Algebră liniară, Tema 10

Valori şi vectori proprii

1. Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic asociat are rădăcinile $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_{2,3} = a \pm ib$ Admite A vectori proprii? Nu răspundenţi prin da sau nu, ci daţi explicaţii. Dacă admite, determinaţi vectorii proprii corespunzători.

2. Să să determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători ai matricii:

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Să se arate că matricea

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

are 2 valori proprii distincte. Calculaţi vectorii proprii corespunzatori.

4. Se dă matricea simetrică

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) să se determine valorile proprii, şi vectorii proprii corespunzători.

b) Verificaţi ca vectorii proprii corespunzători la valori proprii diferite sunt ortogonali.

5. Să se arate că există în $\mathbb{R}^2$ o bază formată din vectori proprii ai matricii:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Să se determine matricile T şi D astfel încât $A = TDT^{-1}$, unde D este matricea diagonală a valorilor proprii.

6. Să se arate că matricea

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

este similară cu o matrice diagonală şi apoi să se scrie A în forma $A = TDT^{-1}$ şi să se calculeze A^{100}.