
Algebră liniară, Tema 4

1. Știind că vectorul $u \in \mathbb{R}^3$ se exprimă ca o combinație liniară a vectorilor $v_1 = (2, 3, -5)$, $v_2 = (0, 2, -1)$, cu coeficienții $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = -3$. Să se determine vectorul u .

2. Să se verifice, folosind definiția, că vectorii:

$$v_1 = (5, -1, 2), v_2 = (2, -3, 4), v_3 = (-4, -7, 8) \in \mathbb{R}^3$$

sunt liniar dependenți și să se determine relația dintre ei.

3. Să se verifice dacă vectorii $v_1 = (2, 1, 3, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 3, 4)$, $v_3 = (0, 1, 2, 5) \in \mathbb{R}^4$ sunt liniar dependenți sau independenți.

4. Fie $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, 6 vectori din \mathbb{R}^3 și A matricea ce are drept coloane, coordonatele acestor vectori:

$$A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5|v_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Știind că forma scară redusă a matricii A este

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Să se precizeze dacă vectorii sunt liniar dependenți sau independenți. Dacă sistemul celor 6 vectori este unul format din vectori liniar dependenți, determinați care subsistem de vectori din cei 6 sunt liniar independenți. Să se exprime ceilalți vectori în funcție de vectorii liniar independenți.

5. O matrice $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$, $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$, are forma scară redusă:

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Să se precizeze rangul matricii A și dacă sistemul de vectori $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ este liniar dependent sau independent. Dacă sistemul celor 5 vectori este liniar dependent, atunci răspundeți la aceleași întrebări ca la problema precedentă.

2

6. Matricea $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$ are forma scară redusă:

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Din ce spațiu \mathbb{R}^n sunt vectorii v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ? Să se deducă din S_A^0 relațiile de dependență dintre acești vectori.

7. Folosind criteriul practic să se deducă dacă sistemul de vectori din \mathbb{R}^4 este liniar dependent sau independent:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$