

Algebră liniară, Tema 11

Valori și vectori proprii ai matricilor simetrice. Forme pătratice

1.) Se dă matricea simetrică

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Scrieți expresia formei pătratice asociate;

b) Determinați valorile proprii și vectorii ai matricii A . Verificați apoi că la valori proprii distincte corespund vectori proprii ortogonali. În funcție de semnul valorilor proprii precizați dacă forma pătratică asociată este pozitiv definită, negativ definită sau nedefinită.

2. Se dă forma pătratică $q(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$. Să se determine matricea simetrică ce definește această formă pătratică și apoi să se determine valorile ei proprii. Este forma pătratică pozitiv definită, negativ definită sau nedefinită?

3. a) Să se determine expresia analitică a formei pătratice asociate matricii simetrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Să se determine matricea formei pătratice $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 7x_2^2 - 5x_2x_3 + x_3^2$$

4. Să se determine dacă forma pătratică $Q(x_1, x_2) = -2\sqrt{2}x_1x_2 + x_2^2$ este pozitiv definită, negativ definită sau nedefinită.

5. Să se determine valorile proprii ale matricii formei pătratice $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 8x_1x_2 + 16x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$. Este forma pătratică degenerată sau nu?

6. Dacă matricea unei forme pătratice are valorile proprii $-1, 2, -3$ ce puteți spune despre forma pătratică (tipul pozitiv, negativ sau nedefinită)?

7. Se dă funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4x - 12y + 19 = 0$$

Să se determine punctele critice ale funcției și forma pătratică ce are drept matrice, Hessiana funcției f în punctul critic.