# Cursul 8

# Metoda de ortogonalizare Gramm-Schmidt. Produsul vectorial a doi vectori din $\mathbb{R}^3$.

## 8.1 Procedeul de ortonormalizare Gramm-Schmidt

Fie $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ baza arbitrară. Procedura Gramm-Schmidt este o metodă recursivă de construcţie a unei baze ortonormate, $\mathcal{B}'' = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, pornind de la baza $\mathcal{B}$.

• Mai întâi construim progresiv prin metoda Gramm–Schmidt o bază ortogonală $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

• Baza $\mathcal{B}''$ se va constitui din versorii vectorilor bazei $\mathcal{B}'$:

$$\mathcal{B}'' = (u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \ldots, u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}) \tag{8.1}$$

Construcţia bazei $\mathcal{B}'$:

Definim $w_1 = v_1$ şi luăm $w_2 = v_2 - \lambda w_1$, unde scalarul $\lambda$ se determină, impunând ca vectorul $w_2$ să fie ortogonal pe $w_1$, adică produsul scalar $w_2 \cdot w_1 = 0$.

$$w_2 \cdot w_1 = 0 \Leftrightarrow (v_2 - \lambda w_1) \cdot w_1 = 0 \Leftrightarrow v_2 \cdot w_1 - \lambda(w_1 \cdot w_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}$$

Deoarece $w_1 = v_1 \neq \theta$, produsul scalar $w_1 \cdot w_1 > 0$ şi deci $\lambda$ este bine definit. Astfel am construit vectorii ortogonali $w_1, w_2$.

Determinăm al treielea vector $w_3$ de forma:

$$w_3 = v_3 - (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2),$$

unde scalarii $\lambda_1, \lambda_2$ îi determinăm din condiţiile ca $w_3$ să fie ortogonal şi pe $w_1$ şi pe $w_2$, adică:

$$\begin{array}{rcl} w_3 \cdot w_1 & = & 0 \\ w_3 \cdot w_2 & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} (v_3 - (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)) \cdot w_1 & = & 0 \\ (v_3 - (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)) \cdot w_2 & = & 0 \end{array} \tag{8.2}$$

Efectuând produsele scalare în ambele ecuaţii obţinem:

$$\begin{array}{rcl} v_3 \cdot w_1 - \lambda_1(w_1 \cdot w_1) - \lambda_2(\underbrace{w_2 \cdot w_1}_{=0}) & = & 0 \\ \\ \lambda_1(\underbrace{w_1 \cdot w_2}_{=0}) + \lambda_2(w_2 \cdot w_2) - v_3 \cdot w_2 & = & 0 \end{array} \tag{8.3}$$

Deoarece $w_1$ şi $w_2$ sunt deja definiţi şi sunt vectori ortogonali, produsul lor scalar este zero: $w_1 \cdot w_2 = w_2 \cdot w_1 = 0$ şi astfel din prima, respectiv a doua ecuaţie, obţinem:

$$\lambda_1 = \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} \tag{8.4}$$

Continuând cu acelaşi procedeu, în etapa $n$ construim vectorul

$$w_n = v_n - (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots \lambda_{n-1} w_{n-1})$$

şi determinăm parametrii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ din condiţiile:

$$\begin{aligned} w_n \cdot w_1 &= 0 \\ w_n \cdot w_2 &= 0 \\ &\vdots \\ w_n \cdot w_{n-1} &= 0 \end{aligned} \tag{8.5}$$

**Exemplul 1**. Pornind de la baza $\mathcal{B} = (v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1), v_3 = (-1, 1, -2))$ din spaţiul $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ să se construiască o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$, folosind procedeul lui Gramm–Schmidt.

**Rezolvare**: Observăm că baza $\mathcal{B}$ nu este o bază ortogonală pentru că $v_1 \cdot v_2 = -1 \neq 0$. Deci are sens să aplicăm procedeul Gramm-Schmidt.

Notăm cu $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ baza ortogonală ce urmează să o construim.

Definim:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (1, 1, 0) \\ w_2 &= v_2 - \lambda w_1 \end{aligned}$$

Impunând ca $w_2 \perp w_1$ obţinem ca mai sus:

$$\lambda = \frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1} = \frac{-1}{2} =$$

Deci vectorul $w_2$ are coordonatele:

$$w_2 = -\frac{1}{2}(1, 1, 0) - (-1, 0, 1) = (1/2, -1/2, -1) \parallel (1, -1, -2)$$

Pentru a lucra cu coordonate nefracţionare se recomandă să înlocuim vectorul $w_2$ cu vectorul $(1, -1, -2) = 2w_2$, care are aceeaşi direcţie, deci este la fel, ortogonal pe $w_1$. Pentru simplificare notăm noul vector $(1, -1, -2)$ tot cu $w_2$.

Constituim vectorul $w_3$ astfel:

$$w_3 = v_3 - (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)$$

şi impunând condiţiile de ortogonalitate pe $w_1$ şi $w_2$ obţinem

$$\lambda_1 = \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} = \frac{(-1, 1, -2) \cdot (1, 1, 0)}{w_1 \cdot w_1} = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Astfel

$$w_3 = 0 \cdot (1,1,0) + \frac{1}{3}(-1,1,2) + (-1,1,-2) = (-4/3, 4/3, -4/3) \parallel (-1,1,-1)$$

Prin urmare am construit baza ortogonală:

$$\mathcal{B}' = (w_1 = (1,1,0), w_2 = (1,-1,-2), w_3 = (-1,1,-1))$$

Baza ortonormată se obţine din $\mathcal{B}'$ înlocuind fiecare vector $w_i$ cu versorul său:

$$\mathcal{B}'' = (u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|})$$

adică:

$$\mathcal{B}'' = (u_1 = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}, u_2 = \frac{(1,-1,-2)}{\sqrt{6}}, u_3 = \frac{(-1,1,-1)}{\sqrt{3}})$$

## 8.2 Produs vectorial

Într-un spaţiu vectorial $\mathbb{R}^n$, cu $n$ arbitrar, produsul scalar asociază la orice doi vectori $v, w$, un număr (scalar), $v \cdot w$. În spaţiul $\mathbb{R}^3$, raportat la baza canonică

$$\mathcal{B} = (e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = (0,0,1)^T),$$

definim şi ceea ce se numeşte produsul vectorial a doi vectori, $v$ şi $w$, adică "rezultatul" produsului este tot un vector din $\mathbb{R}^3$.

**Definiţia 8.2.1** *Fie $v = (x_1, x_2, x_2)^T$, $w = (y_1, y_2, y_3)^T$, doi vectori din $\mathbb{R}^3$. Produsul lor vectorial este un vector notat, $v \times w$, ale cărui coordonate în baza canonică se obţin din dezvoltarea după prima linie a determinantului formal:*

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3 \tag{8.6}$$

**Exemplul 2**. Să se calculeze produsul vectorial $v_1 \times v_2$, unde $v_1 = (-2,1,3)^T, v_2 = (1,0,-4)^T \in \mathbb{R}^3$.

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4e_1 - 5e_2 - e_3$$

**Proprietăţi ale produsului vectorial**:

**1.** $\boxed{\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -(\mathbf{w} \times \mathbf{v})}$

Într-adevăr,

$$v \times w = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} e_3 \tag{8.7}$$

Ţinând seama că schimbând două linii ale unui determinant între ele obţinem minus determinantul iniţial:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix},$$

rezultă că:

$$\begin{aligned} v \times w &= -\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} e_2 - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} e_3 \\ &= -\left( \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} e_3 \right) = \\ &= -\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = -(w \times v) \end{aligned} \tag{8.8}$$

Această proprietate a produsului vectorial se numeşte **anticomutativitate**.

**2.** Dacă vectorii $v$ şi $w$ sunt coliniari, adică $w = \lambda v$, cu $\lambda \neq 0$, atunci produsul vectorial $v \times w = \theta$ şi reciproc, dacă produsul vectorial adoi vectori nenuli este zero, $v \times w = \theta$, atunci cei doi vectori, $v$, $w$ sunt coliniari.

Dacă $v = (x_1, x_2, x_3)^T$, atunci $w = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)^T$ şi deci:

$$\begin{aligned} v \times w &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \lambda x_2 & \lambda x_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ \lambda x_1 & \lambda x_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \lambda x_1 & \lambda x_2 \end{vmatrix} e_3 = \\ &= 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = \theta, \end{aligned} \tag{8.9}$$

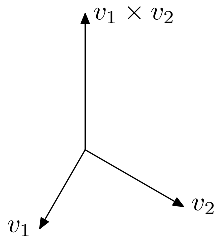
deoarece dacă două linii ale unui determinant sunt proporţionale, atunci determinantul este egal cu zero.

Reciproca se bazează pe faptul că dacă:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0,$$

atunci linia 1 este proporţională cu linia a doua.

**3.** Produsul vectorial $v \times w$ este ortogonal şi pe $v$ şi pe $w$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \perp \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \perp \mathbf{w}$.




Să arătăm că $v \times w \perp v$, adică produsul scalar $(v \times w) \cdot v = 0$. Ştiind că produsul scalar a doi vectori din $\mathbb{R}^3$ este suma produselor coordonatelor din aceaşi poziţie avem:

$$\begin{aligned}(v \times w) \cdot v &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} x_3 = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Precizăm că penultima egalitate ilustrează dezvoltarea determinantului de ordin 3 după prima linie, iar ultima egalitate are loc deoarece două linii ale determinantului coincid.

Analog se arată şi că $v \times w \perp w$.

**4.** Norma produsului vectorial este egal cu produsul normelor celor doi vectori şi sinusul unghiului dintre ei: $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin(\widehat{v, w})$ (se verifică prin calcul direct).

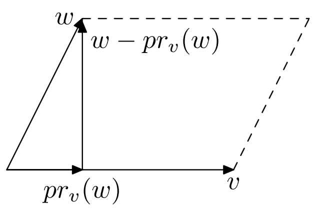
**5.** Norma produsului vectorial a doi vectori este egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori.

**Demonstraţie**: Norma vectorului produs vectorial este: $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin(\widehat{v, w})$. Aria paralelogramului construit pe cei doi vectori (vezi figura de mai jos) este baza, B, ori înalţimea, $h$, a paralelogramului. Lungimea bazei este $B = \|v\|$, iar înalţimea se află din triunghiul dreptunghic format, şi anume:

$$\sin(\widehat{v, w}) = \frac{h}{\|w\|} \quad \Leftrightarrow \quad h = \|w\| \sin(\widehat{v, w})$$

Astfel aria paralelogramului devine

$$\mathcal{A} = B \cdot h = \|v\|\|w\| \sin(\widehat{v, w}) = \|v \times w\|$$




$\square$

Proprietatea **3.** a produsului vectorial ne asigură că un vector simultan perpendicular şi pe $v$ şi pe $w$ este produsul lor vectorial, $v \times w$. Exploatând această proprietate putem construi o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$, doar din doi vectori.

## Construcţia unei baze ortonormate cu ajutorul produsului vectorial

**Propoziţia 8.2.1** *Cu ajutorul a doi vectori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, nenuli şi necoliniari se poate construi o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$.*

**Demonstraţie**: Construim mai întâi o bază ortogonală $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$, pe care apoi o normăm, adică calculăm versorii vectorilor din baza ortogonală:

$$\mathcal{B}'' = (u_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}, u_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}, u_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|})$$

Şi anume, luăm:

$$\begin{aligned} f_1 &= v_1 \\ f_2 &= v_1 \times v_2 \end{aligned}$$

Deoarece produsul vectorial $v_1 \times v_2$ este ortogonal pe ambii vectori $v_1, v_2$, rezultă că $f_2 \perp f_1$.

Un vector simultan perpendicular şi pe $f_1$ şi pe $f_2$ este produsul lor vectorial, $f_1 \times f_2$, deci luăm:

$$f_3 = f_1 \times f_2 = v_1 \times (v_1 \times v_2)$$

Baza ortonormată construită cu ajutorul vectorilor $v_1, v_2$ este

$$\mathcal{B}'' = \left(u_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}, u_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}, u_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|}\right)$$

□

**Exemplul 3**. Pornind de la vectorii $v_1 = (-2, 1, 3)^T, v_2 = (1, 0, -4)^T \in \mathbb{R}^3$ şi efectuând produse vectoriale succesive, să se construiască o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f_1 &= v_1 = (-2, 1, 3)^T \\ f_2 &= v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4e_1 - 5e_2 - e_3 \end{aligned}$$

$$f_3 = f_1 \times f_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -4 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 14e_1 - 14e_2 + 14e_3 \parallel e_1 - e_2 + e_3$$

Baza

$$\mathcal{B}' = (f_1 = (-2, 1, 3)^T, f_2 = (-4, -5, -1)^T, f_3 = (1, -1, 1))^T$$

este ortogonală. Deoarece:

$$\|f_1\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}, \|f_2\| = \sqrt{16 + 25 + 1} = \sqrt{42}, \|f_3\| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3},$$

baza $\mathcal{B}'$ nu este normată (vectorii săi nu au norma 1).

Baza ortonormată construită pornind de la vectorii $v_1, v_2$ este:

$$\mathcal{B}'' = \left( u_1 = \frac{(-2,1,3)^T}{\sqrt{14}}, u_2 = \frac{(-4,-5,-1)^T}{\sqrt{42}}, \frac{(1,-1,1)^T}{\sqrt{3}} \right)$$

## 8.3 Sisteme de axe ortogonale în plan şi spaţiu

În plan se consideră sistemul de axe ortogonale $Oxy$, unde $O$ este un punct fixat. Axa $Ox$, are direcţia şi sensul vectorului $e_1 = (0,1)^T$, iar $Oy$ a vectorului $e_2 = (0,1)^T$. Un punct arbitrar din plan $M$ are coordonatele $(x, y)$ relativ la acest sistem de axe, unde $x$ şi $y$ sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$ în baza canonică.

În spaţiu se consideră axele ortogonale $Ox, Oy, Oz$, care au respectiv direcţia şi sensul lui $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T$, $e_3 = (0,0,1)^T$.

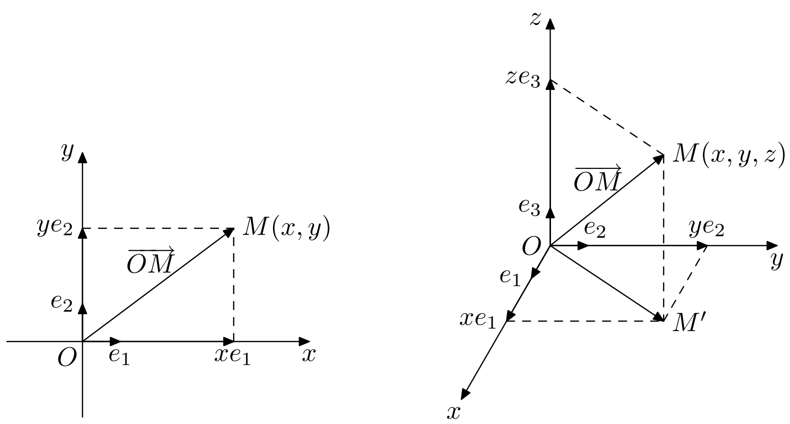


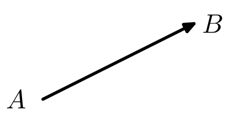

**Fig.8.1**: Semnificaţia coordonatelor unui punct $M$ din plan raportat la un sistem ortogonal de axe (stânga), respectiv din spaţiul 3D (dreapta).

Un punct arbitrar $M$ din spaţiul tridimesnional are coordonatele $(x, y, z)$, definite ca fiind coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$ în baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

În Fig.8.1 sunt ilustrate două sisteme de axe ortogonale, unul în plan (stânga) şi cel de-al doilea în spaţiul tri–dimensional (dreapta).

La orice două puncte $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ (n=2, 3) le asociem vectorul $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} := B - A$$



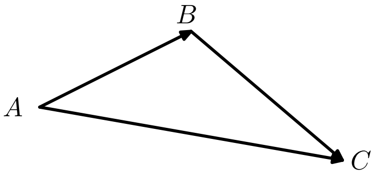

$(A, B) \longrightarrow \overrightarrow{AB}$

Coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ se obţin scăzând din coordonatele punctului $B$ coordonatele punctului $A$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{bmatrix}$$

**Proprietăţi ale vectorilor definiţi de câte o pereche de puncte**:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\forall\ A, B, C \in \mathcal{P}$ (relaţia lui Chasles);




Aplicând relaţia lui Chasles pentru punctele $A$, $B$, $C$ identice (toate notate $A$), obţinem $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$, adică $\overrightarrow{AA} = \theta \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Relaţia lui Chasles aplicată punctelor $A, B, A$ conduce la $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \theta$, adică $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Cu alte cuvinte, vectorul ce are punctul de aplicaţie, $A$, şi extremitatea libera, tot $A$ este vectorul nul.

Vectorul $\overrightarrow{BA}$ este opusul vectorului $\overrightarrow{AB}$.

Relaţia Chasles se extinde la un număr finit de puncte:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{m-1}A_m} = \overrightarrow{A_1A_m}$$

**Exemplul 4**. În $\mathbb{R}^3$ se dau punctele $A(1, 2-3)$, $B = (-4, 1, 0)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$.

Conform definiţiei $\overrightarrow{AB} = B - A = (-4-1,\ 1-2,\ 0-(-3))^T = (-5, -2, 3)^T$.

Definim distanţa dintre două puncte $A$, $B$ ca fiind norma vectorului $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Dacă $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $B = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, atunci vectorul $\overrightarrow{AB}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)^T$ şi deci distanţa dintre două puncte $A, B$ este:

$$\begin{aligned} d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

Două puncte $A, B$ determină un segment, notat $[A, B]$.

**Mijlocul segmentului** $[A, B]$ este punctul $M$ cu proprietatea că $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Dacă $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, atunci din relaţia $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ rezultă aceeaşi relaţie între coordonatele din poziţia $i$ a vectorilor $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}$, adică:

$$x_i - a_i = b_i - x_i, \quad \Leftrightarrow \quad 2x_i = a_i + b_i \quad \Leftrightarrow x_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad \forall\, i = \overline{1, n}$$

Prin urmare *coordonatele mijlocului unui segment sunt egale cu media aritmetică a coordonatelor corespunzătoare ale extremităţilor segmentului.*

**Exemplul 5**. În $\mathbb{R}^3$ se dau punctele $A(-1, 2, 4)$, $B(3, 0, -5)$, $C(1, -7, 2)$.

a) Să se calculeze distanţa de la $A$ la mijlocul segmentului $[B, C]$.

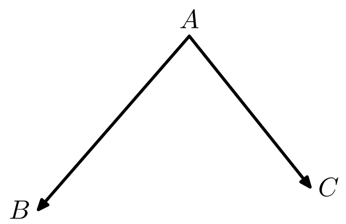
b) Să se calculeze cosinusul unghiului $\widehat{BAC}$

a) Fie $M(x, y, z)$ mijlocul segmentului $[B, C]$. Coordonatele sale sunt:

$$x = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y = \frac{0-7}{2} = -3.5, \quad z = \frac{-5+2}{2} = -1.5$$

Distanţa $d(A, M) = \sqrt{((-1-2)^2 + (2+3.5)^2 + (4+1.5)^2} = \sqrt{9 + 5.5^2 + 5.5^2}$ $= \sqrt{9 + 60.5} = 8.34.$

b) Unghiul $\widehat{BAC}$ este unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.




$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, -2, -9)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -9, -2)$. Astfel:

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{8 + 18 + 18}{\sqrt{16 + 4 + 81}\sqrt{4 + 81 + 4}} = \frac{44}{\sqrt{101 + 89}} = \frac{44}{\sqrt{190}}$$