardware} \\ \text{ingineri mecanici} \\ \text{ingineri electronişti} \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Adunarea matricilor. Două matrici $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ având acelaşi număr de linii şi coloane se adună astfel: Suma $C = A + B$ este o matrice cu acelaşi număr de linii şi coloane ca A şi B, iar un element arbitrar al sumei este:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemplul 1.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 6 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 14 & 9 \\ 7 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ 23 & 15 \\ 9 & 25 \end{bmatrix}$$

Exemplul 2. Dacă un retailer vinde produse în 2 magazine, atunci dacă numărul de unităţi de produs vândute în 4 săptămâni în magazinul M_1 şi respectiv M_2 este dat în tabelele:

M_1=

	S_1	S_1	S_1	S_4
P_1	24	31	15	27
P_2	21	19	18	33
P_3	17	23	30	26

M_2=

	S_1	S_1	S_1	S_4
P_1	20	18	19	29
P_2	13	16	24	30
P_3	15	20	31	35

atunci suma matricilor asociate, $M_1 + M_2$ indică numărul total de unităţi de produs P_1, P_2, P_3 vândut în cele 4 săptămâni:

$$M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} 24+20 & 31+18 & 15+19 & 27+29 \\ 21+13 & 19+16 & 18+24 & 33+30 \\ 17+15 & 23+20 & 30+31 & 26+35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 49 & 34 & 56 \\ 34 & 35 & 42 & 63 \\ 32 & 43 & 61 & 61 \end{bmatrix}$$

> Suma unei matrici A cu matricea nulă de acelaşi tip esye $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Produsul dintre o matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ **şi un număr real** α este o matrice $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ ale cărei elemente p_{ij} se calculează astfel: $\boxed{p_{ij} = \alpha a_{ij}}$, $\forall\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. În cuvinte, se înmulţeste fiecare element al matricii A cu numărul α.

Exemplul 3. O firmă vinde 4 produse şi încasările în mii RON, din vânzarea fiecărui produs, timp de un semestru, prin trei puncte de vânzare V_1, V_2, V_3 sunt date în tabelul:

	P_1	P_2	P_3	P_4
V_1	35	43	18	27
V_2	21	37	29	17
V_3	23	30	14	40

Ştiind că profitul reprezintă doar 20% din suma încasată din vânzări, să se calculeze profitul total rezultat din vânzarea celor 4 produse, în semestrul monitorizat.

Asociem tabelului matricea

$$A = \begin{bmatrix} 35 & 43 & 18 & 27 \\ 21 & 37 & 29 & 17 \\ 23 & 30 & 14 & 40 \end{bmatrix}$$

şi calculăm $\frac{20}{100}A = \frac{1}{5}A$ care ne dă profitul obţinut din fiecare punct de vânzare şi fiecare produs.

Matricea profitului este:

$$P = \frac{1}{5}A = \begin{bmatrix} 35/5 & 43/5 & 18/5 & 27/5 \\ 21/5 & 37/5 & 29/5 & 17/5 \\ 23/5 & 30/5 & 14/5 & 40/5 \end{bmatrix},$$

iar profitul total este suma tuturor elementelor matricii P:

$$t = (35+43+18+27+21+37+29+17+23+30+14+40)/5 = 334/5 = 66.8 \text{ mii lei}$$

Produsul a două matrici Pentru orice două matrici A, B cu particularitatea că numărul de coloane al primei matrici coincide cu numărul de linii al celei de-a doua, adică A este de tip $m \times p$, iar B de tip $p \times n$, definim **matricea produs**, ca fiind matricea $C = AB$, de m linii linii şi n coloane, alecărei elemente c_{ij}, se determină astfel:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \tag{1.2}$$

adică:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \mathbf{c_{ij}} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \cdots & \mathbf{a_{ik}} & \cdots & \mathbf{a_{ip}} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & \mathbf{b_{kj}} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & \mathbf{b_{pj}} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

Remarcăm că pentru a calcula elementul din poziţia (i, j) a matricii produs, înmulţim elementele corespunzătoare din linia i a matricii A cu elementele coloanei j a matricii B şi adunăm produsele.

Exemplul 4. Să calculăm produsul AB, unde $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, iar $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 + 1(-5) & (-2)\cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1(-5)\cdot(-5) & 3\cdot 3 + (-5)\cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot (-5) & 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 28 & -1 \\ -20 & 8 \end{bmatrix}$$

În cadrul cursului vom folosi foarte mult produsul dintre o matrice pătratică A şi o matrice coloană:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

unde după efectuarea produsului din membrul stâng obţinem:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{array}$$

Produsul dintre matricea unitate I_n şi o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este $AI_n = I_nA = A$.

Analog:

$$I_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Transpusa unei matrice Fie A o matrice de tip $m \times n$, $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Transpusa sa este o matrice de tip $n \times m$, notată A^T, de elemente $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i, j$. Cu alte cuvinte, linia i a matricii A este coloana i în transpusă, $i = \overline{1, m}$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Proprietăţi ale operatorului de transpunere

1 $(A^T)^T = A$.
2 $(AB)^T = B^T A^T$, oricare ar fi A, B două matrici ce se pot înmulţi.
Un caz particular al proprietăţii **2** pe care-l vom folosi adesea este următorul:
Dacă A este o matrice pătratica de tip $n \times n$ şi x este o matrice coloana, atunci:

$$\left(A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \right)^T = x^T A^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} A^T$$

De exemplu:

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Determinantul unei matrici pătratice

Determinantul unei matrici pătratice, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, este un număr real ce se notează:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Calculul determintului de **ordin 2** (al unei matrici de 2 linii şi 2 coloane):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - ((-3) \cdot 4) = 10 - (-12) = 10 + 12 = 22.$$

Un determinant de **ordin 3** se calculează folosind fie regula lui **Sarrus**, fie **regula triunghiului**.

Pentru a calcula valoarea determinantului folosind regula lui Sarrus se copiază linia 1 şi apoi linia 2 sub linia 3 a determinantului şi se efectuează calculele astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{13}$$

Ultimul membru al egalităţii de mai sus exprimă regula triunghiului. Termenii cu semnul + în faţă se obţin efectuând produsele elementelor de aceeaşi culoare din:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}$$

iar termenii cu semnul - se obţin efectuând la fel produsele elementelor de aceeaşi culoare din:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}$$

O matrice pătratică A al cărei determinant este zero se numeşte **matrice singulară**. Dacă determinantul este diferit de zero, matricea se numeşte **matrice nesingulară**.

Calculul determinanţilor de ordin mai mare decât 3

- Se bazează pe noţiunea de minor al unui element.

Definiţia 1.2.1 *Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice pătratică, $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$. Fiecărui element $a_{k\ell}$ din matrice i se asociază un determinant de ordin $n-1$ notat $M_{k\ell}$, obţinut prin eliminarea liniei k şi coloanei ℓ din det(A). Determinantul $M_{k\ell}$ se numeşte minorul elementului a_{kl}.*

Exemplul 5. Constituirea minorului M_{23} în determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & a_{14} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & \mathbf{a_{43}} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Ştiind să calculăm un determinant de ordin 3, un determinant de ordin 4 se calculează dezvoltându-l după o linie i (sau o coloană j) astfel:

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3} + a_{i4}(-1)^{i+4}M_{i4},$$

Exemplul 6. Să dezvoltăm următorul determinant după elementele liniei 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ 3 & 7 & -9 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{0(-1)^{3+1}M_{31}}_{=0} - 6(-1)^{3+2}M_{32} + 1(-1)^{3+3}M_{33} - 2(-1)^{3+4}M_{34} =$$

$$6\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -9 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

1.3 Proprietăţi ale determinanţilor

Fie D determinantul unei matrici pătratice de n linii şi n coloane. Notăm cu L_i, L_j două linii distincte ale determinantului.

Proprietăţile determinanţilor

1. Dacă se schimbă două linii între ele, atunci determinantul schimbă semnul.

Simbolizăm prin $L_i \leftrightarrow L_j$ schimbarea liniilor i şi j între ele.

Exemplul 7. Fie determinantul

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

Efectuând schimbarea $L_2 \leftrightarrow L_3$ obţinem determinantul

$$D' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -2 = -D$$

2. Dacă se înmulţeste o linie a unui determinant cu un număr, atunci valoarea determinantului se înmulţeste cu numărul respectiv.

De exemplu în determinantul D, de mai sus, înmulţim linia 2 cu 3 şi rezultatul îl rescriem în linia 2 a unui nou determinant D'' şi obţinem:

$$D'' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-4) \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 9 & 3 & -12 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3D = 6$$

3. Dacă se înmulţeste o linie a determinantului cu un număr şi se adună la o altă linie, valoarea determinantului nu se schimbă.

În determinantul D de mai sus, înmulţim linia 1 cu 3 şi o adunăm la linia 2, rezultatul fiind înregistrat în linia 2, $3L_1 + L_2 \to L_2$, şi avem:

$$D''' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = D = 2$$

4. Determinantul transpusei unei matrice este egal cu determinantul matricii:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Datorita acestei proprietăţi şi pentru că liniile matricii A^T sunt coloane în matricea A, rezultă că proprietăţile **1-3** enunţate pentru linii ale determinantului sunt valabile şi pentru coloane.

5 Daca A, B sunt două matrici pătratice de n linii şi n coloane , atunci determinantul produsului lor este egal cu produsul determinanţilor:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Proprietăţi ale determinanţilor sunt foarte utile în calculul determinanţilor de ordin mai mare decat 3, pentru care nu avem o regula ca Sarrus sau regula triunghiului, ci se dezvoltă determinantul după elementele unei linii sau coloane.

Exemplul 8. Pentru a calcula determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

am putea dezvolta după elementele coloanei 1 şi atunci:

$$D = (-1)^{1+1}1 \cdot M_{11} + (-1)^{2+1}3M_{12} + (-1)^{1+3}2M_{13} + (-1)^{1+4} \cdot 1M_{14}$$

Deci practic am reduce calculul lui D la calculul a 4 determinanţi de ordinul trei, $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}$, ceea ce ar presupune calcule multe. Pentru a evita calculul celor 4 determinaţi de ordinul 3, aplicăm proprietatea 3 a determinanţilor pentru a transforma elementele coloanei 1, de sub $a_{11} = 1$ în zerouri.

Observăm că aplicând succesiv operaţiile:

$$-3L_1 + L_2 \to L_2, \quad -2L_1 + L_3 \to L_3, \quad -1L_1 + L_4 \to L_4$$

obţinem aceeaşi valoare a determinantului şi anume:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -10 & 7 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -10 & 7 & 8 \\ -5 & 1 & 7 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot M_{13} + (-1)^{1+4} \cdot 0 \cdot M_{14}$$

Deci practic am redus calculul determinantului de ordin 4 la calculul unui singur determinant de ordin 3.

Observaţie: Operaţiile asupra liniilor unui determinant se pot alege şi pentru a transforma în zerouri elementele altei coloane nu neapărat coloana 1. De exemplu pentru determinantul D cu care am lucrat era mai simplu dacă în coloana 3 formam zerouri în liniile 1,2 şi 4, efectuând operaţiile:

$$-7L_3 + L_2 \to L_2, \quad -4L_3 + L_4 \to L_4$$

şi obţineam:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ -11 & -8 & 0 & -19 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -7 & -6 & 0 & -11 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -11 & -8 & -19 \\ -7 & -6 & -11 \end{vmatrix}$$

1.4 Calculul inversei unei matrici nesingulare

O matrice nesingulară, este o matrice pătratică având determinatul diferit de zero. Dacă determinantul este egal cu zero, spunem că matricea este singulară.

Orice matrice nesingulară, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, este inversabilă, adică există o matrice notată $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu proprietatea că:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

unde I_n este matricea unitate, adică matricea:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Etapele de calcul a inversei unei matrici A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

• se calculează determinantul matricii; dacă $\det(A) = 0$ matricea nu este inversabilă. În caz contrar se trece la etapa următoare;

• se determină transpusa matricii A,

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

• se calculează adjuncta matricii A, adică matricea pătratică notată A^*, de elemente $a^*_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, unde M_{ij} este minorul elementului din poziţia (i, j) a transpusei;

• $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A^*$

Exemplul 9. Să se verifice dacă matricea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

este nesingulară şi dacă da, să se calculeze inversa ei.

• $\det(A) = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow A$ este nesingulară

- $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$
- $A^* = \begin{bmatrix} 19 & 3 & 12 \\ 11 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
- $A^{-1} = -1A^* = \begin{bmatrix} -19 & -3 & -12 \\ -11 & -2 & -7 \\ -6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$