Cursul 3

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare şi omogene. Forma scară a unei matrici

3.1 Analiza şi rezolvarea sistemelor de ecuaţii omogene

Un sistem omogen de ecuaţii liniare:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

admite întotdeauna soluţia banală $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Prin urmare când analizăm mulţimea soluţiilor unui astfel de sistem, trebuie să decidem dacă sistemul admite doar soluţia banală sau şi soluţii nebanale.

• În cazul în care numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute şi determinantul matricii sistemului este diferit de zero, atunci sistemul având o soluţie unică, rezultă că el admite doar soluţia banală.

Exemplul 1. Să se determine mulţimea soluţiilor sistemului:

$$\begin{array}{rcl} x + 6y & = & 0 \\ -3x + y & = & 0 \end{array}$$

Matricea sistemului este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18 = 19 \neq 0$$

Determinantul fiind diferit de zero, sistemul are o unică soluţie, care este soluţia banală. Observăm câ în acest caz nu e necesar să aplicăm regula lui Cramer, pentru că ştim deja că sistemul fiind omogen admite soluţia banală, şi admiţând o soluţie unică, aceasta este $x = y = 0$.

Dacă am aplica totuşi regula lui Cramer, am obţine acelaşi rezultat, dar am efectua calcule inutile:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

Exemplul 2. Să se determine mulţimea soluţiilor sistemului:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ -x + 4y - z &= 0 \end{aligned}$$

Matricea sistemului A respectiv matricea prelungită $\overline{A}$ este:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Pentru orice sistem omogen rangul matricii A coincide cu rangul matricii prelungite, deoarece coloana ce se adaugă matricii A este formată din zerouri. De aceea în problemele pe care le rezolvaţi în continuare nu mai ataşaţi şi matricea prelungită, pentru că este inutil.

Rangul matricii A este 2 şi un determinant principal este $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$ Astfel necunoscutele principale sunt x, y, iar $z = \alpha$ este necunoscută secundară. Rezolvăm astfel primele două ecuaţii în raport cu necunoscutele principale, x, y, în funcţie de necunoscuta secundară, α:

$$\begin{aligned} 2x - y &= -3\alpha \\ -x + 4y &= \alpha \end{aligned}$$

Rezolvând obţinem mulţimea soluţiilor:

$$(x = -\frac{\alpha}{7}, y = -\frac{11\alpha}{7}, z = \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}$$

Pentru fiecare valoare particulară a lui α obţinem o altă soluţie. Dacă $\alpha = 0$ obţinem soluţia banală $x = y = z = 0$.

3.2 Rezolvarea unui sistem de formă triunghiulară

Metodele de studiu a compatibilităţii/incompatibilitătii unui sistem de m ecuaţii algebrice cu n necunoscute:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

se pretează doar pentru m şi n cel mult egale cu 4. Cum în problemele economice/inginereşti apar sisteme de multe ecuaţii şi necunoscute prezentăm o modalitate mai simplă atât pentru rezolvarea manuală cât şi prin metode numerice implementate în pachete software.

Ideea de bază în metoda ce o prezentăm se bazează pe observaţia că cel mai simplu se rezolvă un sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute de formă superior triunghiulară, adică de forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_{22} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{3.3}$$

unde coeficienţii $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$. Matricea unui astfel de sistem se numeşte **matrice superior triunghiulară**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Un sistem triunghiular este compatibil determinat, deoarece determinantul $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$ şi se rezolvă prin **metoda substituţiei inverse**, adică se rezolvă succesiv ecuaţiile $n, n-1, \ldots, 2, 1$. Din ultima ecuaţie se calculează $x_n = b_n/a_{nn}$, care se introduce în ecuaţia $n-1$, ce se rezolvă apoi în raport cu x_{n-1}, şi aşa mai departe, până ajungem la rezolvarea ecuaţiei 1.

Exemplul 3. Sistemul:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1 \\ y - 5z &= 2 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

Are matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Toate elementele de pe diagonala principală sunt diferite de zero, deci este sistem superior triunghiular. Rezolvăm pornind de la ultima ecuaţie, spre prima: $z = -2$, se înlocuieşte în ecuaţia a doua şi avem: $y = 5(-2) + 2 = -8$. Înlocuind acum pe z şi y aflaţi, în prima ecuaţie îl determinăm pe x:

$$2x = 3(-8) - (-2) - 1 = -24 + 2 - 1 = -23, \quad \Rightarrow \quad x = -23/2$$

Avem deci următorul

Algoritm de rezolvare a unui sistem în forma triunghiulară

• se calculează $x_n = b_n/a_{nn}$;
• pentru i descrescând de la $n-1$ la 1, calculează:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \cdots - a_{in}x_n)$$

3.3 Sisteme de ecuaţii echivalente. Transformarea unui sistem într-unul echivalent cu el

În sistemul general:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

notăm cu Ec_i a i-a ecuaţie din cele m:

$$\text{Ec}_i : \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

Definiţia 3.3.1 *Două sisteme de m ecuaţii liniare cu n necunoscute se numesc echivalente dacă au aceeaşi mulţime a soluţiilor (adică fie sunt ambele incompatibile, fie ambele sunt compatibile şi au exact aceleaşi soluţii).*

Să evidenţiem în continuare ce transformări pot fi aplicate ecuaţiilor sistemului (3.5), care să conducă la un sistem echivalent cu sistemul iniţial. Pentru aceasta notăm cu Ec_i ecuaţia a i-a din sistem, i.e.:

$$\text{Ec}_i : \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

Suma a două ecuaţii distincte Ec_i, Ec_j revine la a aduna membru cu membru (adică membrul stâng al uneia la membrul stâng al celei de-a doua şi la fel pentru membrii drepţi). Produsul cu un număr (real sau complex) nenul al ecuaţiei Ec_i, αEc_i, revine la a înmulţi fiecare membru al ecuaţiei cu $\alpha \neq 0$.

Următoarele trei transformări aplicate asupra unui sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute simbolizat prin ecuaţiile sale:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \text{Ec}_1 \\ \text{Ec}_2 \\ \vdots \\ \text{Ec}_m \end{cases}$$

conduc la un sistem $\mathcal{S}'$ echivalent cu acesta:

1. Schimbarea ecuaţiilor i şi j între ele, $Ec_i \leftrightarrow E_j$:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \text{Ec}_1 \\ \vdots \\ \text{Ec}_i \\ \vdots \\ \text{Ec}_j \\ \vdots \\ \text{Ec}_m \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{S}' = \begin{cases} \text{Ec}_1 \\ \vdots \\ \text{Ec}_j \\ \vdots \\ \text{Ec}_i \\ \vdots \\ \text{Ec}_m \end{cases}$$

2. Produsul unei ecuaţii cu un număr nenul, $\alpha \neq 0$, $\alpha Ec_i \to Ec_i$:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \text{Ec}_1 \\ \vdots \\ \text{Ec}_i \\ \vdots \\ \text{Ec}_m \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{S}' = \begin{cases} \text{Ec}_1 \\ \vdots \\ \alpha\text{Ec}_i \\ \vdots \\ \text{Ec}_m \end{cases}$$

3. Adunarea la ecuaţia j a ecuaţiei i înmulţită cu un număr nenul, $\alpha Ec_i + Ec_j \to Ec_j$:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \text{Ec}_1 \\ \vdots \\ \text{Ec}_i \\ \vdots \\ \text{Ec}_j \\ \vdots \\ \text{Ec}_m \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{S}' = \begin{cases} \text{Ec}_1 \\ \vdots \\ \text{Ec}_i \\ \vdots \\ \text{Ec}_j + \alpha\text{Ec}_i \\ \vdots \\ \text{Ec}_m \end{cases}$$

Aplicând succesiv astfel de transformări ale ecuaţiilor unui sistem de m ecuaţii cu n necunoscute obţinem un nou sistem care are aceeaşi mulţime a soluţiilor, dar forma matricii sistemului este mai simplă (conţine multe zerouri). Ca exemplu aplicâm o succesiune de schimbări a ecuaţiilor unui sistem liniar de trei ecuaţii cu trei necunoscute, compatibil determinat, care să transforme matricea sistemului în forma triunghiulară, şi anume, sistemul:

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= 0 \\ -2x + y + 3z &= -7 \\ x + 2y - 2z &= 7 \end{aligned}$$

Ideea de bază constă în a alege transformări adecvate care să conducă la un sistem cu matrice triunghiulară, adică un sistem în care ecuaţia 2 are coeficientul lui x egal cu zero, iar în ecuaţia 3, coeficientul lui x şi y este zero:

- Schimbăm ecuaţiile 1 şi 3 între ele, $\text{Ec}_1 \leftrightarrow \text{Ec}_3$:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 7 \\ -2x + y + 3z &= -7 \\ 3x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

- Înmulţim ecuaţia 1 cu 2 şi o adunăm la a doua, $2\text{Ec}_1 + \text{Ec}_2 \to Ec_2$:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 7 \\ 5y - z &= 7 \\ 3x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

- Înmulţim ecuaţia 1 cu -3 şi o adunăm la a treia, $-3\text{Ec}_1 + \text{Ec}_3 \to Ec_3$:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 7 \\ 5y - z &= 7 \\ -7y + 7z &= -21 \end{aligned}$$

- Înmulţim ecuaţia 3 cu $1/7$, $\text{Ec}_3/7 \to Ec_3$:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 7 \\ 5y - z &= 7 \\ -y + z &= -3 \end{aligned}$$

- Schimbăm înte ele ecuaţiile 2 şi 3, $\text{Ec}_2 \leftrightarrow \text{Ec}_3$:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 7 \\ -y + z &= -3 \\ 5y - z &= 7 \end{aligned}$$

- Înmulţim ecuaţia 2 cu 5 şi o adunăm la 3, $-5\text{Ec}_2 + \text{Ec}_3 \to Ec_3$:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 7 \\ -y + z &= -3 \\ 4z &= -8 \end{aligned}$$

Deci sistemul a fost adus la forma triunghiulară (elementele de pe diagonala principală sunt nenule!). Pentru a obţine soluţia sistemului, rezolvăm ecuaţia a treia, şi obţinem: $z = -2$, apoi $-y = 2 - 3 = -1$, deci $y = 1$, şi în final $x + 2 + 4 = 7$, conduce la $x = 1$. Deci unica soluţie este $(x, y, z) = (1, 1, -2)$.

Această metodă de reducere a sistemului la forma triunghiulară se numeşte **metoda eliminării a lui Gauss**.

Pprezentăm în continuare o modalitate de a transforma un sistem de m ecuaţii liniare, cu n necunoscute, de forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}, a_{ij} \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

într-un sistem mai simplu, care are aceeaşi mulţime a soluţiilor ca sistemul iniţial, dar datorită simplităţii putem să decidem mai rapid dacă este compatibil sau nu şi dacă da să determinăm mulţimea soluţiilor.

Sistemului (3.5) i se asociază matricea A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şi matricea prelungită, $\overline{A}$, obţinută prin bordarea matricii A cu coloana termenilor liberi:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Cele trei transformări elementare aplicate ecuaţiilor arbitrare din sistem:

$$\begin{array}{rl} Ec_i: & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ Ec_j: & a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \end{array}$$

practic acţionează identic asupra liniilor i şi j din matricea prelungită a sistemului, $\overline{A} = [A|b]$. Notăm cu L_i o linie a acestei matrici, $i = \overline{1, m}$. Astfel avem următoarele transformări elementare pe linie asupra matricii prelungite $\overline{A}$ şi implicit asupra matricii A, care nu afectează mulţimea soluţiilor sistemului căruia i s-au asociat aceste matrici:

1: Schimbarea a două linii între ele $L_i \leftrightarrow L_j$;

2. Înmulţirea unie linii L_i cu un număr real nenul, α ;

3. Adunarea unei linii înmulţită cu un număr nenul la altă linie: $\alpha L_i + L_j \to L_j$.

Aceste trei tipuri de transformări ale liniilor unei matrici se numesc **transformări elementare pe linii**.

Asupra matricii $\overline{A}$ se aplicâ un şir de transformări elementare pe linie, care transformă matricea $\overline{A}$ în forma scară, adică o formă în care ”putem marca” o scară în matrice şi sub scară toate elementele sunt 0, iar deasupra ei elementele pot fi nule sau nenule. Matricea obţinută are acelaşi rang ca şi matricea $\overline{A}$, dar rangul se deduce imediat din forma scară.

Definiţia 3.3.2 *O matrice $S \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ are forma scară pe linii dacă verifică următoarele două proprietăţi:*

1. *Dacă o linie i din matricea S are toate elementele 0, atunci şi liniile de sub ea, $i+1\dots, m$ au toate elementele zero.*

2. *Dacă primul element nenul dintr-o linie i a lui S este s_{ij}, atunci în coloanele $1, 2, \dots, j$ toate elementele din liniile $i+1, i+2, \dots, m$ sunt zero.*

Matricea următoare ilustrează particularităţile din definiţie. Elementele notate prin $\bigstar$ simbolizează elemente nenule. Elementele $*$ pot fi nule sau nenule.

$$S = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \bigstar & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bigstar & * & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bigstar & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \bigstar & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \tag{3.6}$$

Zerourile colorate în albastru ilustrează proprietatea a doua din definiţie, adică deoarece primul element nenul din linia 2 este $s_{23} := \bigstar$, toate elementele de intersecţie dintre coloanele 1,2,3 şi liniile $3, 4, 5$ sunt $\mathbf{0}$.

Un caz particular de matrice în forma scară pe linie este matricea pătratică superior triunghiulară. Următoarele matrici au forma scară pe linii:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Definiţia 3.3.3 *Primul element nenul de pe fiecare linie a unei matrici în forma scară se numeşte* **pivot** *(în 3.6 pivotul este notat $\bigstar$).*

Numărul de pivoţi din forma scară, S_A, a unei matrici A este egal cu rangul matricii A.

Definiţia 3.3.4 *Două matrici A, A', de acelaşi tip $m \times n$, se numesc matrici echivalente pe linie, dacă A' s-a obţinut din A printr-un şir de transformări elementare pe linie.*

Două matrici echivalente pe linie au acelaşi rang. În particular o matrice A şi forma sa scară S_A au acelaşi rang şi rangul este egal cu numărul de pivoţi din forma scară.

Deci:

Transformările elementare pe linie nu modifică rangul matricii sistemului, nici rangul matricii prelungite.

În concluzie, având un sistem de m ecuaţii cu n necunoscute, $Ax = b$, pentru a vedea dacă este compatibil sau nu şi dacă da să determinăm mulţimea soluţiilor procedăm astfel:

• Asociem sistemului $Ax = b$ matricea prelungită:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

• Prin transformări elementare pe linie se aduce matricea $\overline{A}$, deci şi A, la forma scară:

$$S_{\overline{A}} = \left[\begin{array}{c|c} & t_1 \\ S_A & t_2 \\ & \vdots \\ & t_m \end{array}\right] \tag{3.7}$$

• Astfel sistemul iniţial $Ax = b$ este echivalent (are aceeaşi mulţime a soluţiilor) cu sistemul $S_A x = t$, unde t notează ultima coloană din matricea $S_{\overline{A}}$.

• Dacă numărul de pivoţi din S_A este egal cu numărul de pivoţi din $S_{\overline{A}}$, atunci rang(A)=rang($\overline{A}$) şi conform teoremei Kronecker–Capelli, sistemul $Ax = b$ este compatibil, iar dacă numărul de pivoţi în cele două matrici nu este acelaşi atunci sistemul este incompatibil.

• Dacă sistemul este compatibil, în loc sa-l rezolvăm pe acesta, rezolvăm sistemul mai simplu $S_A x = t$, alegând drept determinat principal, determinnatul ce conţine elementele de intersecţie ale liniilor şi coloanelor pivoţilor.

Exemplul 4. Fie sistemul de 4 ecuaţii cu 5 necunoscute, dat în forma matricială:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Matricea sa prelungită este:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 & 9 \end{array}\right]$$

Elementul $\overline{A}_{11} = 1 \neq 0$, deci îl alegem ca pivot pentru linia 1 şi apoi prin transformări elementare pe linie formăm zerouri sub pivot. Aplicând succesiv transformările $-2L_1 + L_2 \to L_2$, $-L_1 + L_3 \to L_3$ şi $-2L_1 + L_4 \to L_4$ obţinem:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Să alegem pivotul pentru linia 2 (primul element nenul de pe linia 2 din viitoarea formă scară). Observăm că în poziţia $(2,2)$ avem 0. Nici liniile i de sub linia 2 nu au în poziţia $(i,2)$ element nenul, ca să efectuăm o schimbare de linii $L_2 \leftrightarrow L_i$. Prin urmare alegem pivotul ca fiind din poziţia $(2,3)$. Efectuăm apoi transformările elementare $L_2 + L_3 \to L_3$, $-1L_2 + L4 \to L_4$ pentru a anula toţi coeficienţii de sub elementul din poziţia $(2,3)$, adică coeficienţii din poziţiile $(i,3)$, $i > 2$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

Deoarece linia 3 conţine doar elemente nule, schimbând linia 3 cu linia 4 obţinem o matrice care este deja în forma scară:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Observaţia 3.3.1 *Observăm că în urma şirului de transformări am obţinut simultan forma scară a matricii A a sistemului şi a matricii prelungite.*

Şirul de transformări elementare pe linii a transformat sistemul iniţial, de matrice A, şi termeni liberi $b_1 = 5, b_2 = 6, b_3 = 9, b_4 = 9$ într-un sistem echivalent (adică sistem ce are aceleaşi soluţii ca sistemul $Ax = b$): şi sistemul echivalent $S_A x = t$ (termenii liberi sunt elementele de pe ultima coloană a matricii $S_{\overline{A}}$, $t_1 = 5, t_2 = -2, t_3 = 1$), care în forma matricială este:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sau efectuând înmulţirile:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 5 \\ -x_3 - x_4 - x_5 &= -2 \\ x_5 &= 1 \end{aligned}$$

În loc să analizăm compatibilitatea sistemului ”complicat” $Ax = b$, analizăm acum compatibilitatea sistemului echivalent $S_A x = t$, unde

$$t = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matricea:

$$S_A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

are 3 pivoţi, deci rangul matricii S_A şi al lui A este 3. Matricea:

$$S_{\overline{A}} = \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

are tot 3 pivoţi, deci rangul ei şi al matricii $\overline{A}$ este 3. Conform teoremei Kronecker–Capelli, sistemele echivalente $Ax = b$ şi $S_A x = t$ sunt compatibile şi au aceeaşi multime a soluţiilor. În loc să rezolvăm sistemul iniţial $Ax = b$ rezolvăm sistemul mai simplu $S_A x = t$.

Deoarece pivoţii în S_A sunt plasaţi în liniile $1, 2, 3$ şi respectiv coloanele $1, 3, 5$ alegem determinatul principal ce conţine elementele de intersecţie a liniilor $1, 2, 3$ cu coloanele $1, 3, 5$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 3 = -6 \neq 0$$

Cu această alegere a determinantului principal, x_1, x_3, x_5 sunt necunoscute principale, iar $\alpha := x_2, \beta = x_4$ sunt necunoscute secundare.

Rezolvând sistemul:

$$\begin{aligned} x_1 + 2\alpha + x_3 + 3\beta + 3x_5 &= 5 \\ -x_3 - \beta - x_5 &= -2 \\ x_5 &= 1 \end{aligned}$$

în raport cu necunoscutele principale avem: $x_5 = 1$, $x_3 = 2 - \beta - 1 = 1 - \beta$, $x_1 = 5 - 2\alpha - (1 - \beta) - 3\beta - 3 = 1 - 2\alpha - 2\beta$. Deci mulţimea soluţiilor este:

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 - 2\alpha - 2\beta, \alpha, 1 - \beta, \beta, 1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Exemplul 5. Să se studieze compatibilitatea/incompatibilitatea sistemului $Ax = b$ ce are matricea prelungită $\overline{A} = [A|b]$:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -8 & 6 & 7 & -5 \end{array}\right]$$

Deci termenii liberi ai sistemului sunt $b_1 = -11, b_2 = 3, b_3 = -5$.

Pentru a efectua calcule mai simple efectuăm transformarea $L_1 \leftrightarrow L_2$ şi obţinem matricea echivalentă (adică de acelasi rang ca şi $\overline{A}$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 4 & -8 & 6 & 7 & -5 \end{array}\right]$$

Efectuând apoi transformările: $2L_1 + L_2 \to L_2$, $-4L_1 + L_3 \to L_3$ ajungem la:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -17 \end{array}\right]$$

În sfârşit, efectuând asupra acestei matrici transformarea $-3L_2 + L_3 \to L_3$ obţinem forma scară a matricii prelungite şi evident şi a matricii A:

$$A_{\overline{A}} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Astfel sistemul iniţial este echivalent cu sistemul $S_A x = t$, unde:

$$S_A = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad t = \left[\begin{array}{r} 3 \\ -5 \\ -2 \end{array}\right]$$

Matricea S_A are 2 pivoţi $s_{11} = 1, s_{23} = 2$, în timp ce matricea $S_{\overline{A}}$ are 3 pivoţi: $s_{11} = 1, s_{23} = 2, s_{35} = -2$. Astfel S_A şi $S_{\overline{A}}$ au ranguri diferite, deci sistemul $S_A x = u$ este incompatibil şi la fel sistemul iniţial $Ax = b$.

Observaţia 3.3.2 *Datorită flexibilităţii în alegerea transformărilor elementare pe linie în reducerea unei matrici A la forma scară, S, elementele matricii S nu sunt unic determinate de A. Se poate demonstra însă că numărul şi poziţia pivoţilor în S sunt unic determinate de elementele matricii A. Cu alte cuvinte, atunci când două persoane diferite efectuează transformări elementare distincte asupra matricii A pentru a obţine formele scară S_1, S_2, cele două forme scară au acelaşi număr de pivoţi şi aceştia sunt situaţi în aceeaşi poziţie (i, j).*

largeAnaliza şi rezolvarea sistemelor omogene folosind reducerea la forma scară Având un sistem liniar şi omogen:

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{kn} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]$$

matricea prelungită a sistemului este: matricea prelungită este:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right]$$

Prin transformări elementare pe linie, coloana ultimă de zerouri rămâne tot coloană de zerouri astfel că forma scară a matricii prelungite este:

$$S_{\overline{A}} = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ S_A & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right]$$

Prin urmare sistemul liniar şi omogen, $Ax = 0$, este echivalent cu sistemul liniar şi omogen $S_A x = 0$.

3.4 Forma scară redusa a unei matrici

Metoda transformărilor elementare pe linie, numită şi metoda eliminării a lui Gauss, poate fi rafinată, prin *metoda Gauss-Jordan*. Şi anume, metoda Gauss-Jordan are în plus două caracteristici:

1. În fiecare etapă, elementul pivot este forţat să devină 1. Mai precis dacă s-a fixat pivotul pe linia i ca fiind $a_{ij} \neq 0$, atunci transformarea $L_i/a_{ij} \to L_i$ conduce la pivot 1.

2. Pe lângă zerouri sub pivot, se creează, prin transformări elementare pe linie, zerouri şi deasupra pivotului, în coloana acestuia.

O matrice scară obţinută prin metoda Gauss-Jordan din matricea A se numeşte *matrice în forma scară redusă* şi se notează S_A^0.

Exemplul 6. Matrici scară în forma redusă:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Observaţia 3.4.1 *Se poate demonstra că forma scară redusă a unei matrici este unică, adică indiferent de transformările elementare pe linie aplicate obţinem aceeaşi matrice redusă.*

Să ilustrăm câteva avantaje ale reducerii matricii unui sistem de ecuaţii liniare la forma scară redusă. Aplicand metoda Gauss–Jordan de reducere a unui sistem liniar şi neomogen de n ecuaţii cu n necunoscute, compatibil determinat:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow Ax = b,$$

obţinem la sfârşitul procedurii, aplicată matricii prelungite a sistemului:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right],$$

matricea echivalentă cu ea:

$$S^0_{\overline{A}} = [A'|\mathbf{s}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_n \end{array}\right] = [I_n|\mathbf{s}] \tag{3.8}$$

Motivul pentru care forma scară redusă a matricii prelungite arată astfel este că rangul matricii A este n (sistemul fiind compatibil determinat) şi deci forma scară redusă are n pivoţi, adică n de 1 pe diagonala principală şi 0 deasupra şi dedesubtul pivoţilor.

Sistemul iniţial, $Ax = b$, este echivalent cu sistemul definit de matricea $S^0_{\overline{A}}$ (au aceleaşi soluţii). Şi anume, sistemul echivalent este sistemul de matrice I_n şi coloana termenilor liberi de elemente $s_1, s_2, \dots, s_n$:

$$I_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

Deci soluţia acestui sistem (precum şi a celui iniţial) este:

$$\begin{array}{c} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \vdots \\ x_n = s_n, \end{array} \tag{3.9}$$

Cu alte cuvinte soluţia sistemului este înregistrată în ultima coloană a matricii scară redusă, $S^0_{\overline{A}}$.

Observăm că în deducerea soluţiei din forma scară redusă am pornit de la ipoteza că sistemul este compatibil determinat. În realitate însă nu ştim la începutul procedurii de reducere la forma scară redusă dacă un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute (cu n foarte mare) este sau nu compatibil determinat. Reducând însă matricea prelungită la forma scară redusă, după ultima etapă deducem din analiza matricii reduse dacă sistemul este compatibil sau nu şi dacă da citim soluţia ca mai sus. Şi anume:

• Dacă în forma scară redusă $S^0_{\overline{A}} = [A'|\mathbf{s}]$, matricea A' este matricea unitate, I_n, adică numărul pivoţilor din A' este egal cu n, atunci rezultă că rangul matricii A este n, şi deci sistemul $Ax = b$ este compatibil determinat şi soluţia sistemului se poate citi pe ultima coloană a formei scară redusă $S^0_{\overline{A}}$.;

• Dacă numărul pivoţilor în submatricea formată din primele n coloane ale matricii reduse este mai mic decât n, adică $A' \neq I_n$, sistemul poate fi incompatibil sau compatibil nedeterminat, în funcţie de relaţia dintre rangul acestei matrici şi al matricii prelungite.

Exemplul 7. Considerăm sistemul neomogen de 5 ecuaţii cu 5 necunoscute, având matricea prelungită:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 0 & 5 & 8 & 0 \\ -5 & 3 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Forma sa scară redusă calculată folosind un program de calcul al ei este:

$$\left[\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2332 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1.3578 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.8287 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.3233 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.4301 \end{array}\right]$$

Având 5 pivoţi plasaţi în submatricea formată din primele 5 coloane, rezultă că matricea sistemului are are rangul 5, deci determinantul matricii sistemului este nenul şi sistemul este compatibil determinat, iar soluţia lui este dată de ultima coloană:

$$(x_1 = -0.2332, x_2 = 1.3578, x_3 = -0.8287, x_4 = -0.3233, x_5 = 0.4301)$$

Exemplul 8. Sistemul neomogen de 5 ecuaţii cu 5 necunoscute având matricea prelungită:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 5 & 8 & 19 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 20 & -5 & 3 & -7 \\ -3 & 3 & -15 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 6 & -3 \end{array}\right]$$

are forma scară redusă:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1.6667 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

Observăm că numărul de pivoţi în submatricea formată din primele 5 coloane este 4, deci rangul matricii sistemului este 4 iar rangul matricii prelungite este egal cu numărul de pivoti din forma scară redusă a cesteia, adică 5. Deci sistemul este incompatibil.

Un sistem de 5 ecuatii cu 5 necunoscute a cărui matrice prelungită are forma scară redusă:

$$S_A^0 = \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 11 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

este compatibil nederminat deoarece rangul matricii sistemului coincide cu rangul matricii prelungite, dar acest rang nu este maxim, adică 5.

Pentru a obţine mulţimea soluţiilor sistemului $S_A^0 x = t$, remarcăm că pivoţii matricii A sunt plasaţi în coloanele $1, 2, 3, 5$. Astfel alegem pe x_1, x_2, x_3, x_5 drept necunoscute principale, iar $x_4 = \alpha$ ca necunoscută secundară şi rezolvăm primele 4 ecuaţii în raport cu necunoscutele principale şi în funcţie de necunoscuta secundară α:

$$\begin{array}{lcr} x_1 + 2\alpha & = & 1 \\ x_2 + 11\alpha & = & -5 \\ x_3 - 3\alpha & = & 3 \\ x_5 & = & -4 \end{array}$$

şi obţinem mulţimea soluţiilor: $(x_1 = -2\alpha, x_2 = -5 - 11\alpha, x_3 = 3 + 3\alpha, x_5 = -4)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.