Cursul 9

Planul în şi dreapta în spaţiu

9.1 Sisteme de axe ortogonale în plan şi spaţiu

În plan se consideră sistemul de axe ortogonale Oxy, unde O este un punct fixat. Axa Ox, are direcţia şi sensul vectorului $e_1 = (0, 1)^T$, iar Oy a vectorului $e_2 = (0, 1)^T$. Un punct arbitrar din plan M are coordonatele (x, y) relativ la acest sistem de axe, unde x şi y sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$ în baza canonică.

În spaţiu se consideră axele ortogonale Ox, Oy, Oz, care au respectiv direcţia şi sensul lui $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$.

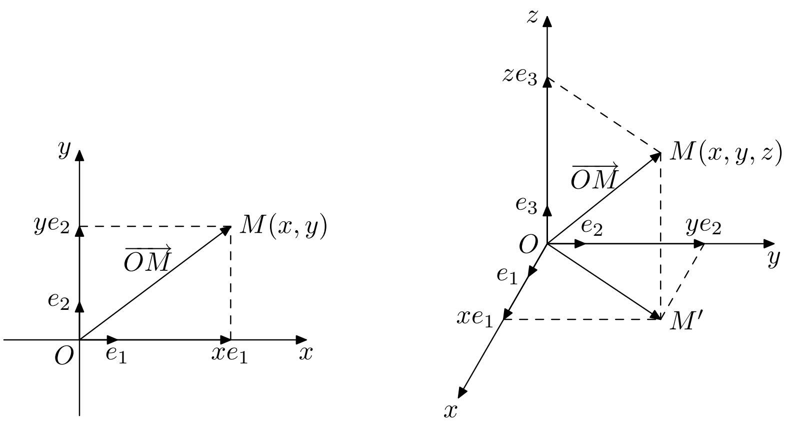


Fig.9.1: Semnificaţia coordonatelor unui punct M din plan raportat la un sistem ortogonal de axe (stânga), respectiv din spaţiul 3D (dreapta).

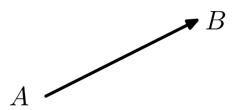
Un punct arbitrar M din spaţiul tridimesnional are coordonatele (x, y, z), definite ca fiind coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$ în baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

În Fig.9.1 sunt ilustrate două sisteme de axe ortogonale, unul în plan (stânga) şi cel de-al doilea în spaţiul tri–dimensional (dreapta).

La orice două puncte $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ (n=2, 3) le asociem vectorul $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} := B - A$$

$(A, B) \longrightarrow \overrightarrow{AB}$

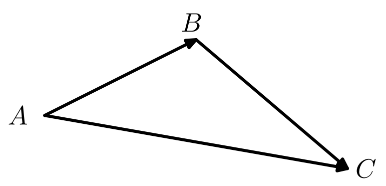


Coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ se obţin scăzând din coordonatele punctului B coordonatele punctului A:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{bmatrix}$$

Proprietăţi ale vectorilor definiţi de câte o pereche de puncte:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\forall\ A, B, C \in \mathcal{P}$ (relaţia lui Chasles);



Aplicând relaţia lui Chasles pentru punctele A, B, C identice (toate notate A), obţinem $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$, adică $\overrightarrow{AA} = \theta \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Relaţia lui Chasles aplicată punctelor A, B, A conduce la $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \theta$, adică $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Cu alte cuvinte, vectorul ce are punctul de aplicaţie, A, şi extremitatea libera, tot A este vectorul nul.

Vectorul $\overrightarrow{BA}$ este opusul vectorului $\overrightarrow{AB}$.

Relaţia Chasles se extinde la un număr finit de puncte:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{m-1}A_m} = \overrightarrow{A_1A_m}$$

Exemplul 1. În $\mathbb{R}^3$ se dau punctele $A(1, 2-3)$, $B = (-4, 1, 0)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$.

Conform definiţiei $\overrightarrow{AB} = B - A = (-4-1,\ 1-2,\ 0-(-3))^T = (-5, -2, 3)^T$.

Definim distanţa dintre două puncte A, B ca fiind norma vectorului $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Dacă $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, atunci vectorul $\overrightarrow{AB}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)^T$ şi deci distanţa dintre două puncte A, B este:

$$\begin{aligned} d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

Două puncte A, B determină un segment, notat $[A, B]$.

Mijlocul segmentului $[A, B]$ este punctul M cu proprietatea că $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Dacă $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, atunci din relaţia $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ rezultă aceeaşi relaţie între coordonatele din poziţia i a vectorilor $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}$, adică:

$$x_i - a_i = b_i - x_i, \quad \Leftrightarrow \quad 2x_i = a_i + b_i \quad \Leftrightarrow x_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad \forall\, i = \overline{1, n}$$

Prin urmare *coordonatele mijlocului unui segment sunt egale cu media aritmetică a coordonatelor corespunzătoare ale extremităţilor segmentului.*

Exemplul 2. În $\mathbb{R}^3$ se dau punctele $A(-1, 2, 4)$, $B(3, 0, -5)$, $C(1, -7, 2)$.

a) Să se calculeze distanţa de la A la mijlocul segmentului $[B, C]$.

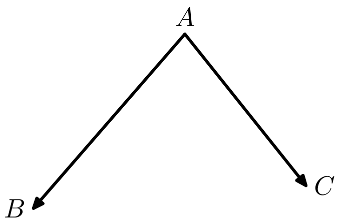
b) Să se calculeze cosinusul unghiului $\widehat{BAC}$

a) Fie $M(x, y, z)$ mijlocul segmentului $[B, C]$. Coordonatele sale sunt:

$$x = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y = \frac{0-7}{2} = -3.5, \quad z = \frac{-5+2}{2} = -1.5$$

Distanţa $d(A, M) = \sqrt{((-1-2)^2 + (2+3.5)^2 + (4+1.5)^2} = \sqrt{9 + 5.5^2 + 5.5^2}$
$= \sqrt{9 + 60.5} = 8.34$.

b) Unghiul $\widehat{BAC}$ este unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.



$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -2, -9)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -9, -2)$. Astfel:

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\, \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{8 + 18 + 18}{\sqrt{16+4+81}\sqrt{4+81+4}} = \frac{44}{\sqrt{101+89}} = \frac{44}{\sqrt{190}}$$

9.2 Planul în spaţiu

În continuare notăm cu $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$ (notaţie consacrată în geometria analitică). Considerăm spaţiul $\mathbb{R}^3$ raportat la sistemul de axe ortogonale, Ox, Oy, Oz. Un punct din spaţiu raportat la acest sistem de axe are coordonatele (x, y, z).

Reamintim că dacă $v(x_1, x_2, x_3), w(y_1, y_2, y_3)$ sunt doi vectori din $\mathbb{R}^3$, atunci produsul lor vectorial este un vector notat, $v \times w \in \mathbb{R}^3$, şi coordonatele sale în baza canonică $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ se determină din dezvoltarea după prima linie a determinantului:

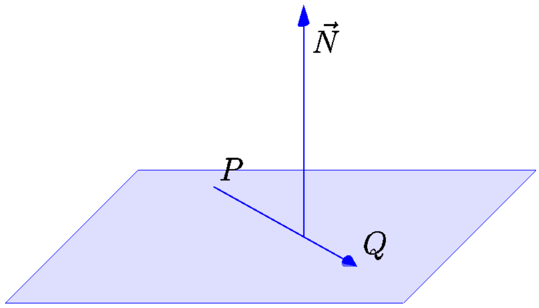
$$v \times w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \tag{9.1}$$

Vectorul $v \times w$ este ortogonal şi pe v şi pe w:

$$v \times w \perp v, \quad v \times w \perp w$$

.

Dacă π este un plan, numim **normala la plan** un vector $\overrightarrow{N} \in \mathbb{R}^3$ cu proprietatea că oricare ar fi două puncte $P, Q \in \pi$ în plan, vectorul $\overrightarrow{N}$ este ortogonal pe $\overrightarrow{PQ}$.



9.3 Planul determinat de un punct şi normala la plan

Fie $M(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat şi $\overrightarrow{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ un vector fixat. Planul ce conţine punctul M_0 şi are normala $\overrightarrow{N}$ este format din mulţimea punctelor M din spaţiu cu proprietatea că vectorul $\overrightarrow{N}$ este perpendicular pe $\overrightarrow{M_0M}$, adică produsul scalar $<\overrightarrow{N}, \overrightarrow{M_0M}>= 0$:

$$\pi = \{M(x, y, z) \,|\, <\overrightarrow{N}, \overrightarrow{M_0M}>= 0\} \tag{9.2}$$

Dar vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ are coordonatele: $\overrightarrow{M_0M} = M - M_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$. Astfel produsul scalar $<\overrightarrow{N}, \overrightarrow{M_0M}>= 0$ este echivalent cu $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. **Ecuaţia:**

$$\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \tag{9.3}$$

este ecuaţia planului ce conţine punctul $\mathbf{M_0(x_0, y_0, z_0)}$ şi are normala $\overrightarrow{N} = \mathbf{Ai + Bj + Ck}$.

Exemplul 3. Să se scrie ecuaţia planului ce trece prin $M_0(-1, 4, 2)$ şi are normala $\overrightarrow{N} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Ecuaţia cerută este:

$$3(x + 1) - 7(y - 4) + 2(z - 2) = 0$$

Ecuaţia (9.3) este echivalentă cu:

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_{D} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0 \tag{9.4}$$

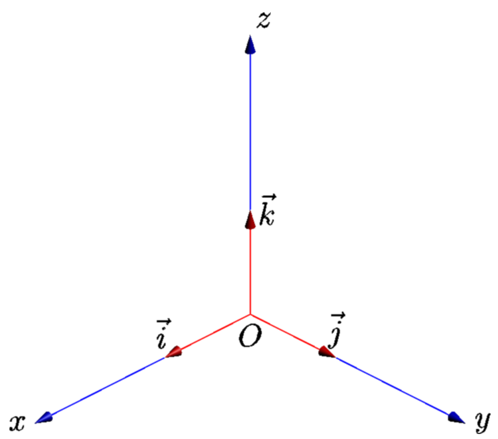
Ecuaţia $\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0}$ se numeşte ecuaţia generală a planului .

Observăm că **coeficienţii lui x, y, z, din ecuaţia generală a planului reprezintă coordonatele normalei la plan**. De exemplu, normala planului de ecuaţie $-2x+5y-3z+11=0$ este $\overrightarrow{N}=-2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

Plane de coordonate în spaţiu

Sistemului de axe ortogonale $xOyz$, ce au direcţiile $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, i se asociază trei plane:

• planul ce trece prin O şi are normala $\mathbf{k}=0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+1\mathbf{k}$ are ecuaţia $0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$, adică $z=0$.



În acest plan toate punctele au coordonata a treia, z, egală cu 0. Numim acest plan, planul xOy.

În mod analog obţine ecuaţia:

• planului yOz: $x=0$;

• planului xOz: $y=0$.

Planele xOy, xOz, yOz se numesc plane de coordonate, deoarece în primul coordonata z este 0, în al doilea coordonata y, iar în al treielea coordonata x.

9.3.1 Plane paralele în spaţiu

Două plane

$$\begin{aligned}\pi_1\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &= 0\\ \pi_2\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &= 0\end{aligned}$$

sunt paralele dacă şi numai dacă normalele lor $\overrightarrow{N}_{\pi_1}=A_1\mathbf{i}+B_1\mathbf{j}+C_1\mathbf{k}$, $\overrightarrow{N}_{\pi_2}=A_2\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+C_2\mathbf{k}$ sunt coliniare $\overrightarrow{N}_{\pi_1}||\overrightarrow{N}_{\pi_2}$, adică există $\lambda\neq 0$ astfel încât $\overrightarrow{N}_{\pi_2}=\lambda\overrightarrow{N}_{\pi_1}$. Relaţia de coliniaritate scrisă pe coordonate revine la:

$$\begin{aligned}A_2 &= \lambda A_1\\ B_2 &= \lambda B_1\\ C_2 &= \lambda C_1\end{aligned}$$

sau echivalent:

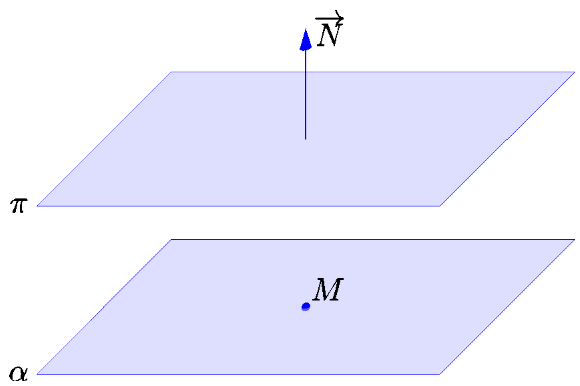
$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}$$

Exemplul 4. Planele

$$\begin{aligned} \pi_1 : -2x + y + 5z - 7 &= 0 \\ \pi_2 : -2x + y + 5z + 10 &= 0 \end{aligned}$$

sunt paralele.

Exemplul 5. Să se scrie ecuaţia planului ce conţine punctul $M(0, 2, -7)$ şi este paralel cu planul $\pi : 4x - 3z + 2 = 0$.



Practic trebuie să scriem ecuaţia planului α ce conţine punctul M şi are aceeaşi normală ca şi planul π, adică $\overrightarrow{N}_\alpha = 4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Deci ecuaţia planului va fi:

$$\alpha : \quad 4(x - 0) + 0(y - 2) - 3(z + 7) = 0, \quad \text{adică} \quad 4x - 3z - 21 = 0$$

Plane paralele cu planele de coordonate.

Două plane ale căror ecuaţii generale diferă doar prin termenul liber, D, sunt plane paralele, deoarece au aceeaşi normală. Astfel putem afirma că orice plan paralel cu:

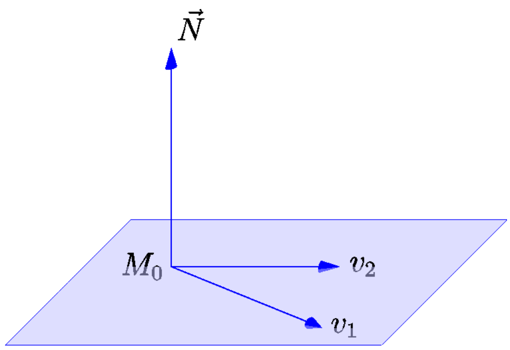
• planul xOy are ecuaţia $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (planul xOy are ecuatia $z = 0$, deci ecuaţia unui plan paralel cu el diferă doar prin termenul liber şi va fi $z = \lambda$) ;

• planul yOz are ecuaţia $x = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

• planul xOz are ecuaţia $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

9.3.2 Planul determinat de un punct şi două direcţii date

Fie M_0 un punct fixat şi $v_1 = l_1\mathbf{i} + m_1\mathbf{j} + n_1\mathbf{k}$, $v_2 = l_2\mathbf{i} + m_2\mathbf{j} + n_2\mathbf{k}$ doi vectori nenuli şi necoliniari. Pentru a determina ecuaţia planului ce conţine punctul M_0 şi direcţiile celor doi vectori, notat $\pi(M_0; v_1, v_2)$, ţinem seama că normala la plan este perpendiculară pe orice vector din plan, deci şi pe v_1, v_2.



Dar un vector simultan perpendicular pe doi vectori daţi este produsul vectorial al celor doi vectori. Deci normala la planul căutat este:

$$\overrightarrow{N} = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}}_{A} \mathbf{i} - \underbrace{\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}}_{B} \mathbf{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}}_{C} \mathbf{k}$$

Prin urmare planul ce conţine punctul M_0 şi direcţiile v_1, v_2 are ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0,$$

adică

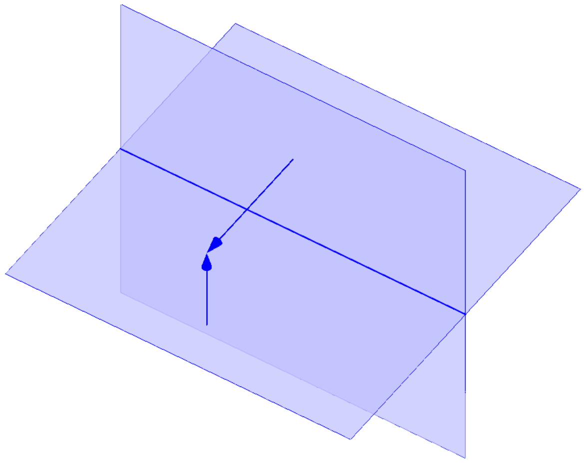
$$\pi(M_0; v_1, v_2) : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{9.5}$$

9.3.3 Plane perpendiculare

Două plane

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ \pi_2 : \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

sunt perpendiculare dacă şi numai dacă normalele lor sunt perpendiculare.



Exemplul 6. Să se arate că planele $\pi_1 : \ -x+2y+3z+1=0$, $\pi_2 : 5x+7y-3z-6=0$ sunt perpendiculare.

Normalele celor două plane sunt respectiv: $\overrightarrow{N}_{\pi_1} = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\overrightarrow{N}_{\pi_2} = 5\mathbf{i}+7\mathbf{j}-3\mathbf{k}$. Produsul lor scalar este: $<\overrightarrow{N}_{\pi_1}, \overrightarrow{N}_{\pi_2}> = -5+14-9=0$. Deci $\overrightarrow{N}_{\pi_1} \perp \overrightarrow{N}_{\pi_2}$.

9.4 Dreapta ce conţine un punct şi are direcţia dată

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct şi $\overrightarrow{d} = l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$ un vector nenul. Dreapta ce trece prin M_0 şi are direcţia $\overrightarrow{d}$ este mulţimea punctelor M cu proprietatea că vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ este coliniar cu vectorul $\overrightarrow{d}$:

$$d = \{M(x,y,z) \,|\, \overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{d}, t \in \mathbb{R}\}^1$$

Să exprimăm analitic relaţia de coliniaritate. $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}$. Condiţia de coliniaritate $\overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{d}$ scrisă pe coordonate conduce la:

$$\begin{aligned} x-x_0 &= t\,l \\ y-y_0 &= t\,m \\ z-z_0 &= t\,n \end{aligned} \tag{9.6}$$

cea ce este echivalent cu:

$$d: \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \tag{9.7}$$

Ecuaţiile (9.7) reprezintă ecuaţiile dreptei ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are direcţia $\overrightarrow{d} = l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$.

[1] notăm prin d dreapta şi prin $\overrightarrow{d}$ direcţia sa

Ecuaţiile (9.6) se mai pot scrie:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\,l \\ y &= y_0 + t\,m \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + t\,n \end{aligned} \tag{9.8}$$

În această formă ele se numesc ecuaţiile parametrice ale dreptei. Dacă t parcurge pe $\mathbb{R}$, punctul de coordonate $(x(t) = x_0 + t\,l, y(t) = y_0 + t\,m, z(t) = z_0 + t\,n)$ parcurge dreapta. Interpretând t ca timp, $(x(t), y(t), z(t))$ reprezintă coordonatele la momentul t ale unui punct care se mişcă pe dreapta d.

Exemplul 7. Se dă dreapta de ecuaţii:

$$d: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-5}{1}$$

Ce particularitate are această dreaptă?

La prima vedere suntem tentaţi să spunem că ecuaţiile dreptei sunt incorecte, deoarece conţin o fracţie cu numitorul zero. Şirul de rapoarte egale exprimă însă coliniaritatea vectorilor $(x-2)\mathbf{i} + (y+1)\mathbf{j} + (z-5)\mathbf{k}$, $-3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$, adică pentru fiecare punct de pe dreaptă $M(x, y, z)$ există un $t \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\begin{aligned} x-2 &= -3t \\ y+1 &= 0t = 0 \\ z-5 &= 1t \end{aligned}$$

Din $y + 1 = 0$, rezultă că în punctele dreptei avem $y = -1$, adică dreapta este inclusă într-un plan paralel cu planul xOz (ce are ecuaţia $y = 0$).

Dreapta d are direcţia $\overrightarrow{d} = -3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă vectorii lor directori sunt coliniari.

Exemplul 8. Să se scrie ecuaţiile dreptei ce trece prin punctul $P(3, 4, -2)$ şi este perpendiculară pe planul $\pi: \ x - 2y + 5z - 8 = 0$

Dreapta d fiind perpendiculară pe plan are direcţia normalei la plan: $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{N} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Deci ecuaţiile ei vor fi:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+2}{5}$$

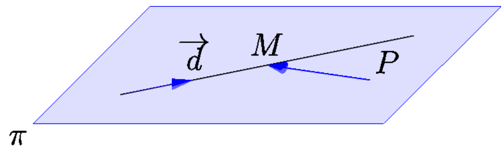
Accentuăm că **în rezolvarea problemelor de dreaptă şi plan trebuie să ţinem seama că un plan este caracterizat de vectorul normal, iar o dreaptă de vectorul director.**

Pentru a determina ecuaţia unui plan din condiţii geometrice date, trebuie să:

- **să determinăm un punct conţinut în plan şi direcţia normalei** sau
- **să determinăm un punct şi două direcţii conţinute în plan**.

Exemplul 9. Să se determine ecuaţia planului ce conţine punctul $P(5,-7,1)$ şi dreapta

$$d: \quad \frac{x+4}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+3}{7} \tag{9.9}$$



Din enunţ avem un punct conţinut în plan. Dreapta d fiind inclusă în plan, rezultă că planul conţine direcţia lui d, adică $\overrightarrow{d} = -2\mathbf{i}+0\mathbf{j}+7\mathbf{k}$. Din aceste informaţii încercăm să mai deducem o direcţie $v \neq \overrightarrow{d}$ conţinută în plan:

Pentru aceasta alegem un punct de pe dreapta d. Cel mai evident punct ce aparţine dreptei este $M(-4,1,-3)$ (îl deducem din numărătorii fracţiilor ce definesc ecuaţia (9.9) comparând cu ecuaţia generală a unei drepte (9.7). Astfel o altă direcţie conţinută în plan va fi $v=\overrightarrow{PM}=M-P=(-4-5)\mathbf{i}+(1+7)\mathbf{j}+(-3-1)\mathbf{k}=-9\mathbf{i}+8\mathbf{j}-4\mathbf{k}$. Planul cerut este planul π determinat de punctul P, şi direcţiile $\overrightarrow{d}, v$:

$$\pi(P;\overrightarrow{d},\overrightarrow{PM}): \quad \begin{vmatrix} x-5 & y+7 & z-1 \\ -2 & 0 & 7 \\ -9 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 0$$