Cursul 2

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

2.1 Sisteme de ecuaţii liniare

Un sistem liniar de m ecuaţii cu n necunoscute constă din m ecuaţii de forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

• Dacă toţi termenii liberi ai sistemului sunt egali cu 0, $b_1 = b_2 = \ldots = b_m$ atunci sistemul:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

se numeşte **sistem omogen**.

• Dacă cel puţin unul din termenii liberi este diferit de 0, sistemul (2.5) se numeşte **sistem neomogen**.

Exemplul 1. Sistemele următoare:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 5y - 3z & = & 0 \\ -x + 7y + 4z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 0 \\ -5x + 2y - 11z & = & 0 \\ y + 3z & = & 0 \end{array}$$

sunt sisteme omogene, iar sistemele:

$$\begin{array}{lcr} 2x - 9y + 4z & = & -3 \\ -x + 7y + 13z & = & 0 \\ 6x + y - 3z & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{lcr} x + y - 7z & = & 1 \\ -5x + 3y & = & -6 \end{array}$$

sunt sisteme neomogene.

Pentru un sistem de forma (2.5) o soluţie constă din n numere reale, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, care verifică fiecare ecuaţie a sistemului.

Un astfel de sistem se numeşte:
1. Compatibil determinat dacă are o singură soluţie;
2. Compatibil nedeterminat dacă are o infinitate de soluţii);
3. Incompatibil dacă nu are nici o soluţie.

Un sistem de forma (2.5) se poate exprima matricial astfel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b} \quad \text{sau concentrat } Ax = b \tag{2.3}$$

Pentru a decide natura sistemului general (2.5), omogen sau neomogen, adică dacă este compatibil sau incompatibil, avem nevoie de o modalitate de calcula rangul matricii sistemului.

Rangul unei matrice.

Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este o matrice, atunci rangul ei este un număr întreg egal cu cel mai mare ordin de determinant nenul ce se poate constitui din elementele de intersecţie a k linii distincte şi k coloane distincte ale matricii A.

Cel mai mare ordin de determinant ce se poate constitui din elementele unei matrici $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este $k = \min(m, n)$.

Exemplul 2.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Matricea are 2 linii şi 3 coloane. Ordinul celui mai mare determinant ce se poate constitui din elemente de intersecţie a k linii şi k coloane din A este $k = min(2, 3) = 2$.

Mai întâi se calculează determinanţi de ordinul cel mai mare, în acest caz 2. Dacă cel puţin unul este diferit de zero, atunci rangul matricii este 2. Dacă toţi sunt egali cu zero, atunci se caută un determinant de ordinul 1, diferit de 0.

Din matricea A putem constitui următorii determinanţi de ordinul 2:
1) Din liniile $1, 2$ şi coloanele $1, 2$;
2) liniile 1,2, coloanele 1,3;
3) din liniile 1,2, coloanele 2,3:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2' = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2'' = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Deci rangul matricii nu este 2.

Observăm însă că $\Delta_1 = |-1| \neq 0$ şi deci rangul este 1.

Exemplul 3. Matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

are 3 linii şi 3 coloane, deci determinantul de ordin maxim ce se poate constitui este determinantul de ordin 3, $\Delta_3 = \det(A) = 0$. Fiind egal cu zero, rangul nu este 3.

Căutăm un determinant de ordin 2 diferit de 0.

Formăm determinanţi de ordin 2, din elementele de intersecţie a două linii $i_1 < i_2$ şi 2 coloane, $j_1 < j_2$. Evaluâm fiecare determinant şi dacă obţinem unul diferit de zero, stopăm calculul determinanţilor de ordin 2 şi concluzionăm că rangul este 2:

	col 1	col 2
lin 1	2	-3
lin 2	-4	6

	col 1	col 3
lin 1	2	1
lin 2	-4	-2

	col 2	col 3
lin 1	-3	1
lin 2	6	-2

	col 1	col 2
lin 1	2	-3
lin 3	1	0

Primii trei determinanţi sunt 0, iar al patrulea este diferit de zero, Deci rangul matricii date este 2.

Scrieţi restul determinaţilor de ordin 2, ce se pot constitui din matricea A.

2.2 Rezolvarea sistemelor de n ecuaţii cu n necunoscute

Ştim de la liceu, că un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute, $Ax = b$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sau detaliat:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

este compatibil determinat (adică are o unică soluţie) dacă şi numai dacă determinatul matricii sistemului este diferit de zero. În acest caz soluţia $(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ se poate calcula:

1. folosind regula lui Cramer:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \mathbf{b_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \mathbf{b_2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \underbrace{\mathbf{b_n}}_{col j} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad j = \overline{1, n}$$

adică, x_j este raportul ce are la numitor, determinantul sistemului, iar la numărator, determinantul sistemului în care coloana j se înlocuieşte cu coloana termenilor liberi.

Exemplul 4. Considerăm sistemul:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -4 \\ -x + y + 2z &= 1 \\ 3x + 5y - z &= 0 \end{aligned}$$

Matricea sistemului este:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Deoarece determinantul său, $\det(A) = -45$, sistemul este compatibil determinat şi soluţia sa este:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{-4} & -3 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & \mathbf{1} & 2 \\ 3 & \mathbf{0} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & \mathbf{-4} \\ -1 & 1 & \mathbf{1} \\ 3 & 5 & \mathbf{0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}}$$

2. O a doua modalitate de a rezolva un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute, compatibil determinat, este metoda matricială. Şi anume, scriind sistemul în forma $Ax = b$, deoarece $\det(A) \neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă, adică exista A^{-1} astfel încât $A^{-1}A = I_n$(matricea unitate). Înmulţind sistemul scris matricial, $Ax = b$, la stânga cu A^{-1}, avem:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I_n} x = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad I_n x = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b$$

Deci soluţia sistemului se obţine calculând A^{-1} şi apoi efectuând înmulţirea:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Exemplul 5. Să se arate că sistemul:

$$\begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ -3x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

este compatibil determinat şi să se determine soluţia sa prin metoda matricială.

Matricea sistemului este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

iar determinatul sau este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

Deci sistemul este compatibil determinat şi soluţia sa este:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Să parcurgem etapele de calcul a inversei:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = -1 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Deci soluţia sistemului este:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2.3 Studiul compatibilităţii sistemelor de de m ecuaţii cu n necunoscute

Considerăm un sistem de m ecuaţii cu n necunoscute

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

Un astfel de sistem poate fi incompatibil (nu are nici o soluţie) sau compatibil (are cel puţin o soluţie). Pentru a testa dacă admite sau nu soluţii, îi asociem două matrici: matricea A a coeficienţilor necunoscutelor:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şi matricea prelungită:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

care se obţine bordând la matricea A (adică adăugând) coloana termenilor liberi.

Calculând rangul celor două matrici, A şi $\overline{A}$ putem deduce dacă sistemul are soluţii sau nu, folosind:

Teorema 2.3.1 *(Kronecker–Capelli). Sistemul (2.5) este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricii sistemului este egal cu rangul matricii prelungite:*

$$\mathit{rang}(A) = \mathit{rang}(\overline{A})$$

Consecintă. Dacă rangul matricii sistemului este diferit de rangul matricii prelungite, atunci sistemul este incompatibil.

Exemplul 6. Să se studieze natura sistemului folosind teorema Kronecker–Capelli şi în caz de compatibilitate să se detrmine mulţimea soluţiilor:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matricea sistemului şi respectiv matricea prelungită este:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Determinatul de ordin maxim ce se poate constitui din elementele de intersecţie a k linii şi k coloane ale matricii A este $k = min(3, 4) = 3$. Şi anume putem construi 4 determinanţi de ordinul 3, având elemente din liniile $1, 2, 3$ ale matricii A şi respectiv coloanele $(1, 2, 3)$,

$(1,2,4)$, $(1,3,4)$, $(2,3,4)$: Dacă îi calculăm efectiv obţinem că toţi cei 4 determinanţi sunt egali cu zero. Deci rangul matricii A nu este 3. Să căutăm un determinat de ordin mai mic nenul. Observăm că acest determinant de ordinul 2 este nenul:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

şi deci rangul$(A) = 2$.

Să calculăm rangul matricii prelungite. Rangul ar putea fi 3, dacă unul din determinanţii ce conţin elemente din liniile $1, 2, 3$ ale lui $\overline{A}$ şi respectiv coloanele $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 5)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 4, 5)$, $(3, 4, 5)$ este nenul (ceilaţi determinanţi de ordin 3 ce conţin coloane doar din A ştim că sunt nuli).

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 24 - 32 - 2 = -16$$

Prin urmare rangul matricii $\overline{A}$ este egal cu 3. Deoarece rang(A) $\neq$rang$(\overline{A})$, rezultă că sistemul este incompatibil.

Exemplul 7. Sistemul

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

are det(A)=0. Deoarece

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

rangul matricii A este 2.

Matricea prelungită

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -5 & -5 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

are toţi determinaţii de ordin 3 egali cu zero (calculaţi!!), dar are şi ea rangul 2. Rangul lui A fiind egal cu rangul lui $\overline{A}$ sistemul este compatibil (dar nu determinat, pt ca matricea sistemului are determinantul egal cu zero), ci nedeterminat.

Pentru a găsi mulţimea soluţiilor sale, fixăm un determinant nenul ce are ordinul egal cu rangul lui A, numit **determinat principal**. De exemplu determinantul Δ_2. Identificăm care sunt liniile şi coloanele lui A din ale căror coeficienţi se constituie determinantul principal, Δ_2.

Observăm că coloanele 1, 2, 3 din matricea A conţin coeficientii necunoscutelor x, y, z din sistem. Pentru că determinantul Δ_2 conţine doar elemente din coloanele 1 şi 2, corespunzătoare lui x şi y, x şi y le numim **necunoscute principale**, iar $z = \alpha$, **necunoscută secundară**.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Dintre ecuaţiile sistemului folosim pentru a determina mulţimea soluţiilor, doar pe cele ai căror coeficienţi intră în determinantul principal Δ_2. Astfel rezolvăm ecuaţiile 1 şi 2, în raport cu necunoscutele principale x, y, în funcţie de necunoscuta secundară $z = \alpha$:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3\alpha & = & 4 \\ \quad 4x \quad - 5\alpha & = & -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 2y & = & 4 - 3\alpha \\ 4x & = & -5 + 5\alpha \end{cases}$$

Rezolvând ultimul sistem, obţinem că mulţimea soluţiilor sistemului este:

$$(x = \frac{5\alpha - 5}{4}, y = \frac{11 - 7\alpha}{8}, z = \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

Deci pentru fiecare număr real α obţinem altă soluţie. Cum exista o infinitate de numere reale, avem o infinitate de soluţii.