Algebră liniară, Tema 2

1. Să se determine rangul matricilor următoare:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Să se determine soluţia sistemului următor folosind regula lui Cramer şi apoi metoda matricială:

$$\begin{cases} -2x + y &= -1 \\ 3x - 5 &= 2 \end{cases}$$

3. Să se arate că sistemul următor este compatibil determinat şi să se rezolve prin metoda matricială.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{cases}$$

4. Să se arate că sistemul:

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

este compatibil determinat şi să se determine soluţia sa folosind o metodă la alegerea voastă.

5. Să se arate că sistemul:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

este incompatibil.

6. Se consideră sistemele liniare şi omogene:

$$a)\ \begin{aligned} y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}, \quad b)\ \begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ -x + y + 5z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned} \quad c)\ \begin{aligned} 3x - y + z &= 0 \\ x - y + 4z &= \end{aligned}$$

Să se analizeze fiecare caz în parte şi să se deducă dacă admite doar soluţia banală sau şi soluţii nebanale şi să se determine mulţimea soluţiilor fiecărui sistem.

Indicaţie: Observaţi ca primul sistem are 3 ecuaţii şi 3 necunoscute, deci calculaţi determinantul matricii sistemului şi vedeţi dacă este 0 sau nu.

Al doilea sistem şi al treielea au număr diferit de ecuaţii şi necunoscute. Pentru acestea determinaţi rangul matricii sistemului, un determinant principal, necunoscutele principale şi secundare şi rezolvaţi ecuaţiile principale.

7. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_2 &= 0 \\ x_2 + 8x_3 &= -4 \\ 2x_3 &= 3 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$