Cursul 11

Valori şi vectori proprii ai unei matrici simetrice. Forme pătractice

11.1 Valori şi vectori proprii ale matricilor simetrice

O clasă particulară de matrici pătratice cu elemente reale este cea a matricilor simetrice faţă de diagonala principală, adică matrici $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, cu proprietatea că $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i, j = \overline{1, n}$. Cu alte cuvinte, o matrice pătratică A, cu elemente reale şi cu proprietatea $A^T = A$ este o matrice simetrică.

Exemplul 1. Matricile următoare sunt matrici simetrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 \\ -7 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Matricile simetrice cu elemente reale prezintă particularităţi în ceea ce priveşte valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători. Şi anume:

I. Polinomul caracteristic asociat unei matrici simetrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{P_n}(\lambda) = \mathbf{det}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I_n})$, are toate rădăcinile reale (deci nu are şi rădăcini complexe!)

II. La valori proprii distincte ale unei matrici simetrice corespund vectori proprii ortogonali.

Exemplul 2. Se dă matricea simetrică

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Să arătăm că polinomul caracteristic are trei rădăcini reale şi să determinăm câte un vector propriu corespunzător fiecărei rădăcini.

Polinomul caracteristic,

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) - 2(2-\lambda) = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda) - 2\right]$$

are rădăcinile $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$. Să determinăm un vector propriu v_1, corespunzător valorii $\lambda = 2$:

Coordonatele (x, y, z) ale vectorilor proprii sunt soluţii nebanale ale sistemului omogen de matrice $A - 2I_3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rangul matricii sistemului este 2. Alegând determinantul principal

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

notând $\alpha = z$, şi rezolvând sistemul:

$$\begin{aligned} 0x + 1y + 0\alpha &= 0 \\ 1x + 1y - 1\alpha &= 0 \end{aligned}$$

obţinem că vectorii proprii sunt de forma $v = \alpha(1, 0, 1)^T, \alpha \in \mathbb{R}$ Alegem $v_1 = (1, 0, 1)^T$. În mod analog, determinăm vectorii proprii:

$$v_2(1, -1, -1)^T, v_3, (1, 2, -1)^T$$

corespunzători, respectiv valorilor proprii $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$. Să verificăm ortogonalitatea lor:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= (1, 0, 1) \cdot (1, -1, -1) &= 0 \\ v_1 \cdot v_3 &= (1, 0, 1) \cdot (1, 2, -1) &= 0 \\ v_2 \cdot v_3 &= (1, -1, -1) \cdot (1, 2, -1) &= 0 \end{aligned}$$

Proprietatea **II** şi acest exemplu, ne indică faptul că dacă o matrice simetrică de tip $n \times n$ are valorile proprii distincte două câte două, atunci în $\mathbb{R}^n$ se poate construi o bază ortonormată formată din vectori proprii ai lui A. În exemplul de mai sus, vectorii $(v_1 = (1, 0, 1)^T, v_2 = (1, -1, -1)^T, v_3 = (1, 2, -1)^T)$ constituie o bază ortogonală formată din vectori proprii. Baza ortonormată de vectori proprii se obţine, normalizând vectorii v_1, v_2, v_3, adică luând versorii lor:

$$\mathcal{B}' = (u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1), u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1))$$

11.2 Forme pătratice definite pe $\mathbb{R}^n$

Definiţia 11.2.1 *Fie A o matrice simetrică $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$. Aplicaţia $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ care asociază unui vector v ce are in baza canonica coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$,*

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

un număr real, prin $Q(v) = v^T A v$, se numeşte formă pătratică.

Mai precis,

$$Q(v_{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

Efectuând produsele, obţinem expresia analitică a formei pătratice Q, relativ la baza $\mathcal{B}$:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \dots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n$$

Exemplul 3. Forma pătratică definită pe $\mathbb{R}^2$:

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

Această expresie ilustrează de ce funcţia se numeşte pătratică: expresia ei este o sumă de termeni de grad 2 în x_1, x_2, adică ceea ce se numeşte **polinom omogen de grad 2**.

Dacă cunoaştem expresia analitică a unei forme pătratice $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, adică un polinom omogen de grad 2 în $x_1, x_2, \dots, x_n$, matricea simetrică ce o defineşte conform relaţiei $Q(v) = v^T A v$ se determină astfel:

• coeficienţii pătratelor $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ sunt respectiv elementele $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ din matricea simetrică A;

• coeficienţii produselor x_ix_j împărţiti la 2 sunt elementele a_{ij} şi a_{ji} din matricea A, $i, j = \overline{1, n}$.

Exemplul 4. Se dă forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 6x_1x_3 - 5x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2$. Matricea simetrică asociată este:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -5 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

O formă pătratică ia valori reale care pot fi pozitive, negative sau zero.

Definiţia 11.2.2 *O formă pătratică Q definită de matricea simetrică A este formă pătratică nedegenerată dacă $det(A) \neq 0$ şi formă pătratică degenerată dacă $det(A) = 0$.*

Definiţia 11.2.3 *Forma pătratică $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ care ia valori strict pozitive oricare ar fi vectorul $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}$ se numeşte formă pătratică pozitiv definită. Dacă Q ia valori strict negative oricare ar fi $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}$ atunci ea se numeşte formă negativ definită. Dacă pe anumiţi vectori Q ia valori pozitive, iar pe alţii negative, atunci Q se numeşte formă pătratică nedefinită.*

Analizând expresia analitică a formei pătratice din Exemplul 4 este greu să ne pronunţam dacă ea este pozitiv definită, negativ definită sau nedefinită. Este însă foarte simplu să indicăm tipul formei pătratice dacă ea conţine doar termeni în x_i^2, $i = \overline{1, n}$.

Exemplul 5. Forma pătratică $Q(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2$ este evident negativ definită, forma $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 6x_3^2$ este nedefinită, deoarece $Q(1, 0, 1) = 2 + 6 = 8 > 0$, iar $Q(0, 1, 0) = -1 < 0$.

Observăm că putem deduce rapid tipul unei forme pătratice dacă ea este definită de o matrice diagonală, care evident este simetrică:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

O formă pătratică a cărei matrice de definiţie este diagonală se zice că este în *forma canonică*.

Deoarece o matrice simetrică este similară cu matricea diagonală a valorilor sale proprii, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n)$, se poate demonstra că:

• dacă toate valorile proprii ale matricii unei forme pătratice sunt strict pozitive, forma este pozitiv definită;

• dacă toate valorile proprii ale matricii unei forme pătratice sunt strict negative, forma este negativ definită;

• dacă matricea A are valori proprii şi pozitive şi negative, atunci forma pătratică este nedefinită.

• Dacă matricea A are cel puţin o valoare proprie egală cu 0, atunci forma pătratică este degenerată şi nu putem spune dacă este pozitiv definită, negativ definititā sau nedefinită.

Exemplul 6. Să se determine tipul formei pătratice: $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$.

Forma pătratică Q este definită de matricea simetrică:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

care are valorile proprii $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Deoarece amble sunt strict pozitive, forma pătratică este pozitiv definită.

Prin urmare, când se dă o formă patratică $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, i se determină matricea A (care este o matrice simetrică).

Tipul formei pătratice se determina calculând valorile proprii ale matricii A şi analizând semnele valorilor proprii.

In analiza matematică unei funcţii $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de clasă C^2 i se asociază matricea simetrică $\text{Hess}(f)(x_0)$ a derivatelor de ordin 2 într-un punct (x_0), numită Hessiana funcţiei în acest punct. Elementele a_{ij} ale acestei matrici sunt:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0), i, j = \overline{1, n}$$

Dacă x_0 este un punct critic al funcţiei f, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, \forall\ i = \overline{1, n},$$

atunci tipul formei pătratice având ca matrice, matricea Hessiană în x_0 indică dacă punctul x_0 este punct de maxim, minim, sau punct şa.

În Fig.11.1 este ilustrat graficul unei forme pătratice $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$, pentru cazul Q – pozitiv definită $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$, negativ definită, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ şi respectiv nedefinită, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Observăm că în primul caz $(0, 0)$ este punct de minim, pentru că $Q(x_1, x_2) > 0$, $\forall\ v = (x_1, x_2)^T \neq 0$, în al doilea este punct de maxim şi în al treielea este punct şa. La analiză aţi învăţat că o funcţie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clasă C^r pe D, $r \geq 2$, este aproximată în vecinătatea unui punct critic (x_{01}, x_{02}) de o astfel de formă pătratică şi deci tipul extremal al punctului critic depinde de tipul punctului $(0, 0)$ pentru forma pătratică asociată.

În probleme economice funcţia f poate fi funcţia profit şi determinarea posibilităţii obţinerii unui profit maxim, sub anumite restricţii, revine practic la a determina tipul unei forme pătratice. De exemplu, să determinăm hessiana funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$, în punctul său critic. Derivatele parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3x$$

se anulează(iau valoarea zero) în punctul $(0, 0)$. Deci acesta este punctul critic al funcţiei f.

Derivatele partiale de ordin 2 ale funcţiei f sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

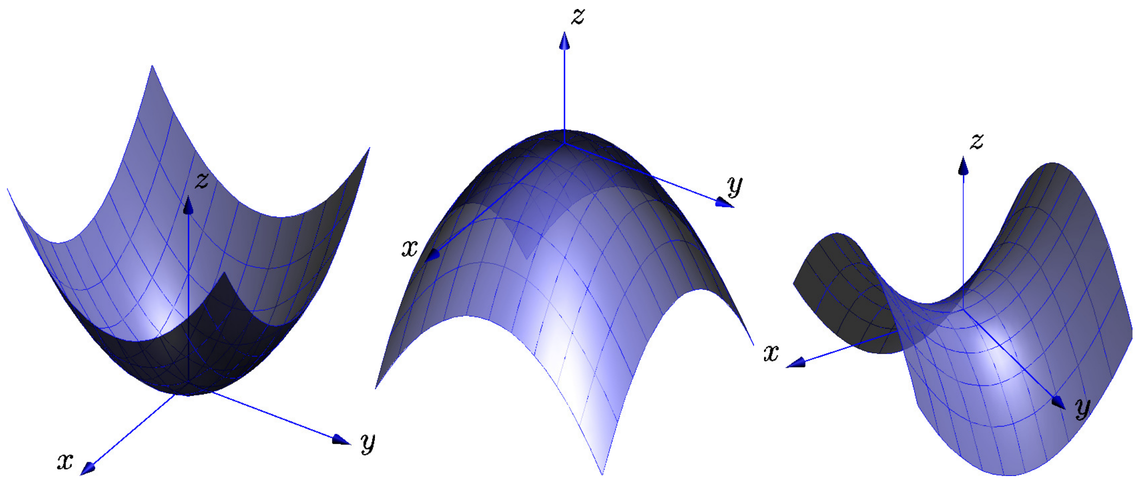

Fig.11.1: Graficele a 3 forme pătratice aduse la forma canonică, $q(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$: stânga, forma este pozitiv definită, centru, negativ definită şi cea din dreapta, nedefinită.

Astfel matricea hessiană lui f în $(0,0)$ este:

$$Hess(f)(0,0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Această matrice simetrică are valorile proprii $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$, deci forma pătratică asociată este nedefinită, iar punctul $(0,0)$ este punct şa pentru funcţia f.