Cursul 10

Valori şi vectori proprii ai unei matrici pătratice

10.1 Valori şi vectori proprii. Definiţie

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică.

Definiţia 10.1.1 *Un* **vector propriu** *al lui A este un vector* **nenul**, *$v \in \mathbb{R}^n$, pentru care există un scalar* **real**, *$\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât:*

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \tag{10.1}$$

Scalarul λ se numeşte **valoare proprie** *a operatorului liniar, corespunzătoare vectorului propriu v.*

Detaliat condiţia pe care trebuie să o satisfacă un vector propriu $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ se exprimă astfel:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

Deoarece matricea unitate I_n, are efect ”neutru” într-o înmulţire $I_n v = v$, relaţia (10.1) este echivalentă cu:

$$Av = \lambda I_n v \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)v = 0, \tag{10.3}$$

adică:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.4}$$

Datorită şirului de echivalenţe, rezultă că matricea A admite vectori proprii, de coordonate $x_1, x_2, \dots, x_n$, dacă sistemul liniar şi omogen (10.4) admite soluţii nebanale (pentru că un vector propriu este un vector nenul!). Dar un sistem liniar şi omogen de n ecuaţii cu

n necunoscute admite şi soluţii nebanale, dacă determinantul matricii sistemului este 0, adică

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Acest determinant depinde de necunoscuta λ. Dezvoltând:

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \tag{10.5}$$

obţinem un polinom cu coeficienţi reali, de grad n, în λ. Notăm acest polinom cu $P_n(\lambda)$ şi îl numim **polinomul caracteristic** al matricii A.

Dacă λ_0 este o rădăcină reală (NU complexă!) a polinomului caracteristic, atunci $\det(A - \lambda_0 I_n) = 0$ şi deci sistemul liniar şi omogen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.6}$$

admite şi soluţii nebanale. O soluţie nebanală este constituită din coordonatele unui vector propriu v, corespunzător valorii proprii λ_0: $Av = \lambda_0 v$.

Avem astfel următorul **algoritm de determinare a valorilor şi vectorilor proprii**:

• Se calculează polinomul caracteristic $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

• Se rezolvă ecuaţia $P_n(\lambda) = 0$. Rădăcinile sale pot fi numere reale şi/sau numere complexe conjugate. Sunt valori proprii doar rădăcinile reale ale polinomului caracteristic;

• Pentru fiecare valoare proprie $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ se determină vectorii proprii corespunzători. Şi anume, coordonatele acestor vectori sunt soluţiile nebanale ale sistemului liniar şi omogen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.7}$$

ATENŢIE! Pentru a rezolva sistemul (10.7) trebuie determinat rangul matricii sistemului. Sigur determinantul acestei matrici este 0 (deci rangul nu este n) deoarece λ_0 este soluţie a ecuaţiei $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Prin urmare calculul determinantului sistemul este muncă în plus!

Exemplul 1. Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Să determinăm valorile şi vectorii proprii corespunzători.

- Polinomul caracteristic,

$$P_2(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$$

.

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 5 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Deci $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$;

- Rădăcinile polinomului caracteristic sunt: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \in \mathbb{R}$. Deci matricea A are două valori proprii.

- Să determinăm vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 2$, adică vectorii v cu proprietatea că $Av = 2v$. Coordonatele x_1, x_2 ale lui v sunt soluţii ale sistemului liniar şi omogen:

$$(A - 2I_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

adică

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rangul matricii acestui sistem este 1. Alegem drept determinant principal pe $\Delta_p = |5|$. x_1 este necunoscută principală şi $x_2 = \alpha$ necunoscută secundară. Rezolvăm ecuaţia $5x_1 = 4\alpha$ şi obţinem familia de soluţii $v = \begin{bmatrix} 4\alpha/5 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$;

- Vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 3$:

$$(A - 3I_2)v = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 5 & -5\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rezolvând acest sistem obţinem vectorii proprii de forma $v = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta \neq 0$.

Exemplul 2. Să se arate că matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

nu admite vectori proprii.

- Polinomul caracteristic este $P_2(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

- Rădăcinile polinomului caracteristic sunt: $\lambda_1, \lambda_2 = \pm i \in \mathbb{C}$. Deoarece polinomul caracteristic nu admite rădăcini reale, rezultă că matricea A nu are valori proprii, deci nici vectori proprii.

Exemplul 3. Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători.

• Calculăm polinomul caracteristic

$$P_3(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 - 9(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-8)$$

• Rădăcinile polinomului sunt: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$. Deoarece toate trei sunt rădăcini reale, rezultă că A are trei valori proprii;

• Vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 1$ au coordonatele, soluţii nebanale ale sistemului liniar şi omogen $(A - 1I_3)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 3 \\ 2 & 1-1 & 2 \\ 3 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adică ale sistemului:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aşa cum am subliniat determinantul matricii sistemului nu este 3. Căutăm un determinant de ordin 2 nenul. Observăm că determinantul ce conţine elementele de intersecţie ale liniilor 1, 2 cu coloanele 1, 3 este nenul. Deci un determinant principal este:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix},$$

şi x_1, x_3 sunt necunoscute principale (coeficienţii lor intră în determinantul principal), iar $x_2 := \alpha$ este necunoscută secundară. Rezolvâmd deci primele două ecuaţii în raport cu x_1, x_3:

$$\begin{aligned} 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Acest sistem admite doar soluţia banală şi deci vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 1$ sunt:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

• Vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 4$ au coordonatele soluţii ale sistemului $(A - 4I_3)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Din nou rangul nu este 3, dar este 2. Un determinant principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

x_1, x_2 sunt necunoscute principale, iar $x_3 := \beta$ necunoscută secundară. Rezolvând sistemul:

$$\begin{aligned} -3x_1 \qquad &= -3\beta \\ 2x_1 - 3x_2 &= -2\beta \end{aligned}$$

obţinem soluţia: $x_1 = \beta, x_2 = \dfrac{4}{3}\beta,\ x_3 = \beta$. Deci vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 4$ sunt:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \frac{4}{3}\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix},\ \beta \in \mathbb{R}$$

• În sfârşit vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = -2$ au coordonatele soluţii nebanale ale sistemului $(A - (-2)I_3)v = 0$, adică $(A + 2I_3)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinant principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

x_1, x_2 necunoscute principale, $x_3 := \gamma$ necunoscută secundară. Rezolvând primele două ecuaţii în raport cu x_1, x_2 obţinem vectorii proprii:

$$v = (x_1, x_2, x_3) = \gamma(-1, 0, 1),\ \gamma \in \mathbb{R}$$

10.2 Baze formate din vectori proprii. Matrici similare

Având o matrice pătratică A de tip $n \times n$ cu elemente reale, ne întrebăm dacă există în $\mathbb{R}^n$ o bază formată din vectori proprii ai matricii A.

Pentru a răspunde la această întrebare, considerăm polinomul caracteristic, asociat matricii, A:

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Presupunem ca polinomul are toate cele n radăcini, reale şi distincte:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$$

Pentru fiecare valoare proprie λ_k determinăm câte un vector propriu v_k, adică un vector cu proprietatea că $Av_k = \lambda_k v_k$.

Propoziţia 10.2.1 *Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sunt valori proprii distincte ale matricii A, iar $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sunt vectori proprii corespunzători acestor valori, adică $A(v_k) = \lambda_k v_k$, $k = \overline{1, n}$, atunci sistemul de vectori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ este un sistem liniar independent (Cu alte cuvinte, la valori proprii distincte corespund vectori proprii liniar independenţi).*

Consecinţă. *Dacă matricea sa A, are n valori proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, atunci orice sistem de vectori proprii $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, corespunzători respectiv valorilor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt liniar independenţi şi deci formează o bază în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$.*

Notăm cu $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ baza canonică din $\mathbb{R}^n$ şi cu $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ baza formată din vectori proprii ai matricii A şi cu $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [v_1|v_2|\ldots|v_n]$ matricea de trecere între cele două baze.

Fie

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

matricea diagonală ce are pe diagonala principală valoriule proprii distincte ale matricii A.

Se demonstrează că matricea A este egală cu produsul:

$$A = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}, \qquad (10.8)$$

unde $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ este matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}$, la baza $\mathcal{B}'$, formată din vectori proprii ai matricii A.

Definiţia 10.2.1 *Două matrici pătratice, A, A' cu elemente reale, pentru care există o matrice patratică nesingulară, T, astfel încât $A = TA'T^{-1}$, se numesc matrici similare.*

Cu alte cuvinte, relaţia 10.8 evidenţiază că matricea A este similară cu matricea diagonală, ce are pe diagonală valorile proprii.

În concluzie avem următoarea

Proprietate: Dacă matricea pătratică, A, are n valori proprii distincte, atunci ea este similară cu matricea diagonală a valorilor sale proprii şi matricea nesingulară T ce exprimă similaritatea $A = TDT^{-1}$ este matricea de trecere

$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, de la baza canonică $\mathcal{B}$ din $\mathbb{R}^n$, la baza $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, formată din vectori proprii corespunzători valorilor proprii: $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = \overline{1,n}$.

Un prim avantaj al similarităţii unei matrici A, cu o matrice diagonală D, constă în modalitatea simplă de calcul a unei puteri A^m (de obicei m foarte mare) a matricii A.

Propoziţia 10.2.2 *Dacă două matrici $A, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sunt similare, adică $A = TCT^{-1}$, atunci $A^m = TC^mT^{-1}$.*

Demonstraţie:

$$A^2 = AA = (TCT^{-1})(TCT^{-1}) = TC^2T^{-1}$$

Prin inducţie rezultă

$$A^m = TC^mT^{-1}$$

$\square$

Dacă însă C este o matrice diagonală D:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{atunci } D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^m \end{bmatrix}, \ \forall\, m \in \mathbb{N}$$

şi deci:

$$A^m = T \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^m \end{bmatrix} T^{-1}, \ \forall\, m \in \mathbb{N}$$

Exemplul 4. Să se arate că matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

are valori 3 valori proprii distincte şi să se determine matricile din relaţia de similaritate a lui A cu matricea diagonală corespunzătoare. Să se calculeze apoi A^{2015}.

- Calculăm polinomul caracteristic

$$P_3(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 - 9(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

- Rădăcinile polinomului sunt: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$. Deoarece toate cele trei rădăcini aparţin lui $\mathbb{R}$, rezultă că L are trei valori proprii distincte;

• Vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 1$ au coordonatele drept soluţii nebanale ale sistemului liniar şi omogen $(A - 1I_3)v = \theta$:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 3 \\ 2 & 1-1 & 2 \\ 3 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adică ale sistemului:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rangul matricii sistemului nu este 3, deoarece valorile proprii, deci şi pe $\lambda = 1$, le-am determinat impunând condiţia $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Rangul matricii este 2, deoarece determinantul ce conţine elementele de intersecţie ale liniilor 1, 2 cu coloanele 1, 3 este nenul. Deci un determinant principal este:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix},$$

şi x_1, x_3 sunt necunoscute principale (coeficienţii lor intră în determinantul principal), iar $x_2 := \alpha$ este necunoscută secundară. Rezolvăm deci primele două ecuaţii în raport cu x_1, x_3:

$$\begin{aligned} 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Acest sistem admite doar soluţia banală şi deci vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 1$ sunt:

$$v = (x_1, x_2, x_3)^T = (0, \alpha, 0)^T = \alpha(0, 1, 0)^T, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

• Vectorii proprii $v = (x_1, x_2, x_3)^T$, corespunzători valorii $\lambda = 4$ au coordonatele soluţii ale sistemului $(A - 4I_3)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Din nou rangul nu este 3, dar este 2. Un determinant principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

x_1, x_2 sunt necunoscute principale, iar $x_3 := \beta$ necunoscută secundară. Rezolvând sistemul:

$$\begin{aligned} -3x_1 \phantom{{}- 3x_2} &= -3\beta \\ 2x_1 - 3x_2 &= -2\beta \end{aligned}$$

obţinem soluţia: $x_1 = \beta, x_2 = \dfrac{4}{3}\beta,\ x_3 = \beta$. Deci vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda = 4$ sunt:

$$v = (x_1, x_2, x_3)^T = (\beta, \frac{4}{3}\beta, \beta)^T = \frac{\beta}{3}(3, 4, 3)^T,\ \beta \in \mathbb{R}$$

• În sfârşit vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = -2$ au coordonatele soluţii nebanale ale sistemului $(A - (-2)I_3)v = 0$, adică $(A + 2I_3)v = 0$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinant principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

x_1, x_2 necunoscute principale, $x_3 := \gamma$ necunoscută secundară. Rezolvând primele două ecuaţii în raport cu x_1, x_2 obţinem vectorii proprii:

$$v = (x_1, x_2, x_3)^T = \gamma(-1, 0, 1)^T,\ \gamma \in \mathbb{R}$$

Alegem câte un vector propriu corespunzător fiecărei valori proprii, şi anume $v_1 = (0, 1, 0)^T$, $Av_1 = 1v_1$, $v_2 = (3, 4, 3)$, $Av_2 = 4v_2$ şi $v_3 = (-1, 0, 1)^T$, $Av_3 = -2v_3$. Prin urmare baza formată din vectori proprii ai matricii A este $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}$ din $\mathbb{R}^3$ la baza formată din vectori proprii este:

$$T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Astfel relaţia de similaritate devine:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$$

Prin urmare,

$$A^{2015} = T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{bmatrix} 1^{2015} & 0 & 0 \\ 0 & 4^{2015} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{2015} \end{bmatrix} T^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$