Probleme de antrenament pentru examen

1.

a)Să se verifice dacă sistemul de vectori $v_1 = (-2, 1, 5)^T, v_2 = (-5, -8, 8)^T, v_3 = (1, 3, -1)^T \in \mathbb{R}^3$ este liniar independent sau dependent şi în caz de dependenţă să se determine relaţia dintre ei.

b) Daţi definiţia versorului unui vector nenul, $w \in \mathbb{R}^n$. Cât este norma unui versor? Se dau vectorii $u = (1, 2, 1)^T$, $v = (0, -1, 3)^T$. Să se calculeze cosinusul unghiului dintre cei doi vectori şi versorul lui $w = -2u - v$.

2. a) Ce este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$? Pornind de la vectorii $v = (0, -1, 3)^T$, $u = (1, 2, 1)^T$ şi efectuând produse vectoriale succesive să se construiască o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$.

b) Să se scrie ecuaţia planului ce conţine punctul $M(-1, 1, 2)$ şi este perpendicular pe dreapta:

$$d : \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{-2}$$

Desenaţi dreapta şi planul!.

c) O formă pătratică $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este definită de matricea simetrică $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Determinaţi expresia analitică a formei pătratice şi apoi calculaţi valorile proprii ale matricii A. Deduceţi analizând semnul valorilor proprii dacă forma pătratică este pozitiv definită, negativ definită sau nedefinită.

3. a) Se dă sistemul $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicând teorema lui Kronecker Capelli să se verifice dacă sistemul este compatibil sau incompatibil şi în caz de compatibilitate să se determine mulţimea soluţiilor. Pentru rezolvare puteţi recurge şi la calculul formei scară a matricii prelungite $\overline{A} = [A|b]$.

b) Să se verifice dacă coloanele matricii

$$A = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

sunt vectori liniar independenţi sau dependenţi şi în caz de dependenţă să se determine relaţia dintre ei.

c) Daţi definiţia versorului unui vector nenul, $w \in \mathbb{R}^n$. Cât este norma unui versor? Se dau vectorii $u = (1, -2, 3)^T$, $v = (0, -1, 2)^T$. Să se calculeze cosinusul unghiului dintre cei doi vectori şi versorul lui $w = 4u - 3v$.

4. a) Ce este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$? Pornind de la vectorii $v = (2, -1, 0)^T$, $u = (1, 2, 3)^T$ şi efectuând produse vectoriale succesive să se construiască o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$.

b) Se dă matricea $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculaţi $A = B^T B$. Este matricea A simetrică?

Să se scrie ecuaţia planului ce conţine punctul $M(-2, 5, 2)$ şi este perpendicular pe dreapta:

$$d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{3}$$

Desenaţi dreapta şi planul!.

c) O formă pătratică $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este definită de matricea simetrică $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Determinaţi expresia analitică a formei pătratice şi apoi calculaţi valorile proprii ale matricii A. Deduceţi analizând semnul valorilor proprii dacă forma pătratică este pozitiv definită, negativ definită sau nedefinită.

5. a) În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se dă baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ şi baza

$$\mathcal{B}' = (v_1 = (3, 2, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 2, 0)).$$

Să se determine matricile de trecere $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ şi $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ şi coordonatele vectorului $v = (3, 2, -2)$ relativ la baza $\mathcal{B}'$.

d) Cum se defineşte produsul scalar a doi vectori din $\mathbb{R}^n$, $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$? Dar norma $\|v\|$?

În ce condiţii vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ se numesc vectori liniar dependenţi?

6. a) Fie $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ un vector nenul. Definiţi versorul direcţiei şi sensului lui v şi deduceţi formula de calcul a versorului. Este vectorul $u = (\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})^T \in \mathbb{R}^3$ un versor?

b) În $\mathbb{R}^3$ se dă baza

$$\mathcal{B}' = \left(u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)^T, u_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \right)$$

a) Să se verifice că $\mathcal{B}'$ este o bază ortonormată şi să se determine coordonatele vectorului $v = (-2, 0, 1)$ relativ la baza $\mathcal{B}'$.

7. a) Când un vector $v \in \mathbb{R}^n$ se numeşte vector propriu al unei matrici A de tip $n \times n$? Cum se calculează polinomul caracteristic al lui A?

b) Se da matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Valorile sale proprii sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 3$. Să se determine vectorii proprii corespunzatori

c) Să se determine ecuaţiile dreptei d ce trece prin originea axelor de coordonate, $O(0, 0, 0)$ şi este paralelă cu dreapta:

$$d' : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{5}$$

Să se determine panta tangentei şi a normalei la curba Γ de ecuaţie $y = \ln x$ în punctul $A(1, 0)$.

8. a) Fie Γ o curbă plană diferenţiabilă, parametrizată de $r(t) = (x(t), y(t)), t \in I$. Care este direcţia vectorului tangent la curbă într-un punct arbitrar?

b) Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Sa se determine valorile si vectorii proprii corespunzatori.

c) Se dă planul π de ecuaţie $-2x + y + 11z - 1 = 0$. Care este vectorul director al normalei la plan? Să se scrie ecuaţiile dreptei d ce este perpendiculară pe planul π şi trece prin punctul $M(0, -2, 1)$.

Ce ecuaţie are planul xOy din spaţiul $\mathbb{R}^3$?

9. b) O matrice $A \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{R})$, $A = [v_1|v_2|v_3|v_4|v_5]$, are forma scară redusă:

$$S_A^0 = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Să se precizeze rangul matricii A şi dacă sistemul de vectori $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ este liniar dependent sau independent. Dacă este dependent, scrieţi relaţiile de dependenţă ce se citesc din forma scară redusă.

10. a) Fie $v = (1, -2, 0)^T$, $w = (2, 3, -1)^T$. Să se calculeze produsul vectorial $u = v \times (v \times w)$ şi să se verifice că u este ortogonal pe $v \times w$.

b) Ce este o matrice simetrică? Să se arate că matricea $A = MM^T$, unde $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, este o matrice simetrică. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători pentru matricea A.

c) Să se determine ecuaţia planului (π) ce conţine punctul $P(-2, 1, 3)$ şi direcţiile vectorilor $v_1 = 2\mathbf{i} - j + 5\mathbf{k}$ şi v_2, unde v_2 este vectorul director al dreptei:

$$\frac{x+3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{0}$$

11. a) Să se verifice dacă sistemul următor are doar soluţia banală sau şi soluţii nebanale. Dacă admite şi soluţii nebanale, deduceţi care sunt acestea:

$$\begin{cases} 2x + 0y - 3z &= 0 \\ 3x + 5y - 10z &= 0 \\ x - 5y + 4z &= 0 \end{cases}$$

b) În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$ se dă baza canonică $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ şi baza $\mathcal{B}' = (u_1 = (1,2)^T, u_2 = (-1,3)^T)$. Să se determine matricile de trecere $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, $T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ şi coordonatele vectorului $v = (-7,3)^T$ în baza $\mathcal{B}'$?

c) Să se determine un vector din $\mathbb{R}^3$ simultan perpendicular pe vectorii $v = (-1,2,0)^T$, $w = (3,-2,1)^T$. Calculaţi apoi norma vectorului $w \times v$.

12. a) Să se determine valorile proprii λ_1, λ_2 şi vectorii proprii v_1, v_2 ai matricii

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

b) Fie $A(1,1,2), B(-3,0,1)$ două puncte. Să se determine vectorul $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AB}$. Să se scrie ecuaţiile dreptei ce trece prin punctul A şi are direcţia $\overrightarrow{d}$.

13. a) O formă pătratică $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este definită de matricea simetrică $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Determinaţi expresia analitică a formei pătratice şi apoi calculaţi valorile proprii ale matricii A. Deduceţi analizând semnul valorilor proprii dacă forma pătratică este pozitiv definită, negativ definită sau nedefinită.

b) O curbă plană este parametrizată de $r(t) = (\underbrace{5\sin(t)}_{x(t)}, \underbrace{3t^2+1}_{y(t)})$. Să se determine vectorul viteză (tangent), $\dot{\overrightarrow{r}}(t)$, într-un punct arbitrar al curbei şi apoi în punctul A corespunzător lui $t = 0$.

14. Să se arate că baza:

$$\mathcal{B}' = (u_1 = (\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}})^T, u_2 = (\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}})^T, u_3 = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T)$$

este ortonormată şi să se determine coordonatele vectorului $v = (1,2,-3)^T$ relativ la baza $\mathcal{B}'$ fără a folosi matricea de trecere, ci doar exploatând faptul că baza este ortonormată.

15. a) Folosind procedeul lui Schmidt să se construiască în $\mathbb{R}^3$ o bază ortornomată, $\mathcal{B}'$, pornind de la baza $\mathcal{B} = (v_1 = (1,0,0), v_2 = (2,0,1), v_3 = (2,1,1))$. Să se determine apoi matricea de trecere de la baza canonică la baza ortonormată construită şi matricea de trecere inversă.

b) Să se determine vectorul director al dreptei d de intersecţie a planelor:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ -2x + y + 5z - 11 = 0 \\ \pi_2 &: \ x + 3y - 2z + 7 = 0 \end{aligned}$$

Să se determine vectorul viteza $\dot{r}(t)$ în punctul $A(t=0)$ al curbei parametrizată de $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$.

16. a) Se dă matricea

$$A = [v_1|v_2|v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Este sistemul de vectori $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, v_3\}$ un sistem de vectori ortogonali din $\mathbb{R}^3$? Să se calculeze produsul vectorial $v_1 \times v_2$ şi să se arate că acesta are direcţia vectorului v_3.

Folosind procedeul Gramm-Schmidt sa se contruiasca din baza $\mathcal{B} = (f_1 = (1, -2)^T, (-3, 4)^T)$ o bază ortogonală.