Cursul 12

Geometria diferenţială a curbelor plane

Geometria diferenţală studiază curbe şi suprafeţe ale căror ecuaţii sunt definite de funcţii diferenţiabile.

12.1 Modalităţi de reprezentare a curbelor plane

În prima parte definim curbe plane diferenţiabile. O curbă plană diferenţiabilă poate fi dată prin mai multe modalităţi.

1. Curbe grafic. Cele mai simple curbe diferenţiabile sunt graficele funcţiilor $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile pe un interval I din $\mathbb{R}$. Graficul unei astfel de funcţii este mulţimea punctelor de coordonate (x, y):

$$G_f = \{M(x, y) \,|\, y = f(x)\}$$

cu proprietatea că y este valoarea funcţiei în x (Fig.12.1).

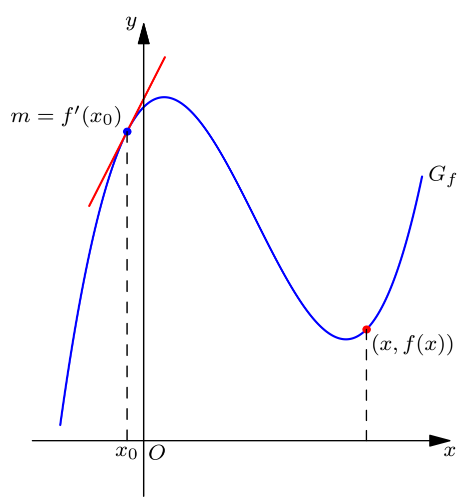

Fig.12.1: Curbă plană definită ca graficul unei funcţii.

Indicăm o astfel de curbă prin:

$$\Gamma : y = f(x), x \in I \tag{12.1}$$

şi spunem că Γ este dată prin **ecuaţia explicită**.

Funcţia f fiind derivabilă, derivata sa într-un punct, $f'(x_0)$, reprezintă panta tangentei la grafic în punctul de coordonate $M(x_0, f(x_0))$.

Se ştie că ecuaţia unei drepte din plan ce conţine punctul $M(x_0, y_0)$ şi are panta m este:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Astfel ecuaţia tangentei în punctul $M(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei f este:

$$\boxed{(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0)} \tag{12.2}$$

Perpendiculara pe tangenta la o curbă plană în punctul de tangenţă se numeşte normala curbei în acel punct.

Două drepte perpendiculare din plan, de pante m, m', nenule, au produsul pantelor egal cu -1: $m\,m' = -1$. Prin urmare panta normalei la curba de ecuaţie (12.1), într-un punct în care $f'(x_0) \neq 0$, este:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Deci ecuaţia normalei la curbă în punctul $M(x_0, f(x_0))$ este

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)} \tag{12.3}$$

Dacă $f'(x_0) = 0$ atunci panta tangentei la grafic în punctul $M(x_0, f(x_0))$ este 0 şi deci ecuaţia tangentei este :

$$y - f(x_0) = 0(x - x_0) \quad \Leftrightarrow y = f(x_0),$$

adică o dreaptă paralelă cu Ox. Astfel normala în M va fi paralelă cu Oy , adică de ecuaţie $x = x_0$.

În timp ce ecuaţia unei drepte din plan este caracterizată în mod uzual de panta dreptei, m, ce reprezintă tangenta unghiului dintre dreaptă şi axa Ox, $m = \mathrm{tg}\alpha$, în spaţiu o dreaptă este caracterizată de vectorul director. Totuşi şi în plan dreapta are un vector director. Să stabilim relaţia dintre cele două mărimi caracteristice, panta ca scalar şi vectorul director.

Dreapta din plan ce conţine un punct $M(x_0, y_0)$ şi are vectorul director $\overrightarrow{d} = (a, b)^T$, $a \neq 0$, are ecuaţia:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad \Leftrightarrow (y - y_0) = \frac{b}{a}(x - x_0) \quad \Leftrightarrow m = \frac{b}{a}$$

Reciproc, dreapta din plan ce conţine punctul $M(x_0, y_0)$ şi are panta m are ecuaţia:

$$(y - y_0) = m(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{m}, \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{d} = (1, m)^T$$

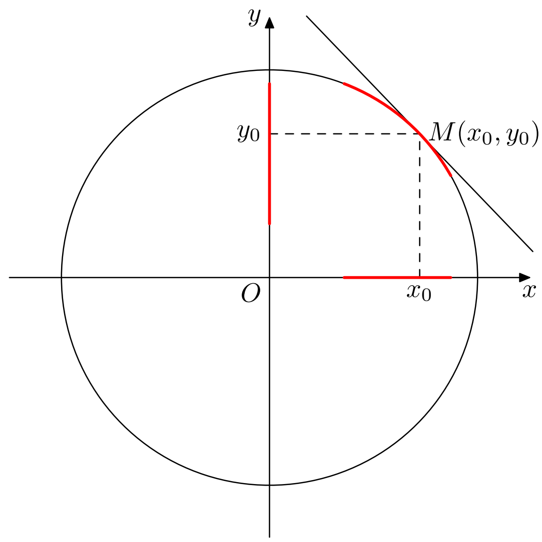

Fig.12.2: Tangenta la o curbă (cercul) dată implicit.

În concluzie, **dacă o dreaptă din plan are vectorul director $\overrightarrow{d} = (a, b)^T$, a $\neq 0$, atunci panta sa este $m = \dfrac{b}{a}$. Reciproc, dacă panta dreptei este m, atunci vectorul ei director este $\overrightarrow{d} = (1, m)^T$.**

2. Curbe plane date prin ecuaţia implicită

Nu orice curbă plană este grafic de funcţie. De exemplu, cercul cu centrul în origine şi de rază r nu este grafic de funcţie.

Definiţia 12.1.1 *O curbă plană diferenţiabilă, Γ, dată implicit sau prin ecuaţia implicită este mulţimea punctelor din plan de coordonate (x, y) care anulează o funcţie $F : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ce este de clasă C^r, $r \geq 1$, pe domeniul Δ:*

$$\Gamma = \{(x, y) \,|\, F(x, y) = 0\} \tag{12.4}$$

Ca şi în cazul curbelor date explicit ne interesează ecuaţia tangentei într-un punct al curbei.

Panta tangentei la o curbă Γ de ecuaţie $F(x, y) = 0$ într-un punct $M(x_0, y_0)$ în care derivata parţială a funcţiei F în raport cu y, $\partial F/\partial y$, este nenulă este:

$$m = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

iar ecuaţia tangentei în punctul M este:

$$y - y_0 = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \tag{12.5}$$

Normala la o curbă definită implicit. Dacă în punctul $M(x_0, y_0)$ al curbei $\Gamma : F(x, y) = 0$, derivatele parţiale ale funcţiei F sunt nenule atunci panta normalei în punctul M la curbă este::

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

şi ecuaţia normalei este:

$$y - y_0 = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

Ţinând seama că dacă panta unei drepte este m atunci vectorul ei director este $\overrightarrow{d} = (1, m)^T$, rezultă că vectorul director al normalei într-un punct $M(x_0, y_0)$ al curbei de ecuaţie $F(x, y) = 0$, este:

$$\overrightarrow{N} = (1, \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)})^T \parallel (\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0))^T$$

Deci vectorul normal curbei în punctul M este:

$$\overrightarrow{N} = \left((\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^T = \text{grad}(F)(x_0, y_0),$$

adică gradientul funcţiei F în punctul M.

Exemplul 1. Să se determine ecuaţia tangentei în punctul de intersecţie al curbei de ecuaţie $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ cu prima bisectoare şi vectorul normal curbei într-un punct arbitrar.

Rezolvare: Prima bisectoare are ecuaţia $y = x$ deci punctul ei de intersecţie cu curba are abscisa soluţie a ecuaţiei $F(x, x) = 0$, adică, $2x^3 - 3x^2 = 0$. Soluţiile ecuaţiei sunt $x_{1,2} = 0$ şi $x_3 = 3/2$. Prin urmare curba intersectează prima bisectoare în origine $O(0, 0)$ şi în punctul $M(3/2, 3/2)$.

Pentru a determina panta tangentei în aceste puncte calculăm derivatele parţiale ale funcţiei $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$:

$$\partial F/\partial x = 3x^2 - 3y, \ \partial F/\partial y = 3y^2 - 3x$$

Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$ panta tangentei în origine este nedeterminată deoarece avem $0/0$.

Un punct al curbei de ecuaţie $F(x, y) = 0$, în care ambele derivate partiale se anulează se numeşte punct singular. Deci originea este punct singular pentru curba dată.

Panta tangentei în punctul $M(3/2, 3/2)$ este -1 deci ecuaţia tangentei în M este:

$$y - \frac{3}{2} = -(x - \frac{3}{2})$$

Vectorul normal curbei într-un punct arbitrar este vectorul:

$$\overrightarrow{N} = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)^T$$

Observăm totuşi că în origine $\overrightarrow{N}$ este vectorul nul, adică normala nu are o direcţie, tocmai pentru că tangenta este nedefinită în acest punct.

2. Curbe plane şi în spaţiu date parametric

Definiţia 12.1.2 *O curbă* Γ *din plan sau spaţiu ce este imaginea unui interval* I*, printr-o aplicaţie* $r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *(n=2,3), de clasă* C^k *pe* I*,* $k \geq 1$*,* $r(t) = (x(t), y(t), |z(t))$*, se numeşte curbă diferenţiabilă dată parametric. Notăm* $\Gamma = im(r)$ *pentru a indica, că* Γ *este o curbă parametrizată de* r.

O curbă data parametric este interpretată ca şi traiectoria unui punct mobil $(x(t), y(t), |z(t))$ a cărui mişcare are loc în intervalul de timp I.

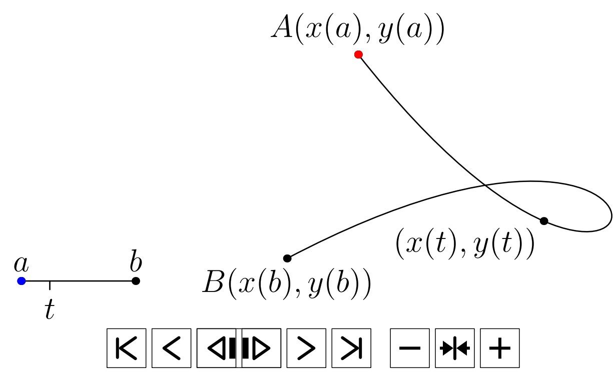

Fig.12.3: Interpretarea fizică a unei curbei date parametric: curba este traiectoria punctului mobil (roşu) În intervalul de timp $[a, b]$. Dând un singur click cu mouse-ul pe butonul $\boxed{\triangleright}$ din widget-ul asociat figurii, este animată miçarea continuă în sens direct, de la A spre B, iar pe $\boxed{\triangleleft}$, mişcarea în sens opus, de la B spre A. Clickând succesiv pe $\boxed{>}$, respectiv $\boxed{<}$, este simulată mişarea discretă (pas cu pas) în sens direct, respectiv opus. Oprirea animaţiei se realizează dând click pe $\boxed{|<}$.

Orice curbă dată ca grafic de funcţie, adică de ecuaţie $\mathbf{y = f(x), x \in I}$, se parametrizează prin $\mathbf{r : I \to \mathbb{R}^2}$, $\mathbf{r(t) = (x(t), y(t))}$ unde :

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= f(t) \end{aligned}$$

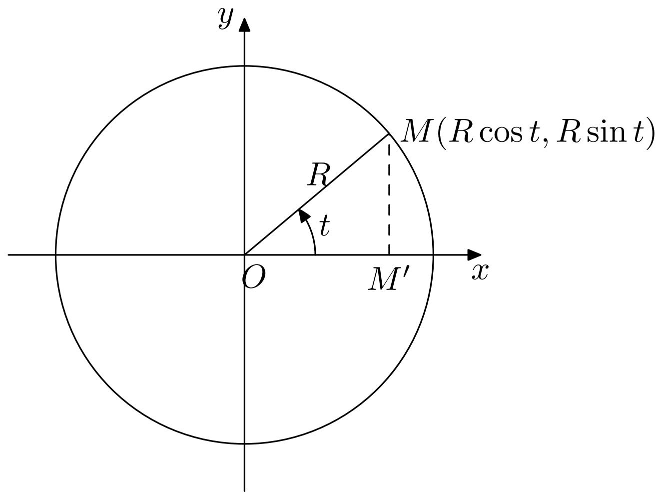

Fig.12.4: Cerc cu centrul În origine şi de rază R

Exemplul 2. Curba $y = 2\sin x - \cos x, x \in (0, 2\pi)$ se redefineşte ca o curbă dată parametric prin:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= 2\sin t - \cos t, \end{aligned} \quad \mathbf{t \in (0, 2\pi)}$$

Exemplul 3. **Parametrizarea cecului**. Cercul cu centrul în origine şi de rază R are ecuaţia implicită $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar pe cerc, A punctul de intersecţie al axei Ox cu cercul şi M' proiecţia ortogonală a lui M pe Ox (Fig. 12.4). Notăm cu t măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOM'}$. Din triunghiul dreptunghic $\triangle OM'M$ rezultă că:

$$\begin{aligned} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{aligned}$$

Deci o parametrizare a cercului complet este $r : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (R\cos t, R\sin t)$. Punctul A corespunde parametrului $t = 0$.

Parametrizarea semicercului $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $x \leq 0$ este $r : [\pi/2, 3\pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (R\cos t, R\sin t)$. În concluzie cercul complet şi un subarc al său au parametrizări cu aceeaşi expresie analitică, doar parametrul t parcurge intervale diferite.

Exemplul 4. **Parametrizarea elipsei** de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{12.6}$$

Presupunem că $a > b$ şi asociem elipsei date cercul cu centrul în origine şi de rază a (Fig.12.5).

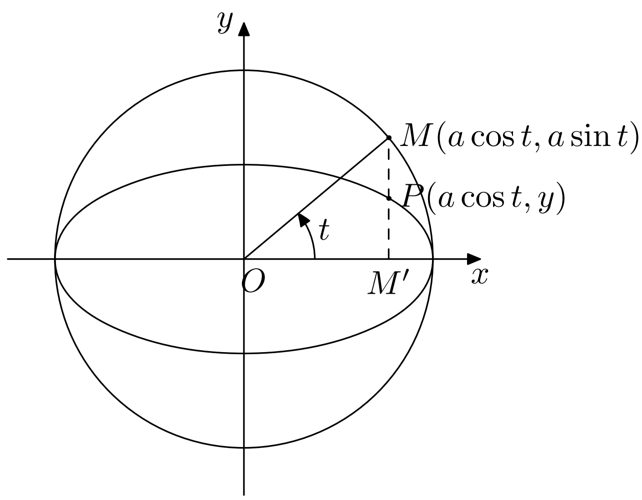

Fig.12.5: Elipsa şi cerc de rază egală cu semiaxa mare a elipsei.

Stabilim o corespondenţă bijectivă între mulţimea punctelor de pe cerc şi mulţimea punctelor de pe elipsă. şi anume unui punct $M(a\cos t, a\sin t)$ de pe cerc îi asociem punctul P de pe elipsă, care este intersecţia perpendicularei din M pe axa Ox, cu elipsa. Evident punctul P are aceeaşi abscisă ca şi M, iar ordonata este deocamdată necunoscută: $P(a\cos t, y)$. Impunem condiţia ca coordonatele punctului P să verifice ecuaţia (12.6):

$$\frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

de unde rezultă $y = b\sin t$. Prin urmare parametrizarea elipsei complete este:

$$r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (a\cos t, b\sin t)$$

Exemplul 5. **Spirala cilindrică** (Fig.12.6) este o curbă în spaţiu ce este descrisă de un punct ce are mişcare circulară în x şi y şi o mişcare liniară cu viteză constantă în direcţia lui Oz. Parametrizarea spiralei este:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & a\cos t \\ y(t) & = & a\sin t, \quad t \in [0, 2\pi n] \\ z(t) & = & bt, \end{array}$$

unde a, b sunt constante pozitive (a descrie raza mişcării circulare, iar b pasul de înalţare pe direcţia lui Oz, când în mişcarea circulară parcurge un radian),iar n este un număr natural ce indică numărul de spire.

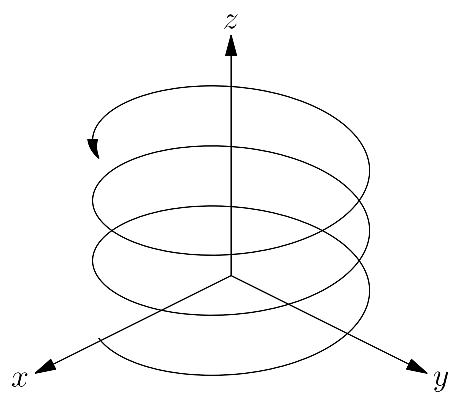

Fig.12.6: Spirala cu trei spire.