

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C1

Modelarea și optimizarea sistemelor de producție

1.1. Introducere în modelare

Metodele matematice de modelare aparțin cercetării operaționale. Cercetarea operațională se utilizează în diverse organizații și sisteme, în managementul acestora. Se consideră că cercetarea operațională a apărut și s-a dezvoltat în timpul celui de-al doilea război mondial, dar primele sale rădăcini sunt mult mai vechi. Între cele două războaie mondiale tehnica militară s-a dezvoltat mult mai repede decât tactica și strategia. În timpul celui de-al doilea război mondial germanii au început atacul aerian asupra Angliei, iar conducătorii militari englezi au cerut ajutorul oamenilor de știință pentru a se apăra mai bine. Una dintre problemele ce s-au cerut oamenilor de știință a fost să ajute la o utilizare eficientă a radiolocatoarelor care erau nou apărute. S-au format mici echipe interdisciplinare de cercetători din diverse domenii ale științei atașate unui ofițer care aparținea de sectorul operațiilor de luptă. Această experiență pozitivă a fost preluată și de ceilalți aliați: SUA, Franța, Canada. Această activitate a primit denumirea de *cercetare operațională* (operational research) în Anglia și diverse alte denumiri în SUA: analiză operațională (operational analysis), evaluarea operațiilor (operations evaluation), cercetarea operațiilor (operations research), știința conducerii (management science), analiza sistemelor (systems analysis). S-a impus termenul de cercetare operațională (operational research).

După terminarea războiului, o parte dintre specialiștii în cercetarea operațională au părăsit armata și au început să activeze în industrie sau în universități. Succesele obținute prin utilizarea cercetării operaționale în domeniul militar și în industrie, precum și dezvoltarea calculatoarelor, au dus la răspândirea și dezvoltarea sa în întreaga lume.

S-au dat definiții cercetării operaționale, acceptate sau nu, sau există păreri că nu poate fi definită. Se amintește totuși că cercetarea operațională reprezintă aplicarea metodelor științifice de către o echipă interdisciplinară la studiul problemelor legate de conducerea sistemelor organizate cu scopul obținerii unor soluții care să servească cât mai bine interesele organizației în ansamblu.

Cercetarea operațională a fost introdusă ca și disciplină de studiu în tot mai multe universități din lume, inclusiv din România, având un rol important în pregătirea managerilor, matematicienilor, informaticienilor, inginerilor economiști, inginerilor, economiștilor, sociologilor.

Prin **organizații** se înțeleg diversele entități socio-tehnice (firme, instituții civile, armata, școli etc.).

Există multe definiții ale conceptului de sistem. Definiția dată de L. A. Zadeh, care consideră că **sistemul** este: "un ansamblu de elemente legate între ele prin forme de interacțiune sau interdependență". **Sistemul** este o reunire de elemente care interacționează între ele și care funcționează în scopul realizării unui obiectiv comun.

Orice sistem are o structură, are: intrări în sistem, ieșiri din sistem, procese care transformă intrările în sistem în ieșiri. Un sistem este format din subsisteme și aparține unui sistem mai cuprinzător. Mecanismul transformării intrărilor în ieșiri poate fi descris cu ajutorul funcțiilor de transfer, care au diverse forme, particulare, după natura sistemului. Sistemul devine cibernetic atunci când apare reglarea (conexiunea inversă, feedback-ul), adică o intervenție asupra intrărilor în scopul menținerii ieșirilor la nivelul unor parametri-obiectiv doriți.

Câteva principii ale teoriei sistemelor:

- a) orice sistem este alcătuit din elemente sau părți interdependente, acționând în comun în virtutea unui scop, a unui obiectiv;
- b) ansamblul legăturilor între elementele sistemului, precum și al legăturilor cu întregul, formează structura sistemului;
- c) complexitatea sistemelor depinde mai mult de structura sistemului decât de natura părților

sale;

d) două sisteme cu structuri parțial identice se numesc homomorfe, iar sistemul mai simplu va constitui un model al sistemului homomorf mai complex;

e) două sisteme homomorfe vor avea un comportament asemănător, de unde rezultă posibilitatea de studiu a proprietăților sistemelor reale prin modelare și simulare;

f) structura unui sistem, adică structura sa statică, preexistă comportamentului său, deci dinamicii sistemului;

g) mișcările într-un sistem se realizează prin fluxuri presupuse concrete și continue;

h) într-o unitate economică toate categoriile de mișcări pot fi grupate în următoarele tipuri de fluxuri interconectate:

- 1) fluxuri materiale;
- 2) fluxuri de comenzi;
- 3) fluxuri bănești;
- 4) fluxuri umane;
- 5) fluxuri de echipamente;
- 6) fluxuri informaționale;

i) fluxul informațional are un rol central în funcționarea sistemelor;

j) procesele decizionale sunt considerate și ele ca având un rol central în mecanismul sistemelor; ele sunt presupuse a fi discontinue;

k) reglarea este un element caracteristic al funcționării sistemelor;

Sistemul de producție este constituit din totalitatea elementelor fizice, naturale și artificiale, conceptelor (teorii, metode, reguli), experienței și îndemnării, astfel organizate încât să rezulte capacitatea de realizare a unor scopuri prestabilite, derivate din obiectivele economico-sociale.

Un sistem de producție transformă, în principiu, într-o perioadă de timp anumite intrări (forța de muncă, substanță, energie, informație) în ieșiri de tip produse, servicii, informații despre produs sau serviciul realizat, deșeuri. Transformarea este orientată spre realizarea unor obiective de producție prestabilite de om și implică procese de muncă specifice, în care oamenii acționează cu ajutorul mijloacelor de muncă (unelte, echipamente, mașini, aparate, recipiente, clădiri etc.) asupra obiectelor muncii (materiale naturale sau obiecte fabricate, energie, informație), obținând ca rezultate dorite produsele (bunuri materiale) sau serviciile (activități utile ce satisfac o anumită nevoie socială), iar ca rezultate nedorite deșeurile (resturi ce nu mai pot fi valorificate în cadrul sistemului de producție care le-a realizat) și elemente poluante.

Timpul, intrările sistemului de producție și mijloacele de muncă, considerate sub aspect potențial, formează **resursele** sistemului de producție.

Problemele referitoare la **fluxurile materiale** pot fi încadrate în logistică și pot fi rezolvate cu metode ale cercetării operaționale. Fluxul material se referă la circulația continuă (pe un anumit orizont de timp) a materialelor, materiei prime, semifabricatelor sau produselor finite în succesiunea operațiilor tehnologice, de aprovizionare sau de distribuție. Logistica studiază probleme legate de transportul, livrarea la termenul solicitat cu costuri minime a cantității de produse comandate, depozitarea acestora, deci probleme de aprovizionare, transport, distribuție, așteptare, stocuri, depozitare, control. Se poate discuta de logistica internă sau logistica producției pentru activități logistice din interiorul firmei și logistica externă care se referă la activități logistice din exteriorul firmei (logistica aprovizionării și logistica distribuției).

Modelarea și optimizarea se vor referi la sisteme, subsisteme sau elemente ale acestora.

Prin optim se înțelege cel mai bun sau foarte bun. Optimizarea reprezintă alegerea și aplicarea soluției optime dintre mai multe posibile.

Cuvântul model este utilizat în viața de zi cu zi, în vorbirea curentă, având mai multe înțelesuri, cum ar fi: modele în modă, modele în artă, modele în știință și în tehnică. În domeniul științei prin model se înțelege un sistem teoretic sau material cu ajutorul căruia se pot studia

indirect proprietățile și evoluția unui sistem mai complex care este considerat sistem original, față de care modelul prezintă o anumită analogie.

Un **model** este o reprezentare simplificată sau abstractizată a realității. Adesea în practică este dificil a se obține simultan caracteristici simplificate și reprezentative ale realității studiate. **Modelul** este un sistem teoretic (logico - matematic) sau material cu ajutorul căruia pot fi studiate indirect proprietățile și funcționarea unui alt sistem mai complex (sistemul original), cu care modelul prezintă o anumită analogie. Modelele constituie reprezentări ale realității.

Alegerea unor modele și metode matematice se face funcție de condițiile concrete ale firmei, de informațiile ce se pot colecta și procesa în timp util, de costul acestora, de puterea concurenților, pentru a obține avantajul concurențial. Folosirea modelelor matematice, a metodelor de optimizare și a tehnologiei informației în managementul și activitatea firmei duc la creșterea eficienței sale, la avantajul competitiv al costurilor joase și a calității mai bune a produselor oferite pieței.

Un model este caracterizat de următoarele elemente:

- 1) este o imagine incompletă a unei realități existente sau care urmează să fie construită;
- 2) trebuie validat prin criteriul practicii în vederea determinării gradului sau de utilitate și a aplicării sale (cu excepția celor care simulează consecințele defavorabile);
- 3) este utilizat în vederea previzionării comportării în diferite situații a procesului pe care îl simulează.

Se vor prezenta câteva **principii ale modelării matematice a proceselor economice**.

1. Orice model se bazează pe o teorie economică creată în prealabil pentru a explica procesul modelat, iar parametrii cu care operează sunt, de regulă, categorii economice sau laturi ale acestora.

2. Modelele fac abstracție de o serie de laturi și particularități ale procesului reflectat, menținându-și însă rolul cognitiv. Izomorfismul modelelor (identitatea cu realitatea) nu este o condiție absolut obligatorie pentru ca un obiect să fie modelul altui obiect.

3. Modelul exprimă similitudinea nu numai a unui proces economic izolat, ci a unei întregi clase de asemenea procese, astfel încât orice model este o generalizare, o sinteză de un anumit grad. Cu cât aria proceselor reprezentate prin model este mai mare, cu atât gradul de generalizare și de sinteză al acestuia este mai important.

4. Un model nu poate fi construit fără a se apela la un sistem de simboluri, care pot reprezenta categorii economice și care nu se suprapun peste alfabetul curent sau cifrele utilizate în calcule.

Se vor analiza câteva **clasificări ale modelelor**.

1. După natura fizică a elementelor modelului, există trei tipuri fundamentale de modele: *iconice, fizice-analogice și matematice sau simbolice*.

Un *model iconic* este identic în mic sau în mare cu obiectul pe care îl reprezintă, de exemplu, modelul unui avion sau al unei mașini (reduc la scară) sau modelul unui atom (mărit la scară).

Un *model fizico-analogic* înlocuiește o proprietate cu alta, iar problema este rezolvată în starea substituentă și apoi soluția obținută este raportată la dimensiunile sau proprietățile originalului.

Modelele matematice sau simbolice sunt modele abstracte și generale, fiind constituite din relații și funcții matematice.

2. În funcție de probabilitatea ca un element să aparțină sau nu unei mulțimi și a gradului de apartenență a unui element la o mulțime, modelele matematice sunt: *deterministe, stochastice și fuzzy (vagi)*.

Modelele deterministe sunt caracterizate de variabile și relații sigure, realizabile cu probabilitatea 1, se cunosc exact.

În *modelele stochastice* (probabilistice) unele variabile ce descriu procesul studiat sunt variabile aleatoare, deci variabilele iau anumite valori cu anumite probabilități.

Modelele fuzzy (vagi) folosesc matematica fuzzy, având variabile care nu se pot caracteriza nici exact (determinist) și nici în probabilitate, putându-se face aprecieri calitative asupra valorilor pe care le iau. Se pune problema deosebirii între aleator (stochastic) și fuzzy (vag). Fenomenul aleator rezultă din nesiguranța în ceea ce privește apartenența sau neapartenența unui element la o mulțime, existând diferite probabilități. În cazul unui fenomen de natură fuzzy (vag) există grade de apartenență între apartenența și neapartenența unui element la o mulțime și nu se bazează pe principiul terțiului exclus din logica matematică bivalentă. Fenomenele fuzzy au la bază logica fuzzy care este o logică continuă și care generalizează logica bivalentă și logicile n-valente care sunt discrete.

3. După natura variabilelor, există modele discrete și modele continue. Modele se pot clasifica și în funcție de **tipul sistemului** pe care îl reprezintă. Într-un model, starea unui sistem poate fi definită de variabilele de stare de natură deterministă sau probabilistă. Variabilele de stare pot descrie un sistem în orice moment al funcționării sale. În funcție de modul în care starea sistemelor se poate schimba, sistemele se clasifică în *sisteme continue* și *sisteme discrete*, deci există *modele ale sistemelor continue* și *modele ale sistemelor discrete*. Un sistem este continuu dacă starea sistemului (variabilele de stare) se modifică continuu în timp, sunt numere reale. Un sistem este discret dacă starea sistemului se modifică la anumite momente discrete de timp, care pot fi puse în corespondență cu mulțimea numerelor naturale, care nu sunt în mod necesar egale.

4. În funcție de importanța timpului în analiza rezultatelor, *modelele* pot fi *statice* sau *dinamice*

Modelul este considerat *static* dacă, din punct de vedere al analizei, este important numai rezultatul final și nu modul în care se modifică sistemul în timp. De exemplu, multe modele financiare descriu situația financiară a unei organizații sau a unei persoane fizice la sfârșitul unei perioade de timp.

Modelul este considerat *dinamic* dacă, din punct de vedere al analizei, este important modul în care se modifică sistemul în timp.

În realitate, toate sistemele sunt dinamice. Cu toate acestea multe probleme nu necesită luarea în considerare a aspectelor dinamice. Prin urmare, dacă o problemă de modelare este dinamică sau statică depinde de întrebările pentru care se așteaptă un răspuns.

5. După obiectul cercetării și nivelul de structură, de grupare a entităților studiate, există modele microeconomice și modele macroeconomice. Deci, după întinderea domeniului studiat, modelele care descriu realitatea economică pot fi:

- modele *macroeconomice* – sunt cele care se referă la economia națională, la o ramură, o subramură sau la economia unui teritoriu mare: o regiune, un județ, o anumită zonă industrială, sau agricolă etc.;

- modele *microeconomice* – sunt la nivel de firmă, de întreprindere, uzină, combinat etc.

Optimizarea se poate face, în funcție de problema concretă de rezolvat, în una din următoarele două variante:

- *Principiul maximizării rezultatelor*, adică realizarea maximă a unui obiectiv în condițiile utilizării resurselor disponibile, relațiile (1);

- *Principiul minimizării consumului de resurse*, adică realizarea obiectivului cu utilizarea a minimum de resurse alocate, relațiile (2).

Matematic, prima variantă se exprimă prin maximizarea funcției obiectiv ca în (1), iar a doua variantă prin minimizarea funcției obiectiv ca în (2), dar nu se optimizează simultan ambele variante.

După **natura modelului matematic optimizarea** poate fi:

- *optimizare deterministă* - se folosește când toate elementele modelului matematic sunt certe, sigure, realizabile cu probabilitatea 1;
- *optimizare stochastică* – se utilizează când modelul matematic cuprinde elemente care iau anumite valori cu anumite probabilități, deci cuprinde cel puțin o variabilă aleatoare;
- *optimizare fuzzy* - se folosește când modelul matematic are elemente care prezintă diverse grade de apartenență la o mulțime, utilizând matematica fuzzy

Modelele matematice sunt constituite dintr-un sistem de relații matematice între variabilele sistemului sau procesului modelat, cu sau fără restricții.

Modelarea și optimizarea sunt legate de rezolvarea unor *probleme* apărute în organizația, în sistemul studiat. Prin *problemă* se înțelege o dificultate, o situație dificilă, care nu poate fi depășită automat și presupune o cercetare, o rezolvare, științifică sau empirică.

O problemă are în structura sa trei componente: *baza*, *generatorul* (geneza) și *soluția*.

Baza unei probleme se constituie din informațiile și cunoștințele existente relativ la domeniul în care este formulată problema care pot apărea sub diferite formulări în conținutul problemei, dar nu sunt puse sub semnul întrebării și nu fac obiectul cercetării. *Generatorul* (geneza) unei probleme cuprinde mulțimea cauzelor care au determinat apariția problemei, iar dintre acestea una (sau câteva) este principală, iar altele sunt secundare. *Soluția* problemei poate exista sau nu, poate lipsi temporar sau definitiv (dacă problema este insolvabilă).

Pentru existența unei probleme, sunt necesare câteva condiții:

- trebuie să existe un individ interesat în rezolvarea problemei în anumite condiții;
- la dispoziția individului interesat trebuie să existe cel puțin două posibilități, (strategii) de acțiune, dintre care se alege una;
- trebuie să existe cel puțin două rezultate posibile ca urmare a alegerii făcute, iar unul dintre rezultate trebuie să fie preferabil celorlalte și reprezintă obiectivul ce trebuie atins;
- posibilitățile de acțiune ale individului interesat au șanse diferite de a-și atinge obiectivul.

Problema există, dacă aceste condiții sunt satisfăcute și individul interesat nu știe care strategie este mai bună, deci va dori rezolvarea ei.

Noțiunea de problemă are două aspecte în tratare: aspectul psihologic al problemei (actul întrebării) și aspectul lingvistic (modalitatea de exprimare a întrebării într-un limbaj). Aspectul psihologic al problemei se referă la faptul că formularea acesteia presupune delimitarea clară în timp și spațiu a componentelor situației decizionale aferente, existând în structura problemei decizionale:

- variantele (strategiile) de acțiune care reprezintă căile de rezolvare a problemei date;
- criteriile de decizie care cuprind regulile după care va fi aleasă una dintre variantele (strategiile) de acțiune;
- stările naturii în contextul cărora se desfășoară procesul analizat;
- consecințele acțiunilor reprezintă rezultatele anticipate ale implementării variantelor (strategiilor) de acțiune în diferite stări ale naturii.

Exprimarea clară și precisă a unei probleme presupune formularea ei ca o propoziție interogativă, ca întrebare, iar întrebarea reprezintă forma lingvistică naturală și directă de exprimare a unei probleme. O problemă trebuie formulată corect și să fie delimitată de alte probleme cu care este în interdependență pentru a putea fi rezolvată. O problemă este *bine formulată* dacă este *bine concepută* (nici o ipoteză să nu fie falsă) și *bine enunțată*. Se spune că o problemă bine enunțată este pe jumătate rezolvată.

Rezolvarea unei probleme de optimizare poate fi structurată în etapele:

- formularea (enunțul) problemei;
- construcția modelului matematic;
- obținerea soluției optime;
- testarea modelului și a soluției optime;
- implementarea și actualizarea soluției optime.

1. 2. Simulare

Simularea este o experimentare pe model. **Simularea** este o tehnică de realizare a experimentelor cu calculatorul, care implică utilizarea unor modele matematice și logice care descriu comportarea unui sistem real (sau a unor componente ale sale) de-a lungul unei perioade mari de timp.

Există două variante ale simulării: simularea Monte Carlo și simularea de tip joc.

Simularea Monte Carlo este o tehnică de simulare legată mai mult de probleme cu caracter aleator, dar se utilizează și la rezolvarea unor probleme deterministe care nu pot fi rezolvate ușor prin metode deterministe.

Simularea de tip joc se referă la acele situații care se caracterizează printr-un conflict între anumiți parteneri sau între om (care trebuie să ia anumite decizii) și natură (care îi oferă omului mai multe variante urmând ca el să o aleagă pe cea mai convenabilă).

Cuvântul "simulare" este de origine latină, provenind de la "simulatio", care înseamnă capacitatea de a reproduce, reprezenta sau imita ceva. După construirea modelului de simulare, simularea în sine, ca experiment pe model, constă în a varia diversele caracteristici ale sistemului (valorile variabilelor, ale parametrilor de intrare) și a deduce pe baza modelului, ca rezultat al calculelor, efectele lor asupra altor caracteristici ale procesului (variabile de ieșire). În problemele de simulare trebuie generate numere aleatoare și variabile aleatoare a căror calitate trebuie testată.

Simularea poate fi aplicată atât în studiul sistemelor statice cât și dinamice precum și în studiul sistemelor discrete cât și continue.

În cazul sistemelor statice stochastice se aplică simularea Monte Carlo, iar în cazul sistemelor stochastice dinamice se poate alege dintre simularea evenimentelor discrete sau simularea continuă.

Modelarea și simularea sunt necesare atunci când experimentarea directă pe sistemul real nu este posibilă sau recomandabilă. Simularea poate fi definită ca un proces prin care se construiește un model al unui sistem real și se realizează experimente cu acest model în scopul înțelegerii comportamentului sistemului sau evaluării diferitelor strategii pentru sistemul analizat.

Se apelează la simulare deoarece ea permite imitarea a ceea ce se întâmplă într-un sistem real sau a ceea ce se preconizează pentru un sistem care este în stadiul de proiect. Datele de ieșire obținute prin simulare pot fi considerate ca rezultate care ar fi putut fi furnizate de sistemul real. Prin simulare, este posibil să se construiască un model al unui sistem sau proces fără ipotezele impuse de modelele analitice (de exemplu în teoria firelor de așteptare soluțiile analitice se obțin în ipoteza că intrările și ieșirile dintr-un sistem de servire sunt caracterizate prin distribuția de probabilitate Poisson).

În comparație cu modelele de optimizare, modelele de simulare sunt „executate” și nu rezolvate, deci, fiind dat un anumit set de intrări și caracteristici ale modelului, el este executat pentru a se observa comportamentul sistemului pe care îl reprezintă. Modificarea intrărilor și caracteristicilor modelului se structurează în mai multe scenarii care sunt evaluate prin simulare.

1. 3. Algoritmi

Cuvântul *algorithm* provine din “al-Khowârizmî” , adică din orașul Khowârizm , în prezent acest oraș se numește Khiva și se află în Uzbekistan, unde un autor persan, Abu Ja’ far Mohammed ibn Musâ al-Khowârizmî , a scris o carte de matematică în sec.VIII – IX , cunoscută în traducere în limba latină “ *Algorithmi de numero indorum*”. Autorul persan și matematicienii din Evul Mediu înțelegeau prin *algorithm* o regulă pe baza căreia se efectuau calculele aritmetice.

Un *algorithm* este o secvență de pași care transformă mulțimea datelor de intrare în datele de ieșire, rezultatele dorite.

Un *algorithm* este o mulțime de reguli ce se pot aplica în cadrul procesului de construcție a soluției și pot fi executate fie manual, fie de o mașină.

Un *algorithm* pentru o problemă dată este o mulțime de instrucțiuni care garantează găsirea unei soluții corecte pentru orice instanță a problemei, într-un număr finit de pași (iterații).

Prin *algorithm* se înțelege o metodă generală de rezolvare a unui anumit tip de problemă, metodă ce se poate implementa (programa) pe calculator. Algoritmii pot opera nu numai cu numere, deși istoric așa au apărut, existând algoritmi algebrici și algoritmi logici. Un *algorithm* este compus dintr-o mulțime finită de pași, fiecare necesitând una sau mai multe operații. Un *algorithm* trebuie să se termine după un număr finit de operații, într-un timp rezonabil de lung.

Algoritmii de prelucrare sunt legați de operațiile efectuate asupra structurilor de date. Gândirea algoritmică s-a transformat și dezvoltat, dintr-un instrument matematic particular, într-o modalitate fundamentală de abordare a problemelor în domenii care aparent nu au nimic comun cu matematica, de exemplu, chiar și o rețetă culinară este în esență un *algorithm*. Conceptul de *algorithm* se utilizează în toate domeniile. Universalitatea gândirii algoritmice este rezultatul conexiunii dintre *algorithm* și calculator.

Proprietățile unui *algorithm*

- *Algorithm*ul trebuie să posede date de intrare (input data).
- *Algorithm*ul trebuie să furnizeze date de ieșire (output data).
- Determinismul *algorithm*ului (la executarea oricărui pas, trebuie să cunoaștem succesorul acestuia).
- Corectitudinea datelor de ieșire (a rezultatelor) în raport cu datele de intrare.
- Finititudinea *algorithm*ului (pentru orice mulțime de date de intrare posibilă a problemei, soluția este obținută într-un număr finit de pași).
- Eficiența *algorithm*ului (furnizarea soluției trebuie să fie realizabilă prin consumul eficient al resurselor timp, spațiu etc.).
- Generalitatea *algorithm*ului (*algorithm*ul este aplicabil unei clase de probleme, cele ale căror date de intrare satisfac anumite condiții).

Sucesiunea coerentă de operații logice și aritmetice conduce la algoritmizarea unei probleme economice. Algoritmii pot fi: exacti, aproximativi și euristici.

Se vor analiza câțiva algoritmi utilizabili în diverse sisteme informatice.

1. *Divide et impera*

O clasă importantă de algoritmi sunt algoritmii *divide et impera* care se utilizează astfel:

- se descompune cazul ce trebuie rezolvat într-un număr de subcazuri mai mici ale aceleiași probleme;

- se rezolvă succesiv și independent fiecare caz;
- se face recompunerea soluțiilor astfel obținute pentru a găsi soluția cazului inițial.

2. Căutarea binară (Căutarea într-un vector ordonat)

O aplicație a metodei *divide et impera* este *căutarea binară* care în principiu este algoritmul după care se caută un cuvânt într-un dicționar sau un nume în cartea de telefon.

Se consideră un tablou $T_1, T_2, \dots, T_n$ ordonat crescător și x un element oarecare. Problema constă în a-l găsi pe x în tabloul T , iar dacă nu se află acolo în a găsi poziția unde poate fi inserat. Deci, se caută indicele i , $1 \leq i \leq n$, și $T_i \leq x < T_{i+1}$. Cea mai simplă metodă de căutare este căutarea secvențială. Pentru a mări viteza de căutare, metoda *divide et impera* impune să-l căutăm pe x fie în prima jumătate a tabloului T , fie în cea de a doua. Se compară x cu elementul din mijlocul tabloului și se decide în care dintre jumătăți se va căuta. Fie T_k elementul din mijloc al șirului. Dacă $X = T_k$, atunci elementul a fost găsit, dacă $X \neq T_k$, atunci el trebuie căutat în prima jumătate dacă $X < T_k$, respectiv în a doua jumătate dacă $X > T_k$. Se repetă recursiv procedeul.

3. Backtracking

Algoritmi Backtracking (în limba engleză, *back* = înapoi, *track* = a urmări) construiesc soluția pas cu pas, iar dacă pentru o valoare aleasă se constată că nu se ajunge la soluție, se renunță la ea și se reia căutarea de la pasul precedent. Metoda Backtracking îmbunătățește căutarea exhaustivă, dar totuși timpul său de execuție crește exponențial, iar din această cauză metoda este utilizată numai atunci când nu există o metodă mai eficientă de rezolvare a problemei

4. Algoritmi Greedy

Algoritmi Greedy (în limba engleză, *greedy* = lacom) determină în general un optim local sau o soluție relativ bună, suboptimală, într-un timp mai scurt decât rezolvarea aceleiași probleme cu un algoritm backtracking. Un algoritm greedy construiește soluția pas cu pas, la fiecare pas se alege cel mai bun candidat posibil după ce se face evaluarea tuturor din acel moment, dar nu face reveniri ca în cazul algoritmilor backtracking. Rezolvarea problemelor cu un algoritm greedy este mai eficientă decât cu algoritmi backtracking și căutarea exhaustivă. Complexitatea unui algoritm greedy este polinomială. Un algoritm greedy este un algoritm iterativ nerecursiv

5. Algoritmi de ordonare

Un algoritm de ordonare rezolvă o problemă de ordonare a fabricației a n repere pe m mașini. Ordonarea fabricației înseamnă determinarea ordinii optime de prelucrare (minimizarea timpului total de prelucrare, minimizarea timpului total al reglajelor, minimizarea timpului de stagnare a utilajelor etc.) a n repere pe m mașini. Problema ordonării fabricației a apărut în literatura de specialitate în 1954 datorită lucrărilor lui S. M. Johnson care propune și rezolvă problema prelucrării a n produse pe $m = 2$ mașini, elaborând un algoritm care îi poartă numele.

6. Algoritmi Branch and Bound

Algoritmi Branch and Bound (în limba engleză, *branch* = ramifică, *bound* = limită, mărginește) are la bază principiul căutării ramificate utilizând un arbore de căutare și principiul căutării mărginite, deci căutarea se face între anumite limite.

7. Algoritmi evolutivi și algoritmi genetici

Se consideră că există trei modalități de abordare pentru a genera și realiza modele:

- abordarea deterministă;
- abordarea stocastică;
- abordarea prin inteligență artificială (calcul neconvențional), deci utilizarea algoritmilor evolutivi, a algoritmilor genetici, a algoritmilor fuzzy, a rețelelor neuronale (calcul neuronal).

Algoritmii evolutivi și algoritmi genetici, utilizează proceduri care imită procesele de adaptare și căutare apărute în evoluția naturală. Algoritmii evolutivi cuprind următoarele clase de algoritmi: algoritmi genetici, programarea genetică, programarea evolutivă, strategiile evolute.

Complexitatea algoritmilor

Prin complexitatea unui algoritm se înțelege în general costul, care este măsurat cu ajutorul unor funcții sau parametri, cum ar fi: timpul de execuție a algoritmului, memoria calculator necesară, numărul de operații elementare standard (modelul RAM – Random Access Machine) executate, numărul real de operații elementare calculator (cablate) executate etc. În modelul RAM operațiile simple sunt: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, modulo, asignări, comparații, apel procedură care se consideră că ar consuma o unitate de timp (evident este o aproximare, în realitate depinde de calculator), iar ciclurile și procedurile nu sunt considerate operații simple, fiind compuse din mai multe operații. Resursele de memorie ale calculatoarelor actuale sunt foarte mari, deci timpul de execuție al unui algoritm este mai important. Complexitatea unui algoritm calculată și măsurată prin funcția obiectiv f = timpul de execuție, care ia în calcul numărul de operații elementare (unități de timp) necesare pentru execuția algoritmului când datele de intrare au o dimensiune n . În practică se utilizează trei notații sau metode pentru analiza complexității și performanței unui algoritm, prin mărginirea valorilor funcției $f(n)$ cu niște constante și alte funcții.

1. Notatia Θ .

Se spune că

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

dacă există constantele pozitive n_0 , c_1 și c_2 , astfel încât

$$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n), (\forall) n \geq n_0$$

2. Notatia O (mărginire superioară)

Se spune că

$$f(n) = O(g(n))$$

dacă există constantele pozitive n_0 și c , astfel încât

$$f(n) \leq c \cdot g(n), (\forall) n \geq n_0$$

3. Notatia Ω (mărginire inferioară)

Se spune că

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

dacă există constantele pozitive n_0 și c , astfel încât

$$f(n) \geq c \cdot g(n), (\forall) n \geq n_0$$

Complexitatea lui $f(n)$ este aproximată de familia sa $O(g(n))$, iar $g(n)$ poate fi una dintre funcțiile:

- n , complexitate liniară;
- $\log n$, complexitate logaritmică;
- n^k , $k \geq 2$, complexitate polinomială;
- a^n , $a > 1$, complexitate exponențială;
- $n!$, complexitate factorială;

Dacă n este mare, $n \geq 10$, au loc inegalitățile:

$$\log n < n < n \cdot \log n < n^2 < n^3 < 2^n$$

$$\text{rezultând: } O(\log n) < O(n) < O(n \cdot \log n) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n)$$

După ce s-a determinat complexitatea unui algoritm, se pune problema dacă acest algoritm este optimal. Pentru o problemă concretă un algoritm ce o rezolvă este optimal dacă complexitatea sa atinge o limită inferioară a tuturor algoritmilor ce pot rezolva această problemă.

În activitatea de modelare și optimizare practică se poate pune și problema optimizării programelor calculator.

Este impropriu termenul de optimizare a programelor calculator, deși se utilizează în practică, deoarece este imposibil să se găsească o funcție obiectiv prin care să se măsoare exact gradul maxim de performanță a programului. Este imposibil pentru un compilator să genereze cel mai bun program obiect al unui program sursă. Practic nu se poate stabili mulțimea tuturor programelor calculator care rezolvă o anumită problemă și din care să se aleagă programul optim din anumite puncte de vedere.

Câteva criterii de optimizare a programelor calculator sunt: timpul de execuție, dimensiunea memoriei ocupate, claritatea programului, portabilitatea. Se poate vedea că aceste criterii pot fi conflictuale, trebuie stabilită importanța fiecărui criteriu, iar în practică trebuie găsită soluția de compromis, funcție de resursele calculatorului. Problema generală a găsirii unui program optim este indecidabilă. Optimizarea programelor, în sensul minimizării timpului de execuție, este posibilă în trei faze ale elaborării lor: în faza de concepție, în faza de codificare și în faza de compilare. Dacă pentru rezolvarea unei probleme P se cunoaște de către programator mulțimea A a algoritmilor care rezolvă problema respectivă, în etapa de analiză se estimează care algoritm este mai rapid și acesta se va folosi. Evident, mulțimea A diferă de la o persoană la alta, având o anumită relativitate. După alegerea algoritmului de rezolvare a problemei, trebuie ales limbajul de programare potrivit pentru tipul de calcule și structurile de date utilizate.

Câteva reguli practice ce se pot folosi pentru optimizarea codului generat sunt:

- eliminarea subexpresiilor comune mai multor expresii aritmetice, prin notarea sa cu un nume de variabilă pentru a fi calculată o singură dată;
- folosirea operațiilor aritmetice rapide;
- minimizarea numărului de conversii a constantelor și variabilelor;
- optimizarea buclilor, deci trebuie scoase din ciclu expresiile aritmetice invariante în ciclu;
- utilizarea facilităților oferite de limbajele de programare referitoare la optimizarea codului.

Alături de complexitatea algoritmilor calculată și măsurată prin funcția obiectiv timpul de execuție, se pune *problema clasificării problemelor* după criteriul dificultății lor de rezolvare, deci ușor sau greu de rezolvat, accesibile sau inaccesibile. Această clasificare a problemelor după dificultatea de rezolvare cuprinde clasele P și NP, iar clasa NP cuprinde subclasele NP-complete și NP-hard. Clasa P cuprinde mulțimea problemelor pentru care există un algoritm cu timp polinomial de rezolvare, deci probleme relativ ușoare, accesibile. Clasele NP-complete, NP-hard cuprind cele mai grele probleme din clasa NP, nu există un algoritm în timp polinomial de rezolvare.

1.4. Fluxul informațional.

Sistemul de management al organizației (firmei) poate fi structurat în subsistemele:

- subsistemul organizatoric;
- subsistemul informațional;
- subsistemul decizional;
- subsistemul metodologic.

Sistemul informațional al unei organizații poate fi privit ca sistem de legătură între sistemul de conducere (SC) și sistemul condus (de execuție) (SE), ca în fig. nr.1. Nu poate exista o conducere eficientă fără un sistem informațional perfecționat. Concepte utilizate în studiul și practica managementului, a sistemelor informaționale și a sistemelor informatice sunt: datele, informația, cunoștințele, fluxul informațional, circuitul informațional, comunicația, structuri de date, fișierul de date, baza de date.

Există multe definiții ale sistemului informațional. Se va defini sistemul informațional în sens general.

Sistemul informațional al unui organism (organizații) (sau al unei activități) poate fi definit ca ansamblul informațiilor, surselor de informații și nivelurilor receptoare, canalelor de circulație, procedurilor și mijloacelor de tratare a informațiilor din cadrul respectivului organism (activități).

Reflectările neevaluate ale entităților faptice percepute (referitor la fenomene și procese din natură) se numesc *date*. Datele sunt definite în general ca fiind fenomene și observații primare. Datele reprezintă de fapt măsurători obiective ale atributelor (caracteristicilor) entităților (oameni, lucruri, evenimente). Datele sunt resursele primare care sunt prelucrate în produse finite de tip informație. Transmiterea, recepția și stocarea informației se face prin simboluri concrete denumite date. Datele constituie imaginea concretă a informației abstracte sau materializarea informației. Elementul constitutiv al informației este data.

Noțiunea de *informație* are o mare generalitate și nu i s-a dat o definiție unitară, fiind considerată un concept primar ca și noțiunea de mulțime. Mesajul reprezintă forma concretă prin care se reflectă realitatea obiectivă. Informația constituie conținutul unui sau mai multor mesaje prin intermediul cărora se aduc elemente noi de cunoaștere privind funcționarea unui sistem.

Informația, în cazul unui sistem oarecare, tehnic, economic sau de altă natură poate fi considerată ca un mesaj despre evenimente care au avut, au sau vor avea loc în interiorul și în exteriorul acestui sistem. Informația este informație în adevăratul sens al cuvântului atunci și numai atunci când ea înlătură o anumită nedeterminare.

Noțiunea de *cunoștință* apare în procesul de cunoaștere care se desfășoară în timp și se realizează prin acumularea și prelucrarea treptată de informații despre obiectul cunoașterii.

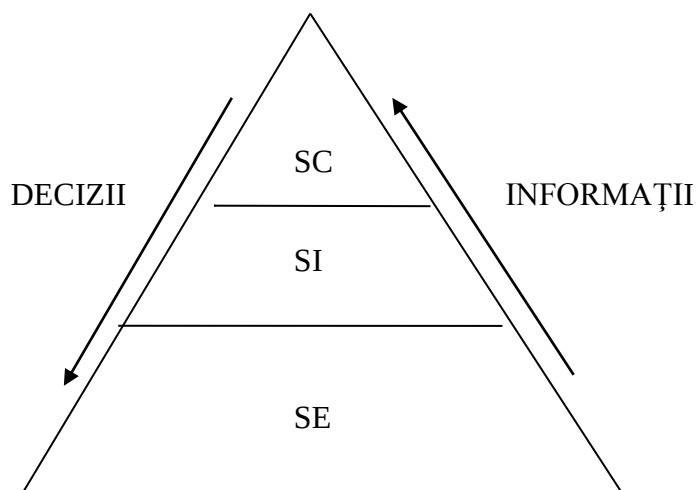


Fig. nr.1

Fluxul material este însoțit de un flux informațional corespunzător. *Fluxul informațional* reprezintă totalitatea informațiilor transmise într-un interval de timp determinat, de la o sursă de informație la un receptor, printr-o mulțime de canale informaționale. Fluxul informațional este constituit din ansamblul datelor, informațiilor și deciziilor necesare desfășurării în bune condiții

a unei activități sau operații. Fluxul informațional este caracterizat prin: conținut, volum, frecvență, calitate, formă, suport, proces de obținere și cost.

Deciziile manageriale sunt influențate de calitatea și cantitatea informațiilor de care dispune întreprinderea. *Completitudinea* și *precizia informațiilor* reprezintă două atribute importante ale informațiilor. Variația preciziei și completitudinii informațiilor condiționează metodele matematice ce se vor utiliza pentru rezolvarea problemei decizionale, ceea ce este prezentat în fig. 2.

Dacă informațiile au un nivel relativ ridicat de precizie și completitudine, atunci problema decizională poate fi abordată determinist cu rezultate bune, iar acest lucru se întâmplă în cazul sistemelor tehnice, controlabile (astfel de sisteme au o calculabilitate mare a comportamentului lor și sunt numite și sisteme complicate).

Dacă scade precizia informațiilor, dar completitudinea este înaltă, se poate rezolva problema decizională prin decizii fuzzy (mulțimi vagi, fuzzy).

Dacă scade completitudinea informațiilor, iar precizia este relativ înaltă, problema decizională se poate aborda stochastic, abordarea stochastică este indicată pentru sisteme colective sau prin modele ale teoriei jocurilor, când completitudinea scade mai mult.

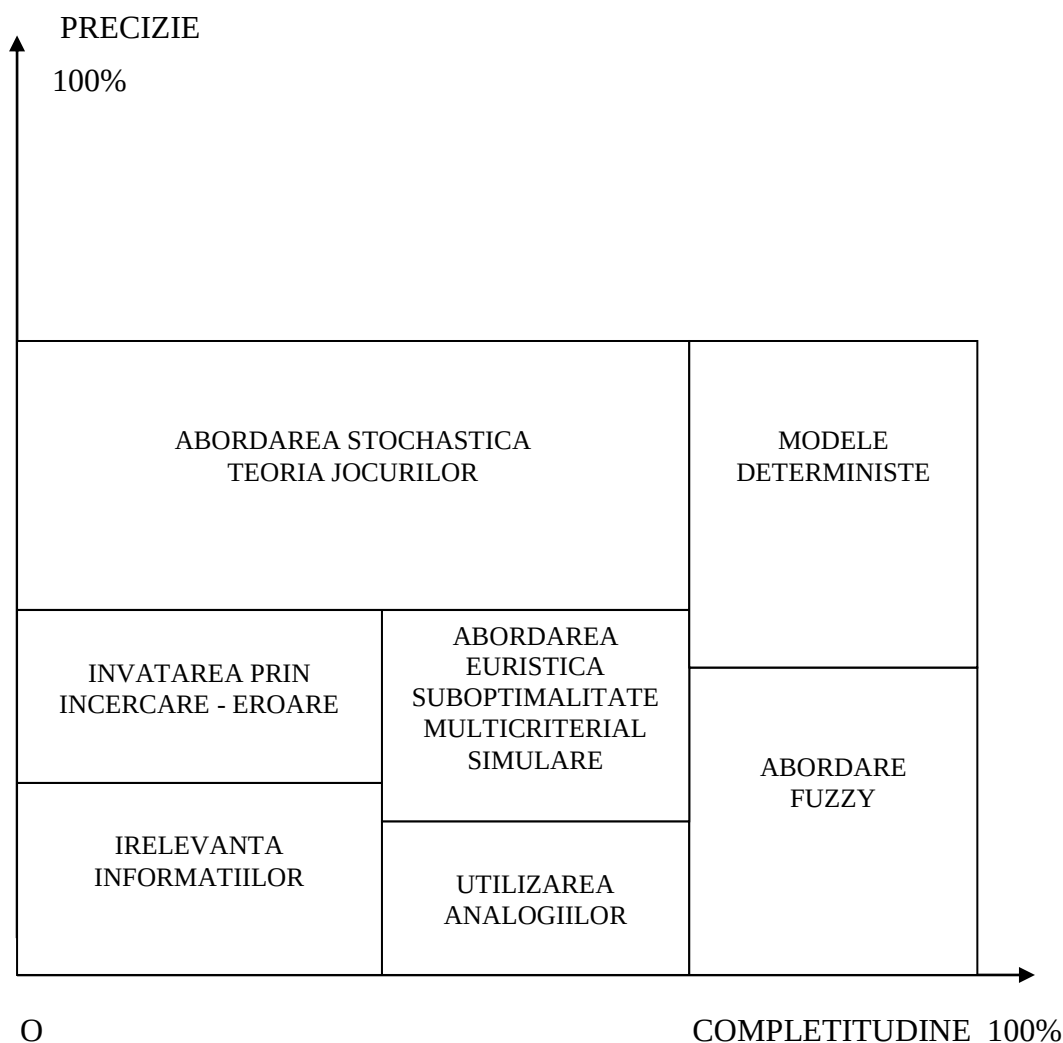


Fig.nr.2. Corespondența dintre calitatea informațiilor (precizie și completitudine) și metodele matematice utilizabile

Dacă scade simultan completitudinea și precizia informațiilor între anumite limite trebuie să se facă o abordare suboptimală a problemei decizionale prin metode euristice, metode multicriteriale și simulare. Dacă completitudinea scade și mai mult, iar precizia rămâne la nivel mediu, se poate utiliza metoda învățarea prin încercare și eroare. Completitudinea și precizia informației sunt influențate de complexitatea sistemelor studiate (sisteme tehnico-economice, sisteme socio-politice).

Fluxurile materiale și fluxurile informaționale se vor analiza în cadrul sistemului informațional al firmei și a diverselor tipuri de sisteme informatice: Sistemul Informatic de Prelucrare a Tranzacțiilor, Sistemul Informatic de Management, Sisteme Suport pentru Decizie, Sistemul Informatic de Birotică, Sistemul Informatic Strategic.

1. 5. Optimizări în managementul firmei. Optimizarea fluxurilor materiale

Prin studierea problematicii optimizării managementului firmei se urmărește creșterea *competitivității* sale, asigurarea raționalității procesului decizional și managerial.

Se poate pune problema **alegerii monocriteriale sau multicriteriale a algoritmului** / programului **optim** sau **rațional** de rezolvare a unei probleme de management sau de optimizare a fluxurilor materiale rezolvabilă în cel puțin trei etape:

- alegerea optimă / rațională a clasei algoritmului (algoritmi determinați, stochastici, fuzzy, genetici etc.);
- alegerea optimă / rațională a algoritmului din clasa de algoritmi aleasă ;
- alegerea optimă / rațională a limbajului de programare pentru programarea algoritmului ales (se pot considera ca și funcții de eficiență: timpul de execuție a programului pe calculator, memoria calculator necesară, portabilitatea programului realizat etc.).

Managementul firmei, competitivitatea sa și fluxurile materiale pot fi studiate, analizate și optimizate prin programare matematică cu o funcție obiectiv, de exemplu prin problema din relațiile (1) care este o problemă tip maximizare a profitului sau a venitului din vânzări sau prin modelul din relațiile (2) care minimizează costurile.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \leq b_i \quad , i = 1, 2, \dots, m;$$

$$X_j \geq 0 \quad , j = 1, 2, \dots, n ;$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n c_j X_j$$

$$\max f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$
(1)

Problemă de minimizare:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \geq b_i \quad , i = 1, 2, \dots, m;$$

$$X_j \geq 0 \quad , j = 1, 2, \dots, n ;$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n c_j X_j$$

$$\min f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$
(2)

Modelele (1) și (2) se rezolvă prin algoritmul simplex sau pe calculator cu programele: Qsb, Dsspom, Lindo, Qm sau altele.

Problematica optimizării managementului firmei și a fluxurilor materiale va fi abordată monocriterial și multicriterial, prin modele deterministe, stochastice și fuzzy.

În logistica internă și în fabricație se pot utiliza câteva metode ale cercetării operaționale, din care amintim:

- alocarea resurselor materiale necesare fabricației prin programare liniară monoobiectiv și multiobiectiv;
- programare stochastică;
- programare fuzzy;
- minimizarea costurilor prin programare liniară;
- problema de afectare (asignare) pentru repartizarea muncitorilor pe mașini;
- problema de transport de minimizare și problema de transport de maximizare;
- ordonanțarea fabricației;
- modele de așteptare;
- optimizarea stocurilor;
- teoria grafurilor;
- optimizarea deciziilor.

În logistica externă (logistica aprovizionării și logistica distribuției) se pot utiliza:

- problema de transport de minimizare monoobiectiv și multiobiectiv;
- programarea parametrică;
- decizii multiatribut, decizii de grup, decizii fuzzy;
- modele de așteptare;
- teoria jocurilor strategice.

Într-o problemă analizată și rezolvată prin metode ale cercetării operaționale sunt următoarele etape:

- formularea (enunțul) problemei;
- construcția modelului matematic;
- obținerea soluției optime;
- testarea modelului și a soluției optime;
- implementarea și actualizarea soluției optime.

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C2

Pentru completarea informațiilor din cursurile C1 – C14 se poate consulta cartea:

Cociu Nicolae - Metode ale cercetării operaționale în inginerie și management, Editura Solness, Timisoara, 2011 .

MODELE DETERMINISTE.

MODELAREA FLUXURILOR MATERIALE PRIN PROGRAMARE MATEMATICĂ

Problematica optimizării managementului firmei și a fluxurilor materiale va fi abordată prin programare matematică, monocriterial și multicriterial, prin modele neliniare și liniare, modele deterministe, stochastice și fuzzy. Prin studierea problematicei optimizării managementului firmei se urmărește creșterea *competitivității* sale, asigurarea raționalității procesului decizional și managerial.

2. PROGRAMAREA NELINIARĂ

Problema de programare matematică neliniară se poate enunța, la modul general, astfel:
să se determine minimul (maximul) funcției obiectiv f,

$$\min f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.1)$$

în condițiile:

$$g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.2)$$

$$\text{unde: } f, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.3)$$

Dacă se cere $\min f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, se spune că avem o problemă de programare neliniară de minimizare, iar dacă se cere $\max f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ avem o problemă de programare neliniară de maximizare.

Dacă se adaugă la relațiile (2.1), (2.2) condițiile de nenegativitate ale variabilelor,

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

se obține forma canonică a problemei de programare neliniară.

Definiția 2.1.

O funcție f

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

este convexă pe D în sensul lui Jensen, dacă

$$\forall X, Y \in D, \forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1 - \lambda)f(Y).$$

Problema clasică a minimului cu legături pune problema găsirii minimului funcției f,

$$\min f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

când variabilele $X_1, X_2, \dots, X_n$ verifică condițiile:

$$g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2.5)$$

Se presupune că funcțiile f și $g_i, i = 1, 2, \dots, m$; admit derivate parțiale de ordinul întâi în raport cu toate variabilele $X_j, j = 1, 2, \dots, n$.

Se poate utiliza **metoda multiplicatorilor lui Lagrange**, considerând funcția auxiliară F,

$$F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n, u_1, u_2, \dots, u_m) = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^m u_i \cdot g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.6)$$

unde: $u_1, u_2, \dots, u_m$ sunt multiplicatorii lui Lagrange.

Condiția necesară de minim a funcției F din (2.6) este anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi, deci:

$$\frac{\partial F}{\partial X_j} = \frac{\partial f}{\partial X_j} + \sum_{i=1}^m u_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial X_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = g_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.8)$$

Condițiile (2.7) și (2.8) sunt condiții necesare de minim și nu și suficiente, iar aceste condiții sunt necesare și suficiente dacă se adaugă condiții suplimentare pentru funcțiile f și g_i , $i = 1, 2, \dots, m$. De exemplu, dacă funcția f este convexă și funcțiile g_i , $i = 1, 2, \dots, m$; sunt liniare, atunci condițiile (2.7) și (2.8) sunt condiții necesare și suficiente de minim.

Se reia problema de programare neliniară din relațiile (2.1) – (2.3) în relațiile (2.9) – (2.10).

$$\min f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.9)$$

$$g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.10)$$

Relațiile (2.10) se transformă în egalități în (2.11), adunând câte o variabilă artificială w_i la fiecare inegalitate, deci sunt m variabile reale w_i auxiliare, $i = 1, 2, \dots, m$;

$$g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) + w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2.11)$$

Problema de programare neliniară (2.9) – (2.10) se reformulează:

Să se determine

$$\min f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

când variabilele $X_1, X_2, \dots, X_n, w_1, w_2, \dots, w_m$ verifică condițiile (2.11).

Funcția lui Lagrange în acest caz este (2.12).

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, \dots, X_n, w_1, w_2, \dots, w_m, u_1, u_2, \dots, u_m) = \\ = F(X, w, u) = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^m u_i \cdot [g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) + w_i] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Condițiile necesare de minim sunt (2.13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_j} = \frac{\partial f}{\partial X_j} + \sum_{i=1}^m u_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial X_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial F}{\partial u_i} = g_i + w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial F}{\partial w_i} = 2 \cdot u_i \cdot w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dacă se elimină w_i din (2.13), rezultă că $g_i = 0$ are loc atunci și numai atunci când $w_i = 0$, oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, m$,

$$u_i \cdot g_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.14)$$

și condițiile necesare de minim sunt numite condițiile Kuhn –Tucker.

Condițiile Kuhn -Tucker necesare pentru minimul lui f :

$$\frac{\partial f}{\partial X_j} + \sum_{i=1}^m u_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial X_j} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.15)$$

$$g_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.16)$$

$$u_i \cdot g_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.17)$$

$$u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.18)$$

Pentru problema de maximizare relațiile (2.18) se înlocuiesc cu (2.19).

$$u_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.19)$$

Kuhn și Tucker au arătat că dacă funcțiile f și g_i , $i = 1, 2, \dots, m$; sunt convexe, condițiile (2.15) – (2.18) sunt necesare și suficiente pentru rezolvarea problemei de programare neliniară de minim.

3. Programare liniară

3.1. Introducere în programare liniară

Managementul firmei, competitivitatea sa și fluxurile materiale pot fi studiate, analizate și optimizate prin programare matematică. Problema optimizării fluxurilor materiale și informaționale se pune la nivel de: intrări în sistemul de producție, ieșiri din sistem, procese și programe de producție, managementul firmei. Problema optimizării managementului firmei și modelării fluxurilor materiale va fi abordată prin programare liniară, monocriterial și multicriterial, prin modele deterministe, stochastice și fuzzy. Fluxurile materiale pot fi studiate, analizate și optimizate prin programare matematică cu o funcție obiectiv, de exemplu prin problema de programare liniară din relațiile (3.1) – (3.3) sau prin programare matematică cu mai multe funcții obiectiv, deci multicriterial. Modelul matematic din relațiile (3.1) – (3.3) este o problemă de programare liniară de maximizare și se poate utiliza în optimizarea proceselor și programelor de producție.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (3.1)$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.2)$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n c_j X_j \quad (3.3)$$

$$\max f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

sau în scriere matricială echivalentă, relațiile (3.4).

$$\begin{aligned} A \cdot X &\leq b \\ X &\geq 0 \\ f(X) &= c \cdot X \\ \max f(X) \end{aligned} \quad (3.4)$$

unde: $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Relațiile (3.1) reprezintă restricțiile problemei de programare liniară, relațiile (3.2) sunt condițiile de nenegativitate ale variabilelor, iar funcția f din relația (3.3) este funcția obiectiv, numită și funcție scop sau funcție de eficiență.

Fluxurile materiale pot fi optimizate și printr-o problemă de programare liniară de minimizare în care funcția obiectiv f reprezintă costuri care se minimizează, relațiile (3.5).

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.5)$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n c_j X_j$$

$$\min f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

sau în scriere matricială în relațiile (3.6).

$$\begin{aligned} A \cdot X &\geq b \\ X &\geq 0 \\ f(X) &= c \cdot X \\ \min f(X) \end{aligned} \quad (3.6)$$

unde: $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

3.2. FOLOSIREA EFICIENTĂ A RESURSELOR MATERIALE. ALOCAREA RESURSELOR MATERIALE. PROBLEMA MAXIMIZĂRII PROFITULUI

Resursele reprezintă totalitatea mijloacelor care participă la realizarea unei acțiuni complexe și care, pentru a asigura eficiența acțiunii (programului), trebuie să fie corect dimensionate, să se dispună de ele la timpul oportun și să fie utilizate cât mai rațional.

Alocarea este o prevedere, cu o anumită destinație, pentru un anumit scop, a unor resurse umane, materiale sau bănești. Conducerea problemelor economice ale unei firme pe un anumit orizont de timp presupune asigurarea resurselor necesare atingerii obiectivelor. Dacă sunt asigurate aceste resurse, trebuie rezolvată problema alocării lor pe obiectivele firmei. Alocarea resurselor se poate face pe baza experienței, a intuiției sau utilizând metode de optimizare.

Principalele elemente ale unei probleme de alocare a resurselor sunt:

- 1.) Ce resurse trebuie să fie alocate ?;
- 2.) Care este disponibilul total din aceste resurse, deci cât putem să alocăm ?;
- 3.) Care sunt sursele sau furnizorii resurselor ? ;
- 4.) Care este disponibilul de resurse pe fiecare sursă, deci cât se poate lua de la fiecare furnizor ?;
- 5.) Cine sunt beneficiarii resurselor, deci cui se vor repartiza resursele ?;
- 6.) Care este necesarul de resurse pe fiecare beneficiar, deci cât trebuie să se aloce fiecăruia ? ;
- 7.) Care este orizontul de timp pentru care se face alocarea?;
- 8.) Care sunt condițiile sau restricțiile de alocare ? ;
- 9.) Care sunt criteriile de performanță ale alocării ? ;
- 10.) Care sunt obiectivele și strategiile de alocare ? ;
- 11.) Care sunt consecințele alocării ? ;
- 12.) Care sunt stările naturii în care este posibilă efectuarea alocării și probabilitățile de apariție a lor ? ;

După natura lor, resursele firmei se pot clasifica astfel:

- resurse materiale, formate din materii prime, materiale, combustibili, energie, utilaje, mașini, instalații etc.;
- resurse de forță de muncă;
- resurse financiare ;
- resurse informaționale.

Problemele de alocare a resurselor stabilesc modul cum trebuie repartizate resursele disponibile între activitățile ce urmează să fie executate, pentru ca activitățile să poată fi realizate cât mai bine, în sensul unei anumite funcții obiectiv.

Obiectivul acestor probleme îl constituie alocarea resurselor în așa fel, încât să se optimizeze o funcție obiectiv, de exemplu să se minimizeze cheltuielile totale sau să se maximizeze profitul total sau venitul din vânzări.

În fabricarea a n produse se utilizează m resurse ale firmei care sunt limitate și trebuie folosite eficient, alocate optim în sensul unei anumite funcții obiectiv.

Într-un sistem de producție (atelier, secție, întreprindere) pentru a fabrica produsele $P_1, P_2, \dots, P_n$ se folosesc resursele $R_1, R_2, \dots, R_m$ ce sunt disponibile în cantități limitate $b_1, b_2, \dots, b_m$. Resursa R_i intră în produsul P_j în cantitatea a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, iar profitul unitar (real sau estimat) pentru produsul P_j este c_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Se presupune că sunt satisfăcute condițiile: $a_{ij} \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_j \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Aceste elemente sunt sintetizate în tabelul nr.3.1.

Tabelul nr. 3.1.

P_j	P_1	P_2	$\dots$	P_n	Resurse Disponibile b_i
R_i					
R_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
R_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m
Profitul unitar c_j	c_1	c_2	$\dots$	c_n	

Se cere determinarea planului de fabricație optim, deci trebuie aflat câte produse $P_1, P_2, \dots, P_n$ se vor fabrica în perioada de timp considerată (zi, săptămână, lună etc.) și în condițiile date astfel încât profitul să fie maxim.

Se notează cu X_j cantitatea din produsul P_j ce se va fabrica, $j = 1, 2, \dots, n$.

Se obține modelul matematic din relațiile (3.7), care este o problemă de programare liniară.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.7)$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j$$

$$\max f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Scrierea matriceală echivalentă a modelului (3.7) este modelul matematic din relațiile (3.8).

$$\begin{aligned} A \cdot X &\leq b \\ X &\geq 0 \\ f(X) &= c \cdot X \\ \max f(X) \end{aligned} \quad (3.8)$$

unde notațiile sunt:

$$A = (a_{ij}) ; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n);$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

Observații

1. Dacă c_j reprezintă prețul unitar de vânzare a produsului P_j , $j = 1, 2, \dots, n$, atunci se va maximiza venitul din vânzări în alocarea resurselor materiale, iar modelul matematic este tot (3.7), ca și la maximizarea profitului.
2. Dacă din studii de marketing se cunosc pentru fiecare produs P_j cererea minimă egală cu α_j și cererea maximă egală cu β_j , la modelul matematic al problemei de programare liniară din relațiile (3.7) se adaugă restricțiile (3.9), rezultând modelul din relațiile (3.10).

$$\alpha_j \leq X_j \leq \beta_j, j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.9)$$

$$\text{unde: } \alpha_j \geq 0, \quad \beta_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\alpha_j \leq X_j \leq \beta_j, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.10)$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j$$

$$\max f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

3. Există probleme de programare liniară cu soluții impuse.

Există probleme practice care se rezolvă prin programare liniară în care anumite componente ale soluției (sau o componentă) trebuie să ia anumite valori. Să presupunem că $X_j = d_j$ pentru un indice j fixat. În acest caz problema de programare liniară se reduce ca și dimensiune de la n variabile la $n - 1$. Pentru rezolvarea problemei se va renunța la variabila X_j în matricea A , deci coloana j dispare (sau se face zero), în funcția obiectiv f dispare c_j (sau se face zero) și termenii liberi b_i , $i = 1, 2, \dots, m$, se vor corecta cu valorile coloanei j .

$$b_i = b_i - a_{ij} \cdot X_j = b_i - a_{ij} \cdot d_j, i = 1, 2, \dots, m;$$

Se rezolvă cu algoritmul simplex primal sau simplex dual sau cu un program pe calculator. Soluțiile problemelor cu soluții impuse nu mai sunt întotdeauna soluții de bază pentru că pot avea mai multe componente pozitive decât dimensiunea bazei.

4. Problemele de programare liniară din relațiile (3.7) și (3.10) se rezolvă cu algoritmul simplex primal sau simplex dual, respectiv cu calculatorul utilizând programele Qsb,

Dsspom, Lindo, QM sau altele, obținându-se soluția optimă ce maximizează profitul (sau venitul din vânzări).

EXTENSIA 3.2.1. A PROBLEMEI MAXIMIZARII PROFITULUI

Se poate da o **generalizare** a modelului matematic dat de relațiile (3.7), considerând că toate consumurile a_{ij} și disponibilul de resurse care trebuie alocate aparțin unor intervale ale numerelor reale, relațiile (3.11).

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in [\alpha_{ij}, \beta_{ij}] \\ b_i &\in [\gamma_i, \delta_i], \quad \alpha_{ij} \geq 0, \beta_{ij} \geq 0, \gamma_i \geq 0, \delta_i \geq 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Modelul matematic va fi dat de relațiile (3.12), care este echivalent și se rezolvă cu modelul din relațiile (3.13).

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_j \cdot [\alpha_{ij}, \beta_{ij}] &\subseteq [\gamma_i, \delta_i], \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \\ \sup f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Modelul matematic din relațiile (3.13) este o problemă de programare liniară ce se rezolvă cu algoritmul simplex primal sau dual sau pe calculator cu programe: Qsb, Dsspom, Lindo, QM etc.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \cdot x_j &\leq \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot x_j &\geq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \\ \max f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Exemplul nr. 3.1.

Se consideră o problemă de alocare a resurselor materiale cu maximizarea profitului. Din $m = 3$ resurse se fabrică $n = 3$ produse, date în tabelul nr.3.2. Trebuie determinat:

- ce cantitate se va fabrica din fiecare produs, astfel încât profitul obținut să fie maxim.
- dacă din studii de marketing rezultă că produsul P_2 are cererea minimă de 5 unități, ce cantitate se va fabrica din fiecare produs, astfel încât profitul obținut să fie maxim.
- Să se facă alegerea între varianta de la punctul a) și varianta de la b) care este mai bună.
- Ce cantitate se va fabrica din fiecare produs dacă din produsul P_2 trebuie fabricate 5 unități, astfel încât profitul obținut să fie maxim.

Tabelul nr.3.2.

P_j	P_1	P_2	P_3	Resurse disponibile b_i
R_i				
R_1	1	2	3	120
R_2	2	2	1	80
R_3	1	2	1	70
Profitul unitar c_j	60	80	100	

- a) Se notează cu X_j cantitatea din produsul P_j ce se va fabrica, $j = 1, 2, 3$. Modelul matematic reprezintă problema de programare liniară (3.14).

$$\begin{aligned}
 X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\leq 120 \\
 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 80 \\
 X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 70 \\
 X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3; \\
 f(X_1, X_2, X_3) &= 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \\
 \max f(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Se rezolvă problema de programare liniară cu programul QSB, modulul *linear programming*, și se obține soluția optimă:

$$X_1 = 24, X_2 = 0, X_3 = 32, \max f = 4640. \tag{3.15}$$

Ecrane Qsb de rezolvare:

```

Welcome to QSB (Quantitative Systems for Business)!
You may choose from following management science decision support systems:

Code No.      Program
-----
1 -- Linear programming
2 -- Integer linear programming
3 -- Transshipment problem
4 -- Assignment problem
5 -- Network modeling
6 -- Project scheduling -- CPM
7 -- Project scheduling -- PERT
8 -- Dynamic programming
9 -- Inventory theory
A -- Queuing theory
B -- Queuing system simulation
C -- Decision/probability theory
D -- Markov process
E -- Time series forecasting
F -- Specify printer/display adapter
G -- Exit from QSB

** QSB(I): Programs 1 to 5,  QSB(II): Programs 6 to E **

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.
  
```

```

QSB

Welcome to your Linear Programming (LP) Decision Support System!
The options available for LP are as follows.
If you are a first-time user, you might benefit from option 1.

Option      Function
1 ---- Overview of LP Decision Support System
=>2 ---- Enter new problem
3 ---- Read existing problem from disk(ette)
4 ---- Show input data
5 ---- Solve problem
6 ---- Save problem on disk(ette)
7 ---- Modify problem
8 ---- Show final solution
9 ---- Return to the program menu
0 ---- Exit from QSB

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.

```

```

LP Model Entry for 1

Please observe the following conventions when entering a problem:
<1> 100, 100.0, +100, +100.0, 1E2, and 1.0E+2 are the same.
<2> -123, -1.23E2, and -1.23E+2 are the same.
<3> >=, >, =>, and , are the same; <=, <, =<, and ~ are the same.
<4> After you enter your data, press the ENTER key.
<5> On the same screen page, you may correct errors by pressing
the BACKSPACE key to move the cursor to the correct position.
<6> When you are satisfied with the data on a page, press the SPACE BAR.
<7> When entering the problem, press the Esc key to go to a previous
page; press the / key to go to the next page.

Do you want to maximize <1> or minimize <2> criterion? <Enter 1 or 2> <1 >
How many variables are there in your problem? <Enter number ~ 500 > <3 >
How many constraints are there in your problem? <Enter number ~ 500 > <3 >
How many ',' constraints are there in your problem? <Enter number ~ 500 > <0 >
Do you want to use the default variable names <X1,X2,...,Xn> <Y/N>? <y >
Press the SPACE BAR to continue if your entries are correct.

```

```

QSB
Modify The Model Coefficients Page 1
Max +60.0000X1 +80.0000X2 +100.000X3
Subject to
<1> +1.00000X1 +2.00000X2 +3.00000X3 <=+120.000
<2> +2.00000X1 +2.00000X2 +1.00000X3 <=+80.0000
<3> +1.00000X1 +2.00000X2 +1.00000X3 <=+70.0000

Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.

```

```

QSB
Welcome to your Linear Programming (LP) Decision Support System!
The options available for LP are as follows.
If you are a first-time user, you might benefit from option 1.

Option      Function
1  ----    Overview of LP Decision Support System
2  ----    Enter new problem
3  ----    Read existing problem from disk(ette)
4  ----    Show input data
=>5  ----    Solve problem
6  ----    Save problem on disk(ette)
7  ----    Modify problem
8  ----    Show final solution
9  ----    Return to the program menu
0  ----    Exit from QSB

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.

```


QSB

Summarized Results for pl1

Page : 1

Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost
1 X1	+24.000000	0	4 S1	0	+27.999998
2 X2	0	+7.9999986	5 S2	0	+16.000000
3 X3	+32.000000	0	6 S3	+14.000000	0
Maximum value of the OBJ = 4640 Itrs. = 4					

Press any key to continue.

- b) Dacă din studii de marketing rezultă că produsul P₂ are cererea minimă de 5 unități, atunci la problema de programare liniară (3.14) se adaugă restricția:

$$X_2 \geq 5,$$

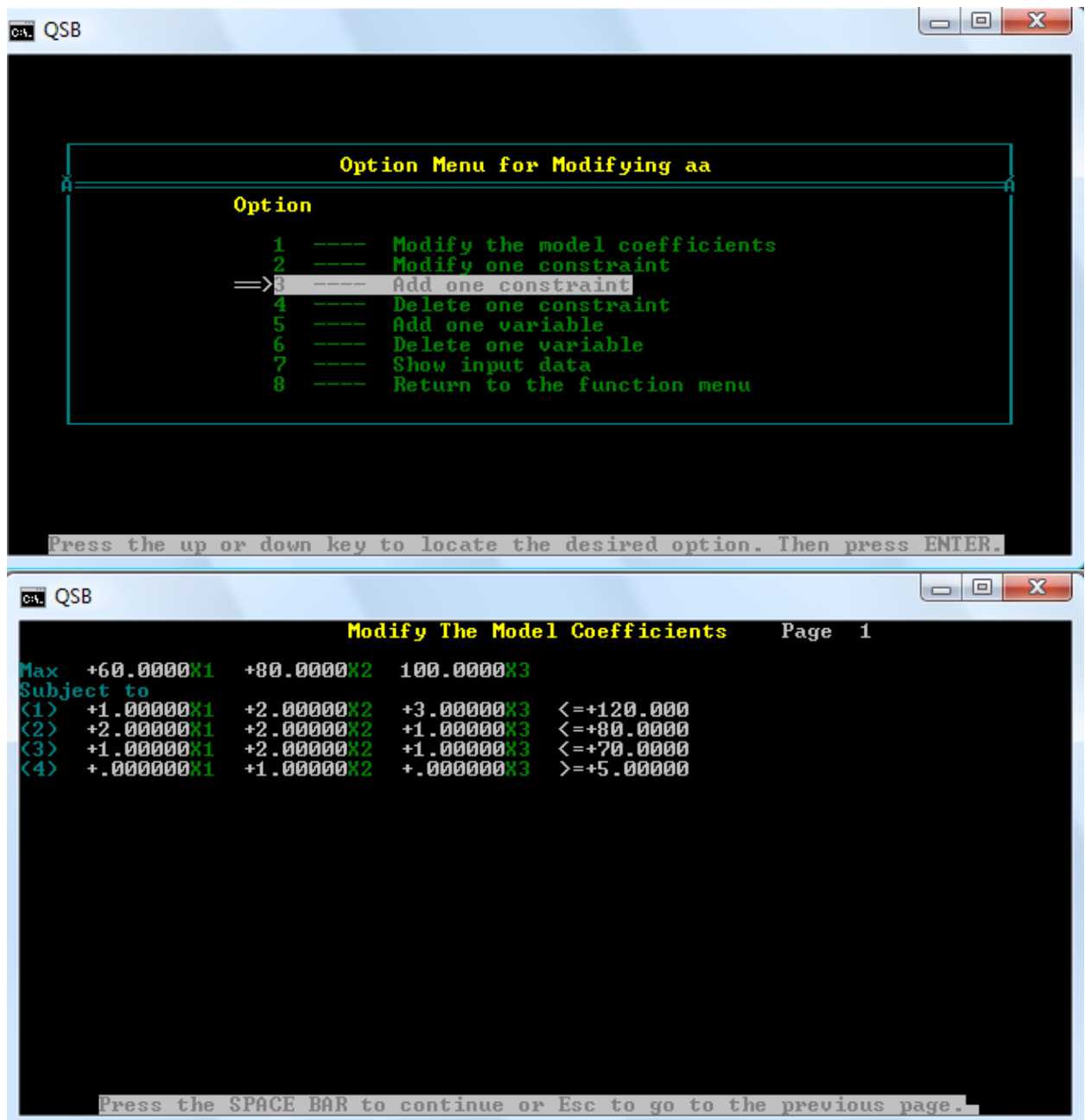
Se va rezolva cu programul Qsb, rezultă soluția optimă:

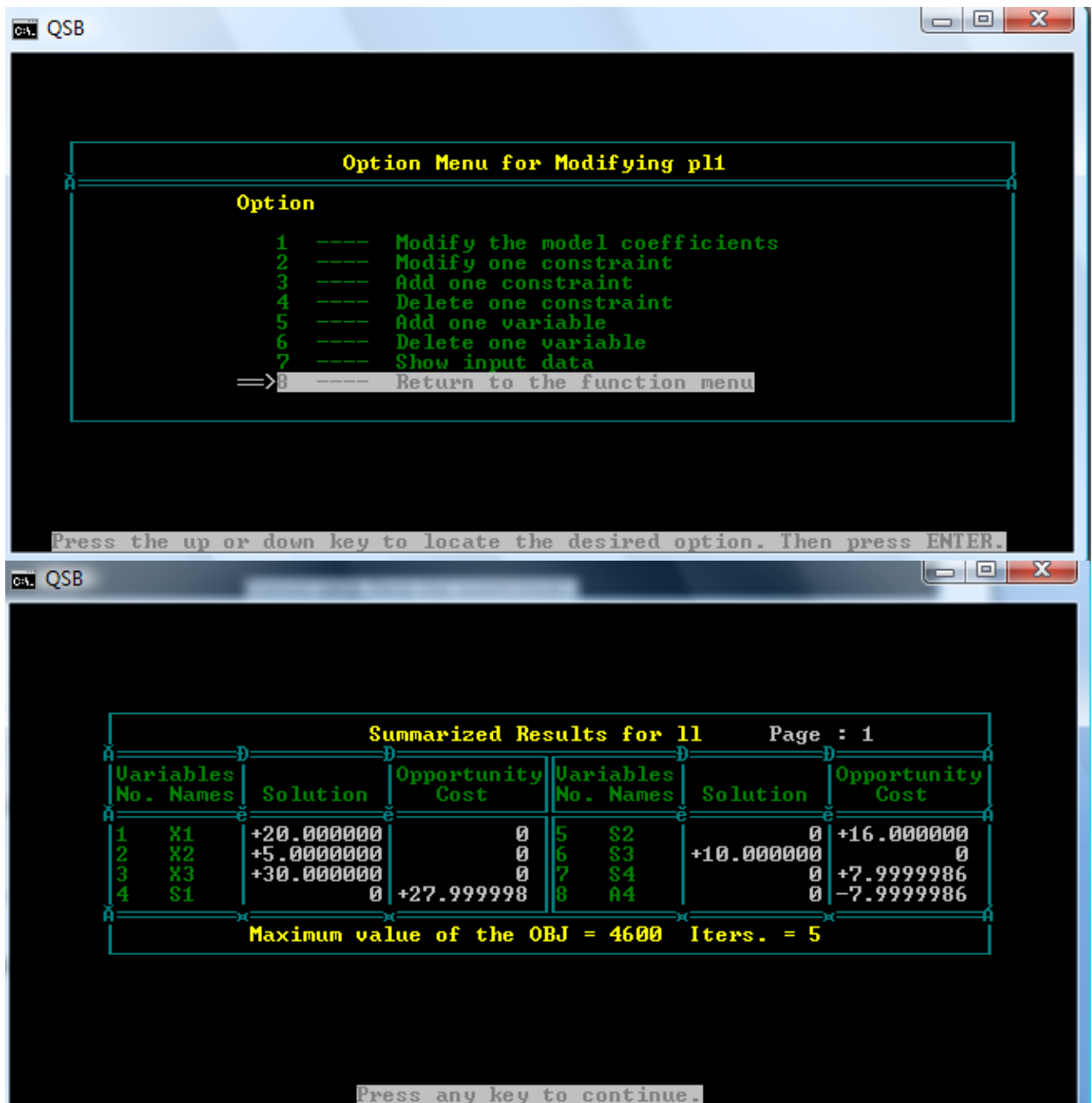
$X_1 = 20$, $X_2 = 5$, $X_3 = 30$, $\max f = 4600$.

QSB

Welcome to your Linear Programming (LP) Decision Support System!	
The options available for LP are as follows.	
If you are a first-time user, you might benefit from option 1.	
Option	Function
1 ----	Overview of LP Decision Support System
2 ----	Enter new problem
3 ----	Read existing problem from disk(ette)
4 ----	Show input data
5 ----	Solve problem
6 ----	Save problem on disk(ette)
=> 7 ----	Modify problem
8 ----	Show final solution
9 ----	Return to the program menu
0 ----	Exit from QSB

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.





c) La punctul a) se câștigă mai mult decât la b), dar la varianta b) nu se pierde un client al produsului P_2 care s-ar duce altfel la concurență.

Se pot lua diverse valori ale cererii minime sau maxime ale produselor, rezultând probleme de programare liniară cu mai multe restricții decât problema (3.14).

d) Este problemă de programare liniară cu soluții impuse. În acest caz problema de programare liniară se reduce ca și dimensiune de la 3 variabile la $2 = 3 - 1$. Pentru rezolvarea problemei se va renunța la variabila X_2 în matricea A , deci coloana 2 dispare (sau se face zero), în funcția obiectiv f dispare c_2 (sau se face zero) și termenii liberi b_i , $i = 1, 2, 3$, se vor corecta cu valorile coloanei $j = 2$.

$$b'_i = b_i - a_{i2} \cdot X_2 = b_i - a_{i2} \cdot 5, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\begin{aligned} X_1 + 3 \cdot X_3 &\leq 120 - 2 \cdot 5 = 110 \\ 2 \cdot X_1 + X_3 &\leq 80 - 2 \cdot 5 = 70 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 70 - 2 \cdot 5 = 60 \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3; \\ f_d(X_1, X_3) &= 60 \cdot X_1 + 100 \cdot X_3 \\ \max f_d(X_1, X_3) \end{aligned} \quad (3.14d)$$

Se rezolvă problema de programare liniară **(3.14d)** cu programul QSB, modulul *linear programming*, și se obține soluția optimă pentru punctul d):

$$X_1 = 20, X_3 = 30, \max f_d = 4200.$$

Soluția optimă:

$$\max f(X_1, X_2, X_3) = \max f(X_1, 5, X_3) = \max f_d + 80 \cdot 5 = 4200 + 400 = 4600$$

Exemplul nr. 3.1a.

Se consideră o problemă de alocare a resurselor materiale cu maximizarea profitului. Din $m = 3$ resurse se fabrică $n = 3$ produse, date în tabelul nr.3.2a, iar consumul de resurse și disponibilul de resurse sunt într-un interval închis. Trebuie determinată ce cantitate se va fabrica din fiecare produs, astfel încât profitul obținut să fie maxim.

Tabelul nr.3.2 a

P_j	P_1	P_2	P_3	Resurse disponibile b_i
R_i				
R_1	[0.9; 1.1]	[1.8; 2.2]	[2.7; 3.3]	[108; 132]
R_2	[1.8; 2.2]	[1.8; 2.2]	[0.9; 1.1]	[72; 88]
R_3	[0.9; 1.1]	[1.8; 2.2]	[0.9; 1.1]	[63; 77]
Profitul unitar c_j	60	80	100	

Se notează cu X_j cantitatea din produsul P_j ce se va fabrica, $j = 1, 2, 3$. Modelul matematic este o problemă de programare liniară cu coeficienți mulțimi convexe (intervale închise), este dat de relațiile (3.14a).

$$\begin{aligned}
 &X_1 \cdot [0.9; 1.1] + X_2 \cdot [1.8; 2.2] + X_3 \cdot [2.7; 3.3] \subseteq [108; 132] \\
 &X_1 \cdot [1.8; 2.2] + X_2 \cdot [1.8; 2.2] + X_3 \cdot [0.9; 1.1] \subseteq [72; 88] \\
 &X_1 \cdot [0.9; 1.1] + X_2 \cdot [1.8; 2.2] + X_3 \cdot [0.9; 1.1] \subseteq [63; 77] \\
 &X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
 &f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \\
 &\max f(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned}
 \tag{3.14a}$$

Modelul dat de relațiile (3.14a), se reduce la problema de programare liniară (3.14b).

$$\begin{aligned}
 &0.9 X_1 + 1.8 X_2 + 2.7 X_3 \geq 108 \\
 &1.1 X_1 + 2.2 X_2 + 3.3 X_3 \leq 132 \\
 &1.8 X_1 + 1.8 X_2 + 0.9 X_3 \geq 72 \\
 &2.2 X_1 + 2.2 X_2 + 1.1 X_3 \leq 88 \\
 &0.9 X_1 + 1.8 X_2 + 0.9 X_3 \geq 63 \\
 &1.1 X_1 + 2.2 X_2 + 1.1 X_3 \leq 77 \\
 &X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
 &f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \\
 &\max f(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned}
 \tag{3.14b}$$

Se va rezolva cu programul Qsb, modulul *linear programming*.
Ecrane Qsb de rezolvare:

```

QSB

Welcome to QSB <Quantitative Systems for Business>!
You may choose from following management science decision support systems:

Code No.      Program
-----
=>1 -- Linear programming
2 -- Integer linear programming
3 -- Transshipment problem
4 -- Assignment problem
5 -- Network modeling
6 -- Project scheduling -- CPM
7 -- Project scheduling -- PERT
8 -- Dynamic programming

9 -- Inventory theory
A -- Queuing theory
B -- Queuing system simulation
C -- Decision/probability theory
D -- Markov process
E -- Time series forecasting
F -- Specify printer/display adapter
G -- Exit from QSB

** QSB(I): Programs 1 to 5,  QSB(II): Programs 6 to E **

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.

```

```

QSB

Welcome to your Linear Programming <LP> Decision Support System!
The options available for LP are as follows.
If you are a first-time user, you might benefit from option 1.

Option      Function
-----
=>1 ----- Overview of LP Decision Support System
2 ----- Enter new problem
3 ----- Read existing problem from disk(ette)
4 ----- Show input data
5 ----- Solve problem
6 ----- Save problem on disk(ette)
7 ----- Modify problem
8 ----- Show final solution
9 ----- Return to the program menu
0 ----- Exit from QSB

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.

```

QSB

LP Model Entry for lp2

Please observe the following conventions when entering a problem:

- <1> 100, 100.0, +100, +100.0, 1E2, and 1.0E+2 are the same.
- <2> -123, -1.23E2, and -1.23E+2 are the same.
- <3> >=, >, =, and < are the same; <=, <, =, and ~ are the same.
- <4> After you enter your data, press the ENTER key.
- <5> On the same screen page, you may correct errors by pressing the BACKSPACE key to move the cursor to the correct position.
- <6> When you are satisfied with the data on a page, press the SPACE BAR.
- <7> When entering the problem, press the Esc key to go to a previous page; press the / key to go to the next page.

Do you want to maximize <1> or minimize <2> criterion? <Enter 1 or 2> <1 >

How many variables are there in your problem? <Enter number ~ 500 > <3 >

How many constraints are there in your problem? <Enter number ~ 500 > <6 >

How many ',' constraints are there in your problem? <Enter number ~ 500 > <3 >

Do you want to use the default variable names <X1,X2,...,Xn> <Y/N>? <y >

Press the SPACE BAR to continue if your entries are correct.

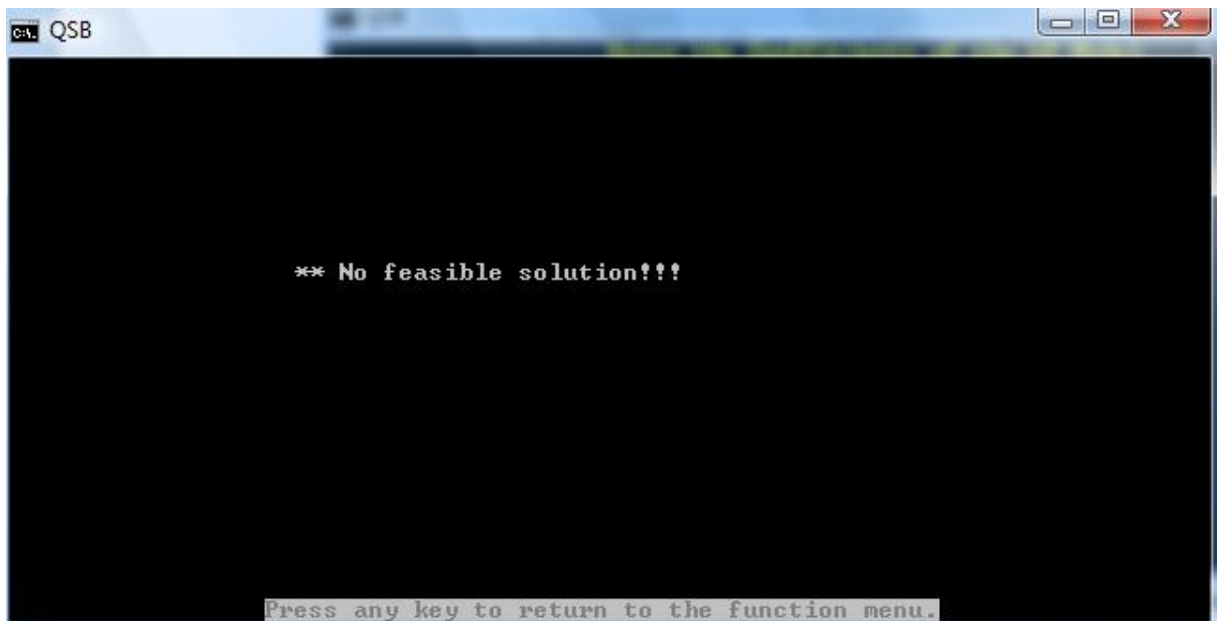
QSB

Enter the Coefficients of the LP Model

Page 1

	60	X1	80	X2	100	X3	
Max	60	X1	80	X2	100	X3	
Subject to							
<1>	0.9	X1	1.8	X2	2.7	X3	>=100
<2>	1.1	X1	2.2	X2	3.3	X3	<=132
<3>	1.8	X1	1.8	X2	0.9	X3	>=72
<4>	2.2	X1	2.2	X2	1.1	X3	<=88
<5>	0.9	X1	1.8	X2	0.9	X3	>=63
<6>	1.1	X1	2.2	X2	1.1	X3	<=77

Esc -- Previous page, / -- Next page.



S-a luat consumul și disponibilul de resurse cu +10% și -10% mai mare, respectiv mai mic decât cel din tabelul nr.3.2, dar nu va avea soluții.

Nu are soluții, dar se vor modifica o parte din termenii liberi și va avea soluție optimă.

Se modifică limita superioară din disponibilul de resurse.



QSB

Summarized Results for p Page : 1

Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost
1 X1	+16.363632	0	7 S3	+5.7272692	0
2 X2	+12.954550	0	8 A3	0	0
3 X3	+27.727270	0	9 S4	0	+18.181818
4 S1	+4.9090877	0	10 S5	0	+11.111113
5 A1	0	0	11 A5	0	-11.111113
6 S2	0	+27.272726	12 S6	+7.9999962	0

Maximum value of the OBJ = 4790.909 Iters. = 7

Press any key to continue.

EXTENSIA 3.2.2. A PROBLEMEI MAXIMIZARII PROFITULUI

Dacă din *studii de marketing* se poate estima intervalul de încadrare a profitului unitar
 $c_j \in [d_j, e_j], j = 1, 2, \dots, n;$ (3.16)
 atunci problema dată de relațiile (3.12) se poate generaliza din nou, considerând relația (3.17).

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n X_j \cdot [d_j, e_j], d_j > 0, e_j > 0, j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.17)$$

Se obține astfel modelul matematic (3.18).

$$\sum_{j=1}^n X_j \cdot [\alpha_{ij}, \beta_{ij}] \subseteq [\gamma_i, \delta_i], i = 1, 2, \dots, m;$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.18)$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n X_j \cdot [d_j, e_j]$$

$$\sup f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Modelul (3.18) este o problemă de programare liniară cu coeficienți mulțimi convexe (intervale închise) care se rezolvă cu ajutorul modelelor date de relațiile (3.19) și (3.20).

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} \cdot X_j \leq \delta_i, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot X_j \geq \gamma_i, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \quad (3.19)$$

$$f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n d_j \cdot X_j$$

$$\max f_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \cdot X_j \leq \delta_i \\
& \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot X_j \geq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
& X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
& f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n e_j \cdot X_j \\
& \max f_2(X_1, X_2, \dots, X_n).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Se vor nota cu X_{opt}^1 și cu X_{opt}^2 soluțiile optime ale problemelor de programare liniară, date de relațiile (3.19) și (3.20).

$$X_{opt}^1 = \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \\ \dots \\ X_n^1 \end{pmatrix}, \quad X_{opt}^2 = \begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \\ \dots \\ X_n^2 \end{pmatrix}$$

Soluțiile optime ale problemelor de programare liniară date de relațiile (3.19) și (3.20) se obțin cu algoritmul simplex primal sau dual, respectiv cu calculatorul utilizând programele QSB, DSSPOM, LINDO, QM sau alte programe.

Se notează:

$$\begin{aligned}
f_1(X_{opt}^1) &= \max f_1(X) = S_1 \\
f_2(X_{opt}^2) &= \max f_2(X) = S_2
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Se obține intervalul $[S_1, S_2]$ de încadrare a profitului maxim în (3.22).

$$\max f(X) \in [S_1, S_2]. \tag{3.22}$$

Se pot considera și alte funcții obiectiv f , cum ar fi: venitul din vânzări, producția fizică, producția marfă, cifra de afaceri, costurile totale etc.

5. 3. UTILIZAREA OPTIMĂ A MAȘINILOR PENTRU PROCESELE DE PRELUCRARE A PIESELOR ȘI REPERELOR. PROBLEMA MAXIMIZĂRII PROFITULUI ÎN ALOCAREA MAȘINILOR

Într-un sistem de producție (atelier, secție, întreprindere) se fabrică piesele / reperele P_j , $j = 1, 2, \dots, n$ executând pentru fiecare operații de prelucrare pe mașinile M_i , $i = 1, 2, \dots, m$, în mod succesiv, iar ordinea operațiilor este indiferentă.

Se cunosc:

- timpii unitari de prelucrare ai piesei P_j pe mașina M_i egali cu t_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$;
- timpul disponibil al unei mașini M_i pentru orizontul de timp considerat (săptămână, lună etc.) egal cu T_i , $i = 1, 2, \dots, m$;
- profitul (real sau estimat) pe fiecare piesă / reper P_j egal cu c_j , $j = 1, 2, \dots, n$;

Se presupune că mașinile nu au timpi morți, datorită faptului că nu contează ordinea operațiilor. Aceste elemente sunt date în tabelul nr.3.3.

Se presupune că sunt satisfăcute condițiile:

$$t_{ij} \geq 0, T_i \geq 0, c_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Trebuie stabilit planul de fabricație optim, deci câte piese / repere $P_1, P_2, \dots, P_n$ se vor fabrica în perioada de timp considerată (zi, săptămână, lună etc.) și în condițiile date, pentru a obține un profit maxim.

Se va nota cu X_j cantitatea din piesa / reperul P_j ce se va fabrica, $j = 1, 2, \dots, n$.

Modelul matematic al problemei este dat de relațiile (3.23) care reprezintă o problemă de programare liniară în numere întregi.

Tabelul nr.3.3.

P_j	P_1	P_2	$\dots$	P_n	Timp mașină disponibil T_i
M_i					
M_1	t_{11}	t_{12}	$\dots$	t_{1n}	T_1
M_2	t_{21}	t_{22}	$\dots$	t_{2n}	T_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_m	t_{m1}	t_{m2}	$\dots$	t_{mn}	T_m
Profitul unitar c_j	c_1	c_2	$\dots$	c_n	

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot X_j &\leq T_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ X_j &\in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ f(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j, \\ \max f(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Rezolvarea problemei de programare liniară în numere întregi (3.23) se poate realiza cu algoritmul lui Gomory sau algoritmul Branch and Bound, iar pe calculatoare se pot utiliza programele: Qsb, Lindo sau alte programe.

Observație.

Cele două observații, inclusiv relația (3.9), de la problema maximizării profitului în alocarea resurselor materiale rămân valabile și pentru problema de programare liniară în numere întregi din relațiile (3.23).

EXTENSIA 3.3.1.

Se va da o **generalizare** a modelului dat de relațiile (3.23), prin considerarea timpului de prelucrare și a timpului disponibil că aparțin unor intervale, (3.24).

$$t_{ij} \in [\alpha_{ij}, \beta_{ij}], \quad \alpha_{ij} \geq 0, \beta_{ij} \geq 0, \quad (3.24)$$

$$T_i \in [\gamma_i, \delta_i], \quad \gamma_i \geq 0, \delta_i \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

În aceste ipoteze modelul matematic corespunzător este o problemă de programare liniară în numere întregi cu coeficienți mulțimi convexe (intervale închise) (3.25).

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n X_j \cdot [\alpha_{ij}, \beta_{ij}] \subseteq [\gamma_i, \delta_i], \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
& X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
& X_j \in \mathbf{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
& f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j \\
& \sup f(X_1, X_2, \dots, X_n)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Problema dată de relațiile (3.25), este echivalentă cu problema dată de relațiile (3.26).

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \cdot X_j \leq \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
& \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot X_j \geq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
& X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
& X_j \in \mathbf{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
& f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j \\
& \max f(X_1, X_2, \dots, X_n)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Problema (3.26) este o problemă de programare liniară în numere întregi cu coeficienți numere reale. Rezolvarea modelului (3.25) se reduce la rezolvarea modelului (3.26), ce se rezolvă cu algoritmul lui Gomory sau algoritmul Branch and Bound, respectiv pe calculator cu programele QSB, LINDO, QM sau alte programe.

EXTENSIA 3.3.2.

Dacă din *studii de marketing* se poate estima intervalul de încadrare a profitului unitar

$$c_j \in [d_j, e_j], \quad j = 1, 2, \dots, n; \tag{3.27}$$

atunci problema dată de relațiile (3.23) se poate generaliza din nou, considerând relația (3.28).

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n X_j \cdot [d_j, e_j], \quad d_j > 0, e_j > 0, j = 1, 2, \dots, n; \tag{3.28}$$

Se obține prin utilizarea relației (3.28) modelul matematic (3.29).

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n X_j \cdot [\alpha_{ij}, \beta_{ij}] \subseteq [\gamma_i, \delta_i], \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
& X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
& X_j \in \mathbf{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
& f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n X_j \cdot [d_j, e_j] \\
& \sup f(X_1, X_2, \dots, X_n)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Modelul (3.29) este o problemă de programare liniară cu coeficienți mulțimi convexe (intervale închise) care se rezolvă cu ajutorul celor două modele, date de relațiile (3.30) și (3.31).

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \cdot X_j \leq \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
& \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot X_j \geq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
& X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
& X_j \in \mathbf{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
& f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n d_j \cdot X_j \\
& \max f_1(X_1, X_2, \dots, X_n)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \cdot X_j \leq \delta_i \\
& \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot X_j \geq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
& X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
& X_j \in \mathbf{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
& f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n e_j \cdot X_j \\
& \max f_2(X_1, X_2, \dots, X_n).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Se vor nota cu X_{opt}^1 și cu X_{opt}^2 soluțiile optime ale celor două probleme de programare liniară de mai sus, date de relațiile (3.30), respectiv (3.31).

$$X_{opt}^1 = \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \\ \dots \\ X_n^1 \end{pmatrix}, \quad X_{opt}^2 = \begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \\ \dots \\ X_n^2 \end{pmatrix}$$

Soluțiile optime ale celor două probleme de programare liniară date de relațiile (3.30) și (3.31) se obțin cu algoritmul lui Gomory sau algoritmul Branch and Bound, respectiv cu calculatorul utilizând programele QSB, LINDO sau alte programe.

Se notează:

$$\begin{aligned}
f_1(X_{opt}^1) &= \max f_1(X) = S_1 \\
f_2(X_{opt}^2) &= \max f_2(X) = S_2
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Se obține intervalul $[S_1, S_2]$ de încadrare a profitului maxim în (3.33).

$$\max f(X) \in [S_1, S_2]. \tag{3.33}$$

Exemplul nr. 3.2.

Se consideră un atelier în care se prelucrează trei piese / repere P_1 , P_2 și P_3 pe trei mașini M_1 , M_2 și M_3 . Timpul unitar de prelucrare al fiecărei piese și timpul disponibil al fiecărei

mașini sunt intervale, date în tabelul nr. 3.4. Se cere să se determine câte piese trebuie prelucrate astfel încât profitul să fie maxim.

Tabelul nr. 3.4.

P_j	P_1	P_2	P_3	Timp mașină disponibil T_i [min]
M_i				
M_1	[10.9 - 11.1]	[8.9 - 9.1]	[7.4 - 7.6]	[9000 - 12000]
M_2	[6.9 - 7.1]	[11.9 - 12.1]	[9.2 - 9.4]	[8000 - 9600]
M_3	[5.9 - 6.1]	[15.9 - 16.1]	[8.6 - 8.8]	[8500 - 10500]
Profit unitar c_j [lei]	150	250	230	

Modelul matematic este o problemă de programare liniară cu coeficienți mulțimi convexe (intervale închise), este dat de relațiile (3.34).

$$X_1 \cdot [10.9 ; 11.1] + X_2 \cdot [8.9 ; 9.1] + X_3 \cdot [7.4 ; 7.6] \subseteq [9000 ; 12000]$$

$$X_1 \cdot [6.9 ; 7.1] + X_2 \cdot [11.9 ; 12.1] + X_3 \cdot [9.2 ; 9.4] \subseteq [8000 ; 9600]$$

$$X_1 \cdot [5.9 ; 6.1] + X_2 \cdot [15.9 ; 16.1] + X_3 \cdot [8.6 ; 8.8] \subseteq [8500 ; 10500]$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$X_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.34)$$

$$f(X_1, X_2, X_3) = 150 \cdot X_1 + 250 \cdot X_2 + 230 \cdot X_3$$

$$\max f(X_1, X_2, X_3)$$

Modelul dat de relațiile (3.34), se reduce la o problemă de programare liniară în numere întregi (3.35).

$$10.9 X_1 + 8.9 X_2 + 7.4 X_3 \geq 9000$$

$$11.1 X_1 + 9.1 X_2 + 7.6 X_3 \leq 12000$$

$$6.9 X_1 + 11.9 X_2 + 9.2 X_3 \geq 8000$$

$$7.1 X_1 + 12.1 X_2 + 9.4 X_3 \leq 9600$$

$$5.9 X_1 + 15.9 X_2 + 8.6 X_3 \geq 8500$$

$$6.1 X_1 + 16.1 X_2 + 8.8 X_3 \leq 10500$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$X_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$f(X_1, X_2, X_3) = 150X_1 + 250X_2 + 230X_3$$

$$\max f(X_1, X_2, X_3) \quad (3.35)$$

Se rezolvă cu programul Qsb problema (3.35), cu modulul Integer linear programming în 621 iterații și se obține soluția optimă:

$$X_1 = 273 \text{ piese } P_1;$$

$$X_2 = 0 \text{ piese } P_2;$$

$$X_3 = 815 \text{ piese } P_3$$

$$\max f(X_1, X_2, X_3) = 228400 \text{ lei.}$$

Exemplul nr. 3.3.

Se reia exemplul nr. 3.2, considerând că profitul unitar adus de fiecare piesă sunt intervale,

Se consideră un atelier în care se prelucurează trei piese / repere P_1 , P_2 și P_3 pe trei mașini M_1 , M_2 și M_3 . Timpii unitari de prelucrare, tipul disponibil al fiecărei mașini și profitul unitar adus de fiecare piesă sunt intervale, date în tabelul nr.3.5. Se cere să se determine intervalul în care se încadrează profitul maxim în aceste condiții.

Tabelul

nr.3.5.

P_j	P_1	P_2	P_3	Timp mașină disponibil T_i [min]
M_i				
M_1	[10.9 - 11.1]	[8.9 - 9.1]	[7.4 - 7.6]	[9000 - 12000]
M_2	[6.9 - 7.1]	[11.9 - 12.1]	[9.2 - 9.4]	[8000 - 9600]
M_3	[5.9 - 6.1]	[15.9 - 16.1]	[8.6 - 8.8]	[8500 - 10500]
Profit unitar c_j [lei]	[150 - 200]	[250 - 300]	[230 - 280]	

Modelul matematic este o problemă de programare liniară cu coeficienți mulțimi convexe (intervale închise), este dat de relațiile (3.36).

$$X_1 \cdot [10.9 ; 11.1] + X_2 \cdot [8.9 ; 9.1] + X_3 \cdot [7.4 ; 7.6] \subseteq [9000 ; 12000]$$

$$X_1 \cdot [6.9 ; 7.1] + X_2 \cdot [11.9 ; 12.1] + X_3 \cdot [9.2 ; 9.4] \subseteq [8000 ; 9600]$$

$$X_1 \cdot [5.9 ; 6.1] + X_2 \cdot [15.9 ; 16.1] + X_3 \cdot [8.6 ; 8.8] \subseteq [8500 ; 10500]$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$X_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.36)$$

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_1 \cdot [150; 200] + X_2 \cdot [250; 300] + X_3 \cdot [230; 280]$$

$$\sup f(X_1, X_2, X_3)$$

Modelul din relațiile (3.36), se reduce la două probleme de programare liniară în numere întregi, (3.37) și (3.38).

$$10.9 X_1 + 8.9 X_2 + 7.4 X_3 \geq 9000$$

$$11.1 X_1 + 9.1 X_2 + 7.6 X_3 \leq 12000$$

$$6.9 X_1 + 11.9 X_2 + 9.2 X_3 \geq 8000$$

$$7.1 X_1 + 12.1 X_2 + 9.4 X_3 \leq 9600$$

$$5.9 X_1 + 15.9 X_2 + 8.6 X_3 \geq 8500$$

$$6.1 X_1 + 16.1 X_2 + 8.8 X_3 \leq 10500$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$X_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$f_1(X_1, X_2, X_3) = 150X_1 + 250X_2 + 230X_3$$

$$\max f_1(X_1, X_2, X_3) \quad (3.37)$$

Se rezolvă cu programul Qsb problema (3.37), cu modulul *Integer linear programming* în 621 iterații și se obține soluția optimă:

$$\begin{aligned} X_1 &= 273 \text{ piese } P_1 ; \\ X_2 &= 0 \text{ piese } P_2 ; \\ X_3 &= 815 \text{ piese } P_3 \\ \max f_1(X_1, X_2, X_3) &= 228400 \text{ lei .} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10.9 X_1 + 8.9 X_2 + 7.4 X_3 &\geq 9000 \\ 11.1 X_1 + 9.1 X_2 + 7.6 X_3 &\leq 12000 \\ 6.9 X_1 + 11.9 X_2 + 9.2 X_3 &\geq 8000 \\ 7.1 X_1 + 12.1 X_2 + 9.4 X_3 &\leq 9600 \\ 5.9 X_1 + 15.9 X_2 + 8.6 X_3 &\geq 8500 \\ 6.1 X_1 + 16.1 X_2 + 8.8 X_3 &\leq 10500 \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3 ; \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} X_j &\in \mathbf{Z}, \quad j = 1, 2, 3; \\ f_2(X_1, X_2, X_3) &= 200X_1 + 300X_2 + 280X_3 \\ \max f_2(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

Se rezolvă cu programul Qsb problema (3.38), cu modulul *Integer linear programming* în 405 iterații și se obține soluția optimă:

$$\begin{aligned} X_1 &= 273 \text{ piese } P_1 ; \\ X_2 &= 0 \text{ piese } P_2 ; \\ X_3 &= 815 \text{ piese } P_3 \\ \max f_2(X_1, X_2, X_3) &= 282800 \text{ lei .} \end{aligned}$$

Deci, s-a determinat intervalul de încadrare a profitului maxim:

$$\max f(X_1, X_2, X_3) \in [228400; 282800] .$$

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C3

3.4. DUALITATEA ÎN PROGRAMAREA LINIARĂ

3.4.1. DEFINIREA PROBLEMEI DUALE

Se consideră problema de programare liniară (3.54).

$$\begin{aligned} A.X &\leq b \\ X &\geq 0 \\ f(X) &= c.X \\ \max f(X) \end{aligned} \quad (3.54)$$

unde: $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad c = (c_1, \quad c_2, \quad \dots, c_n).$$

Problema duală asociată problemei de programare liniară (3.54) este problema de programare liniară (3.55).

$$\begin{aligned} A^t \cdot Y &\geq c^t \\ Y &\geq 0 \\ g(Y) &= b^t \cdot Y \\ \min g(Y) \end{aligned} \tag{3.55}$$

unde: A^t - transpusa matricii A ;

$A^t = (a_{ji})$, $j = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, m$;

b^t , c^t - vectorii transpuși ai vectorilor b , respectiv c ;

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix}; \quad b^t = (b_1, \quad b_2, \quad \dots, b_m); \quad c^t = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Problema de programare liniară (3.54) se va numi problemă primală, iar problema de programare liniară (3.55) se va numi problemă duală. Se observă că duala problemei de programare liniară duală (3.55), deci duala dualei, este problema primală (3.54).

Reguli de obținere a problemei duale

1. Matricea coeficienților sistemului de restricții duale este transpusa matricii coeficienților sistemului de restricții primale.
2. Coeficienții funcției obiectiv din problema primală devin termeni liberi în problema duală.
3. Termenii liberi din problema primală devin coeficienți ai funcției obiectiv în problema duală.
4. O problemă de maximizare în problema primală se transformă în minimizare în problema duală, iar o problemă de minimizare se transformă în problemă de maximizare în duală.
5. Numărul m al restricțiilor problemei primale este egal cu numărul variabilelor problemei duale. Numărul n al variabilelor problemei primale este egal cu numărul restricțiilor problemei duale.
6. Fiecărei restricții a problemei primale i se asociază o variabilă în problema duală. Variabilele asociate restricțiilor cu relația $\geq$ sunt nenegative (deci ≥ 0) dacă problema primală este de minim și nepozitive (deci ≤ 0) dacă problema primală este de maxim. Variabilele asociate restricțiilor cu relația $\leq$ sunt nepozitive (deci ≤ 0) dacă problema primală este de minim și nenegative (deci ≥ 0) dacă problema primală este de maxim. Variabilele asociate egalităților sunt fără restricții de semn.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j &\geq b_i \xrightarrow{\min f} Y_i \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j &\geq b_i \xrightarrow{\max f} Y_i \leq 0 \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \leq b_i \xrightarrow{\min f} Y_i \leq 0$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \leq b_i \xrightarrow{\max f} Y_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j = b_i \rightarrow Y_i \in R$$

7. Fiecărei variabile a problemei primale i se asociază o restricție în problema duală. Fiecărei variabile nenegative din primală (deci ≥ 0) îi corespunde în problema duală o restricție cu relația $\geq$, dacă problema primală este de maxim și respectiv o restricție cu relația $\leq$ dacă problema primală este de minim. Fiecărei variabile nepozitive (deci ≤ 0) din problema primală îi corespunde în problema duală o restricție cu relația $\leq$ dacă problema primală este de maxim și respectiv o restricție cu relația $\geq$ dacă problema primală este de minim. Unei variabile oarecare, fără restricție de semn, în primală, îi va corespunde în duală o restricție cu egalitate.

$$X_j \geq 0 \xrightarrow{\max f} \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot Y_i \geq c_j$$

$$X_j \geq 0 \xrightarrow{\min f} \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot Y_i \leq c_j$$

$$X_j \leq 0 \xrightarrow{\max f} \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot Y_i \leq c_j \quad (3.57)$$

$$X_j \leq 0 \xrightarrow{\min f} \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot Y_i \geq c_j$$

$$X_j \in R \rightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot Y_i = c_j$$

Exemplul 3.4. Se consideră problema de programare liniară primală:

$$\begin{aligned} 2 \cdot X_1 + X_2 + X_3 + 5 \cdot X_4 &\leq 11 \\ 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 2 \cdot X_4 &\leq 14 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0 \\ f &= 5 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 4 \cdot X_4 \\ \max f \end{aligned}$$

Se cere să se scrie duala sa și duala dualei.

Problema duală atașată:

$$\begin{aligned} 2 \cdot Y_1 + 3 \cdot Y_2 &\geq 5 \\ Y_1 + 2 \cdot Y_2 &\geq 2 \\ Y_1 + Y_2 &\geq 3 \\ 5 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2 &\geq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &\geq 0, \quad Y_2 \geq 0 \\
g &= 11 \cdot Y_1 + 14 \cdot Y_2 \\
\min g
\end{aligned}$$

Duala dualei:

$$\begin{aligned}
2 \cdot Z_1 + Z_2 + Z_3 + 5 \cdot Z_4 &\leq 11 \\
3 \cdot Z_1 + 2 \cdot Z_2 + Z_3 + 2 \cdot Z_4 &\leq 14 \\
Z_1 &\geq 0, \quad Z_2 \geq 0, \quad Z_3 \geq 0, \quad Z_4 \geq 0 \\
h &= 5 \cdot Z_1 + 2 \cdot Z_2 + 3 \cdot Z_3 + 4 \cdot Z_4 \\
\max h
\end{aligned}$$

Duala dualei coincide cu primala.

Exemplul 3.5. Se consideră problema de programare liniară primală:

$$\begin{aligned}
2 \cdot X_1 + X_2 + 2 \cdot X_3 &\geq 10 \\
X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\geq 18 \\
X_1 + X_2 + X_3 &\geq 6 \\
X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\geq 13 \\
X_1 &\geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0 \\
f &= 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 5 \cdot X_3 \\
\min f
\end{aligned}$$

Se cere să se scrie duala sa.

Problema duală atașată:

$$\begin{aligned}
2 \cdot Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 &\leq 2 \\
Y_1 + 2 \cdot Y_2 + Y_3 + 2 \cdot Y_4 &\leq 3 \\
2 \cdot Y_1 + Y_2 + Y_3 + 3 \cdot Y_4 &\leq 5 \\
Y_1 &\geq 0, \quad Y_2 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0, \quad Y_4 \geq 0 \\
g &= 10 \cdot Y_1 + 18 \cdot Y_2 + 6 \cdot Y_3 + 13 \cdot Y_4 \\
\max g
\end{aligned}$$

3.4.2. RELAȚIA PRIMALĂ – DUALĂ ÎN PROBLEMA MAXIMIZĂRII PROFITULUI. INTERPRETAREA ECONOMICĂ A DUALITĂȚII

Se consideră problema de programare liniară primală de maximizare a profitului din relațiile (3.7), reluată în relațiile (3.60) și duala sa în relațiile (3.61).

PRIMALA

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
f(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j \\
\max f(X_1, X_2, \dots, X_n)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

DUALA

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot Y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$Y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.61)$$

$$g(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = \sum_{i=1}^m b_i \cdot Y_i$$

$$\min g(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$$

Dacă se rezolvă cele două probleme de programare liniară, primala și duala, date de relațiile (3.60) și (3.61), rezultând soluțiile optime X^* și Y^* , prin aplicarea teoremelor de dualitate și a consecințelor lor, putem avea informații despre consumul resursei R_i .

$$X^* = \begin{pmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \vdots \\ X_n^* \end{pmatrix}, \quad Y^* = \begin{pmatrix} Y_1^* \\ Y_2^* \\ \vdots \\ Y_m^* \end{pmatrix}$$

Astfel, dacă $Y_i^* > 0$, atunci resursa R_i este utilizată în întregime, este epuizată, pentru varianta soluției optime, este verificată relația (3.62).

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j^* = b_i \quad (3.62)$$

Dacă $Y_i^* = 0$, atunci resursa R_i nu este utilizată în întregime, mai rămâne nefolosită cantitatea dată de relația (3.63).

$$b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j^* \quad (3.63)$$

Din punct de vedere economic, variabilele duale arată cu cât ar fi crescut valoarea optimă a funcției obiectiv, dacă s-ar fi dispus de o unitate de resursă în plus. Variabilele duale mai sunt numite: "prețuri umbră", "prețuri umbră ale resurselor limitate", "evaluări obiectiv determinate", "evaluări duale".

Restricției de rang i din modelul liniar de maximizare a profitului (3.60), dată de relația (3.64):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \leq b_i \quad (3.64)$$

se atașează variabila duală Y_i în problema duală (3.61), iar prin rezolvarea problemei duale (3.61) valoarea lui Y_i arată cu cât ar fi crescut profitul maxim f dacă resursa R_i ar fi fost mai mare cu o unitate, deci egală cu $b_i + 1$.

În cazul problemelor de programare liniară care conțin restricții neconcordanțe și egalități, la interpretarea variabilelor duale (prețurilor umbră), trebuie să se țină seama de natura economică a funcției obiectiv și de semnul variabilei duale.

Exemplul nr. 3.6.

Se va revedea un exemplu prezentat. Se consideră o problemă de alocare a resurselor materiale cu maximizarea profitului. Din $m = 3$ resurse se fabrică $n = 3$ produse, date în tabelul nr.3.6. Trebuie determinată ce cantitate se va fabrica din fiecare produs, astfel încât profitul obținut să fie maxim.

Tabelul nr.3.6.

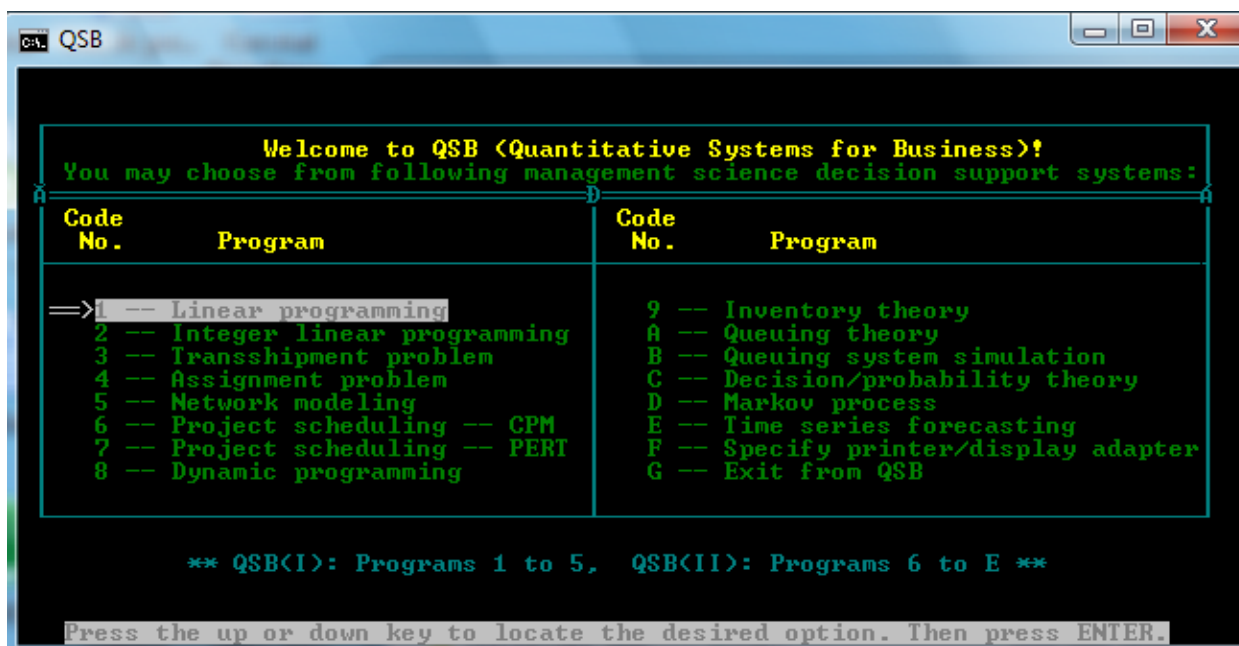
R_i	P_j	P_1	P_2	P_3	Resurse disponibile b_i
R_1		1	2	3	120
R_2		2	2	1	80
R_3		1	2	1	70
Profitul unitar c_j		60	80	100	

Se vor rezolva problema primală și problema duală, urmând să se interpreteze rezultatele, deci soluțiile optime ce se obțin.

Modelul matematic reprezintă problema de programare liniară primală:

$$\begin{aligned}
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 120 \\
 &2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 80 \\
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70 \\
 &X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
 &f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \\
 &\max f(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned}$$

Se rezolvă problema de programare liniară primală cu programul QSB, modulul linear programming, și se obține soluția optimă: $X_1 = 24$, $X_2 = 0$, $X_3 = 32$, $\max f = 4640$



Problema de programare liniară duală:

$$\begin{aligned}
 &Y_1 + 2 \cdot Y_2 + Y_3 \geq 60 \\
 &2 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2 + 2 \cdot Y_3 \geq 80 \\
 &3 \cdot Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 100 \\
 &Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \\
 &g = 120 \cdot Y_1 + 80 \cdot Y_2 + 70 \cdot Y_3 \\
 &\min g
 \end{aligned}$$

Soluția optimă a problemei duale obținută cu programul QSB, modulul linear programming, este: $Y_1 = 28$, $Y_2 = 16$, $Y_3 = 0$, $\min g = 4640 = \max f$

Se observă că $Y_3 = 0$, deci resursa R_3 nu se consumă decât parțial în obținerea soluției optime a primalei (profitul maxim), iar $Y_1 = 28 > 0$ și $Y_2 = 16 > 0$, adică resursele R_1 și R_2 se consumă integral pentru obținerea soluției optime a primalei (profitul maxim).

Aceste informații se verifică cu soluția optimă a problemei primale în primală.

$$24 + 0 + 3 \cdot 32 = 120$$

$$2 \cdot 24 + 0 + 32 = 80$$

$$24 + 0 + 32 = 56 < 70$$

Se vor analiza câteva situații.

Cazul 1.

Variabila duală $Y_1 = 28$, deci dacă am dispune din resursa R_1 în cantitatea

$b_1' = b_1 + 1 = 120 + 1 = 121$, profitul maxim ar crește cu valoarea lui $Y_1 = 28$ unități monetare.

Se verifică acest lucru, considerând problema dată de relațiile:

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\leq 121 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 80 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 70 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3; \\ f(X_1, X_2, X_3) &= 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \\ \max f(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

Rezolvând cu programul QSB, se obține soluția optimă:

$$X_1 = 23.8, X_2 = 0; X_3 = 32.4; \max f = 4668 = 4640 + 28 = 4640 + Y_1.$$

Cazul 2.

Se va mări disponibilul inițial din prima resursă R_1 cu 2 unități,

$$b_1' = b_1 + 2 = 120 + 2 = 122$$

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\leq 122 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 80 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 70 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3; \\ f(X_1, X_2, X_3) &= 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \\ \max f(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obține soluția optimă:

$$X_1 = 23.6, X_2 = 0; X_3 = 32.8; \max f = 4696 = 4640 + 2 \cdot 28 = 4640 + 56 = 4640 + 2 \cdot Y_1.$$

Cazul 3.

Dacă se va mări disponibilul din resursa R_2 cu o unitate, $b_2' = b_2 + 1 = 80 + 1 = 81$, iar celelalte două resurse rămân neschimbate:

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\leq 120 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 81 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 70 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3; \\ f(X_1, X_2, X_3) &= 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \\ \max f(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obține soluția optimă:

$$X_1 = 24.6, X_2 = 0; X_3 = 31.8; \max f = 4656 = 4640 + 16 = 4640 + Y_2.$$

Cazul 4.

Dacă se va mări disponibilul din resursa R_3 cu o unitate, $b_3' = b_3 + 1 = 70 + 1 = 71$, iar celelalte două resurse rămân neschimbate:

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\leq 120 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 80 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 71 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3; \\ f(X_1, X_2, X_3) &= 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \\ \max f(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obține soluția optimă:

$$X_1 = 24, X_2 = 0; X_3 = 32; \max f = 4640 = 4640 + 0 = 4640 + Y_3.$$

Cazul 5.

Dacă se va mări disponibilul din resursele R_1 și R_2 cu o unitate, $b_1' = b_1 + 1 = 120 + 1 = 121$, $b_2' = b_2 + 1 = 80 + 1 = 81$, iar resursa R_3 rămâne neschimbată:

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\leq 121 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 81 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 70 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3; \\ f(X_1, X_2, X_3) &= 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \\ \max f(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obține soluția optimă:

$$X_1 = 24.4, X_2 = 0; X_3 = 32.2; \max f = 4684 = 4640 + 28 + 16 = 4640 + Y_1 + Y_2.$$

Se pot considera și alte scenarii, rezultând diverse variante de plan de fabricație.

Cazul 6.

Dacă se va micșora disponibilul din resursa R_1 cu o unitate, $b_1' = b_1 - 1 = 120 - 1 = 119$, iar disponibilul din resursele R_1 R_3 rămâne neschimbat, profitul maxim va scădea cu valoarea lui $Y_1 = 28$ unități monetare. Se verifică acest lucru, considerând problema dată de relațiile:

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\leq 119 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 80 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 70 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3; \\ f(X_1, X_2, X_3) &= 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \\ \max f(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obține soluția optimă:

$$X_1 = 24.2, X_2 = 0; X_3 = 31.6; \max f = 4612 = 4640 - 28 = 4640 - Y_1$$

Cazul 7.

Dacă se va micșora disponibilul din resursele R_1 , R_2 cu o unitate, $b_1' = b_1 - 1 = 120 - 1 = 119$, $b_2' = b_2 - 1 = 80 - 1 = 79$, iar resursa R_3 rămâne neschimbată:

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\leq 119 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 79 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 70 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

$$f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3$$

$$\max f(X_1, X_2, X_3)$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obține soluția optimă:

$$X_1 = 23.6, X_2 = 0; X_3 = 31.8; \max f = 4596 = 4640 - 28 - 16 = 4640 - Y_1 - Y_2$$

Cazul 8.

Dacă se va micșora disponibilul din resursa R_1 cu o unitate, $b_1' = b_1 - 1 = 120 - 1 = 119$, disponibilul lui R_2 crește cu o unitate, $b_2' = b_2 + 1 = 80 + 1 = 81$, iar resursa R_3 rămâne neschimbată:

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 119$$

$$2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 81$$

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, 3;$$

$$f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3$$

$$\max f(X_1, X_2, X_3)$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obține soluția optimă:

$$X_1 = 24.0, X_2 = 0; X_3 = 31.4; \max f = 4628 = 4640 - 28 + 16 = 4640 - Y_1 + Y_2$$

Se pot considera și alte scenarii, rezultând diverse variante de plan de fabricație.

3.5. PROGRAMAREA LINIARĂ ÎN NUMERE ÎNTREGI (DISCRETĂ)

Există multe probleme practice care au ca model matematic o problemă de programare liniară în care toate variabilele sau numai o parte din ele trebuie să fie numere întregi.

Forma canonică a unei probleme de **programare liniară în numere întregi** este dată de relațiile (3.86).

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$X_j \in Z, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n c_j X_j$$

$$\max f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$
(3.86)

sau în scriere matricială echivalentă în relațiile (3.87).

$$A \cdot X \leq b$$

$$X \geq 0$$

$$X_j \in Z, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$f(X) = c \cdot X$$

$$\max f(X)$$
(3.87)

unde: $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Dacă numai o parte din variabilele unei probleme de programare liniară sunt întregi, se va numi problemă de **programare liniară mixtă**, iar modelul matematic la forma canonică este dat de relațiile (3.88).

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ X_j &\in \mathbb{Z}, \quad j \in I \subset \{1, 2, \dots, n\}; \\ f(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{j=1}^n c_j X_j \\ \max f(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Restricțiile problemei de programare liniară în numere întregi sau mixtă pot avea relațiile de ordine: $=, \geq, \leq$.

Problemele de programare liniară în numere întregi sau mixtă pot fi probleme de maxim sau de minim, la una din formele: generală, canonică sau standard.

Determinarea soluției optime a problemei de programare liniară în numere întregi sau mixtă se poate face prin mai multe metode, printre care:

- algoritmul ciclic al lui Gomory;
- algoritmul „ramifică și mărginește”, („Branch and Bound”) care este folosit de obicei în programele de pe calculator.

Cele două metode rezolvă problema în două etape cu simplex primal sau dual:

- în prima etapă se rezolvă problema de programare liniară în numere întregi fără condiția de integralitate a variabilelor;
- în etapa a doua se adaugă pe rând, în pași distincți, câte o nouă restricție pentru fiecare variabilă de bază neîntreagă până se obține soluția optimă întreagă sau rezultă că problema nu are soluții întregi.

Exemplul 3.7.

Să se rezolve problema de programare liniară în numere întregi

$$\begin{aligned} 2 \cdot X_1 + X_2 - X_3 + X_4 &= 4 \\ 4 \cdot X_1 - 3 \cdot X_2 + X_5 &= 2 \\ -3X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + X_6 &= 3 \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6; \\ X_j &\in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, 6; \\ f &= X_1 - 3 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \\ \max f \end{aligned}$$

Se rezolvă cu programul QSB.

Soluția optimă neîntreagă:

$$\max f = z_0 = 14,$$

$$X_1 = 1/2, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 9/2, \quad X_4 = 15/2, \quad X_5 = 0, \quad X_6 = 0.$$

Soluția optimă întreagă:

$\max f = z_0 = 11$,

$X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 5, X_4 = 3, X_5 = 0, X_6 = 0$.

```

C:\> QSB

Welcome to QSB <Quantitative Systems for Business>!
You may choose from following management science decision support systems:

Code No.      Program
-----
1 -- Linear programming
=>2 -- Integer linear programming
3 -- Transshipment problem
4 -- Assignment problem
5 -- Network modeling
6 -- Project scheduling -- CPM
7 -- Project scheduling -- PERT
8 -- Dynamic programming

9 -- Inventory theory
A -- Queuing theory
B -- Queuing system simulation
C -- Decision/probability theory
D -- Markov process
E -- Time series forecasting
F -- Specify printer/display adapter
G -- Exit from QSB

** QSB(I): Programs 1 to 5,  QSB(II): Programs 6 to E **

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.
  
```

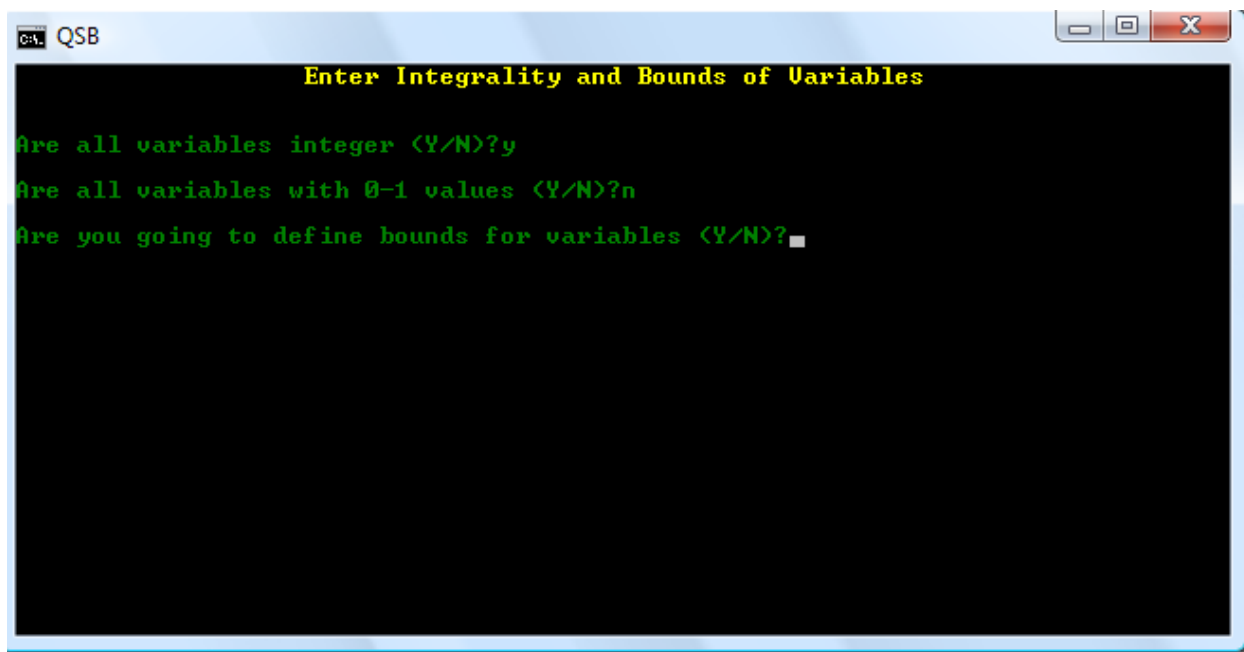
```

C:\> QSB

Welcome to your Integer Linear Programming <ILP> Decision Support System!
The options available for ILP are as follows.
If you are a first-time user, you might benefit from option 1.

Option      Function
-----
1 ---- Overview of ILP Decision Support System
=>2 ---- Enter new problem
3 ---- Read existing problem from disk<ette>
4 ---- Show input data
5 ---- Solve problem
6 ---- Save problem on disk<ette>
7 ---- Modify problem
8 ---- Show final solution
9 ---- Return to the program menu
0 ---- Exit from QSB

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.
  
```



La ultima întrebare se răspunde N.

Exemplul 3.8.

Să se rezolve problema de programare liniară mixtă :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot X_1 + X_2 + X_3 &= 7/4 \\ X_1 + 3/10 \cdot X_2 + X_4 &= 3/2 \end{aligned}$$

$$X_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{aligned} X_1, X_2 &\in \mathbb{Z} \\ f &= \frac{1}{4} \cdot X_1 + X_2 \\ \max f \end{aligned}$$

Se va rezolva cu programul Qsb.

Se va rezolva problema de programare liniară fără restricția de integralitate.

Soluția optimă neîntreagă: $\max f = 7/4$, $X_1 = 0$, $X_2 = 7/4$, $X_3 = 0$, $X_4 = 39/40$;

Soluția optimă a problemei de programare liniară mixtă este:

$$\max f = 5/4, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1/4, X_4 = 1/5.$$

Ecrane Qsb pentru exemplul 3.8.

```

QSB

Welcome to QSB <Quantitative Systems for Business>!
You may choose from following management science decision support systems:

Code No.      Program
1 -- Linear programming
=>2 -- Integer linear programming
3 -- Transshipment problem
4 -- Assignment problem
5 -- Network modeling
6 -- Project scheduling -- CPM
7 -- Project scheduling -- PERT
8 -- Dynamic programming

9 -- Inventory theory
A -- Queuing theory
B -- Queuing system simulation
C -- Decision/probability theory
D -- Markov process
E -- Time series forecasting
F -- Specify printer/display adapter
G -- Exit from QSB

** QSB(I): Programs 1 to 5,  QSB(II): Programs 6 to E **

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.

```

```

QSB

Welcome to your Integer Linear Programming <ILP> Decision Support System!
The options available for ILP are as follows.
If you are a first-time user, you might benefit from option 1.

Option      Function
1 ---- Overview of ILP Decision Support System
=>2 ---- Enter new problem
3 ---- Read existing problem from disk<ette>
4 ---- Show input data
5 ---- Solve problem
6 ---- Save problem on disk<ette>
7 ---- Modify problem
8 ---- Show final solution
9 ---- Return to the program menu
0 ---- Exit from QSB

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.

```

```

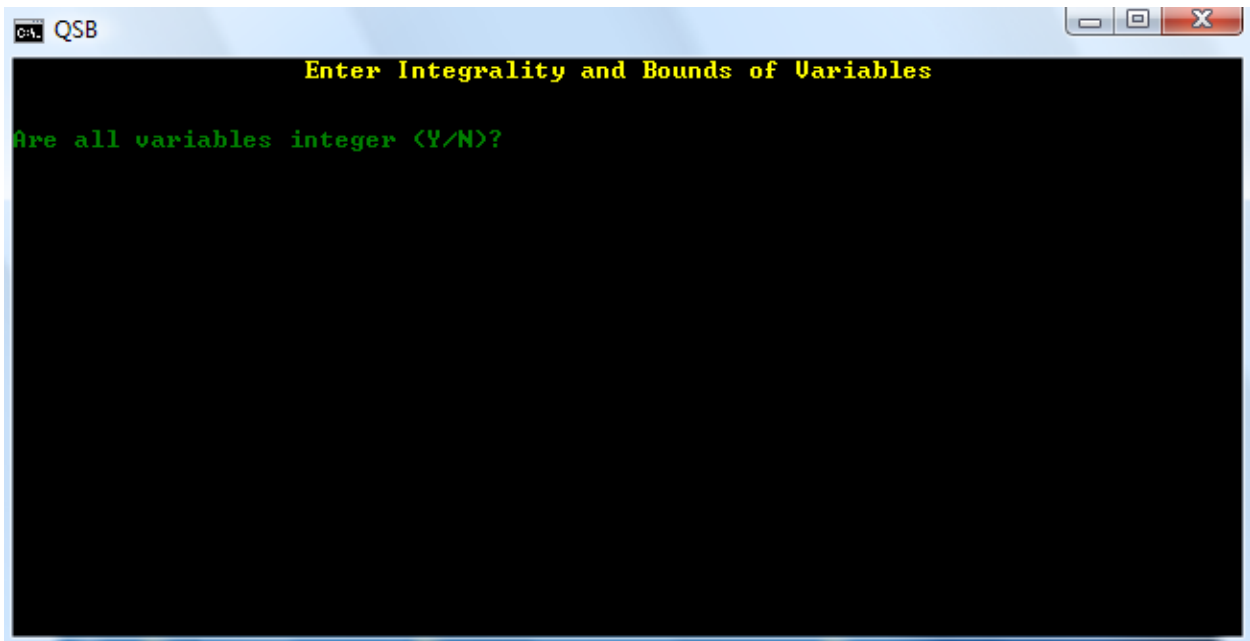
QSB

Enter the Coefficients of ILP Model      Page 1

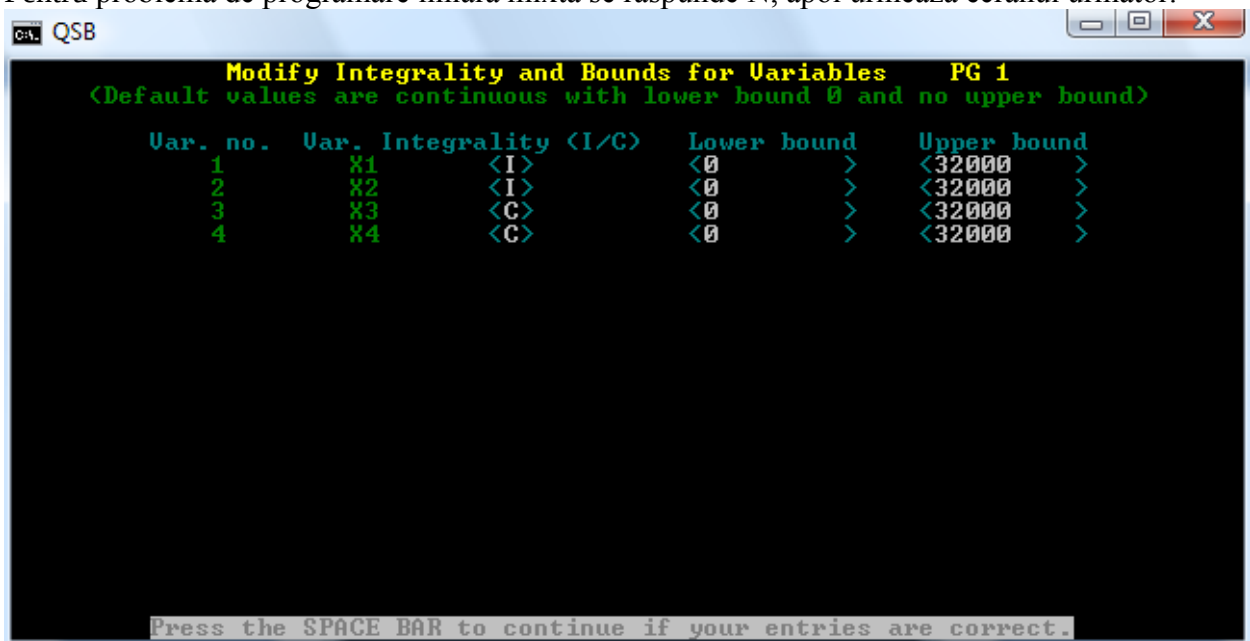
Max  0.25  X1  1  X2  X3  X4
Subject to
<1>  0.5  X1  1  X2  1  X3  X4  = 1.75
<2>  1  X1  0.3  X2  0  X3  1  X4  = 1.5

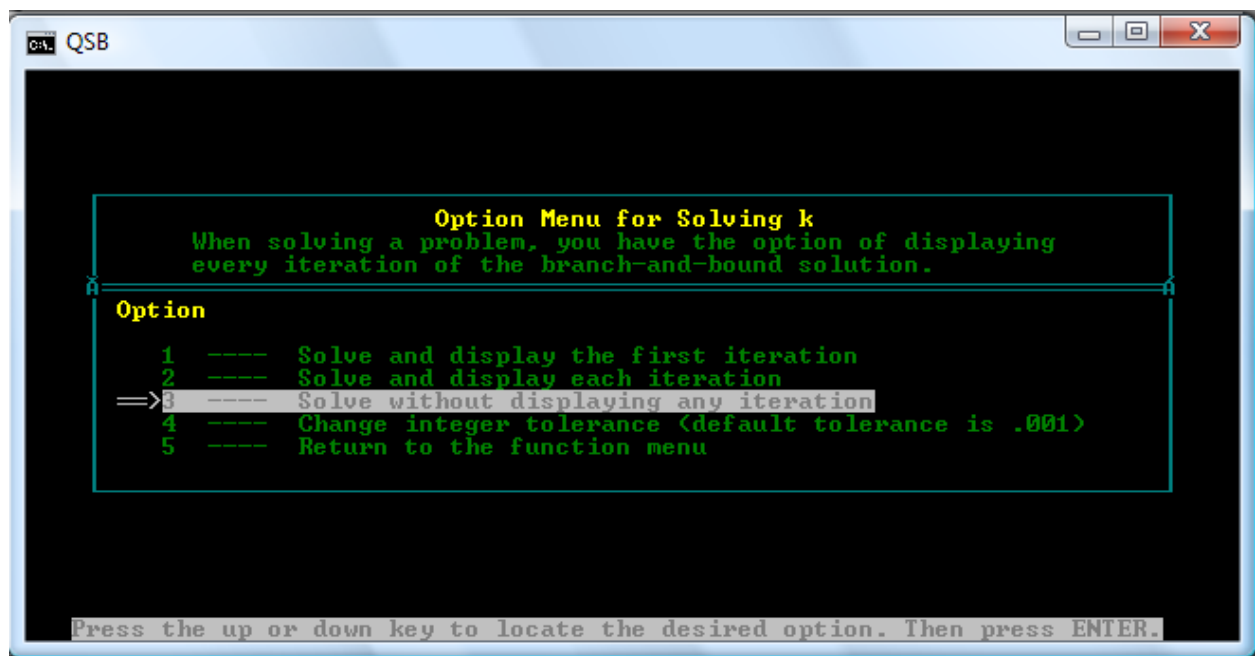
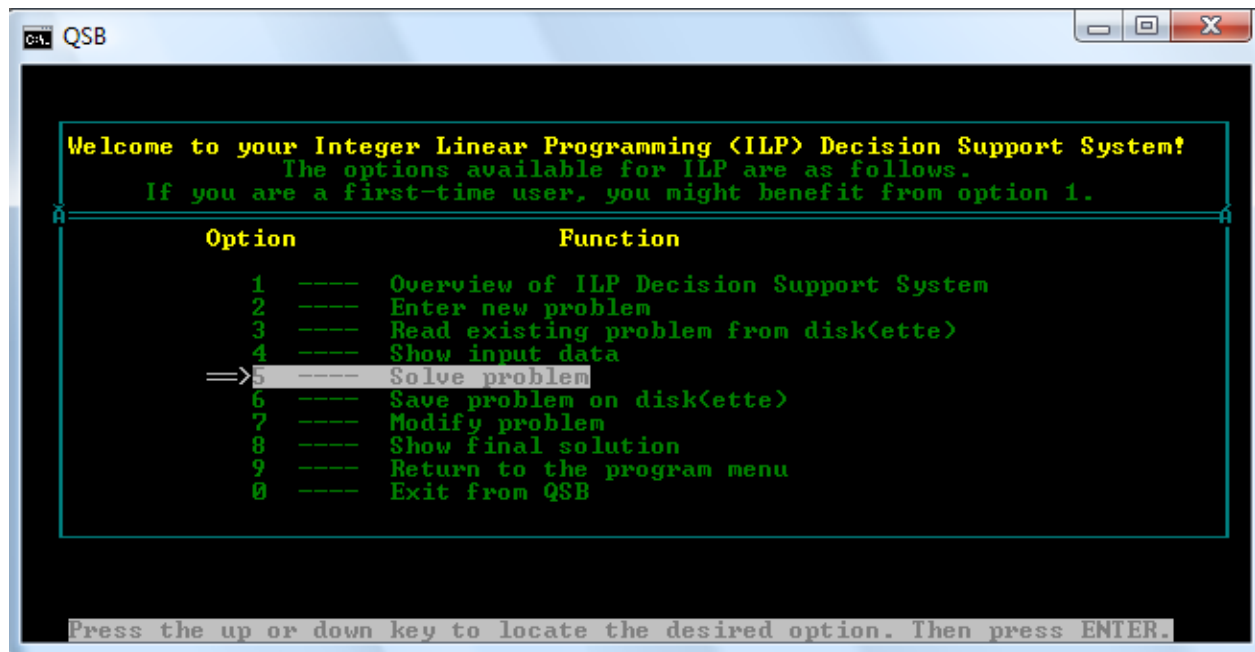
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.

```



Pentru problema de programare liniară mixtă se răspunde N, apoi urmează ecranul următor.





QSB

Summary of Results for p

Page : 1

Variables No. Names	Solution	Obj. Fnctn. Coefficient	Variables No. Names	Solution	Obj. Fnctn. Coefficient
1 X1	+1.00000000	+.25000000	3 X3	+.25000000	0
2 X2	+1.00000000	+.10000000	4 X4	+.19999999	0
Maximum value of the OBJ = 1.25 Total iterations = 5					

Press any key to continue.

Exemplul nr. 3.8a.

Se consideră un atelier în care se prelucrează trei piese / repere P_1 , P_2 și P_3 pe trei mașini M_1 , M_2 și M_3 . Timpul unitar de prelucrare al fiecărei piese și timpul disponibil al fiecărei mașini sunt intervale, date în tabelul nr. 3.4. Se cere să se determine câte piese trebuie prelucrate astfel încât profitul să fie maxim.

Tabelul nr. 3.4.a

P_j	P_1	P_2	P_3	Timp mașină disponibil T_i [min]
M_i				
M_1	11	9	7.5	10600
M_2	7	12	9	9500
M_3	13	15	8	11500
Profit unitar c_j [lei]	150	250	230	

Modelul matematic este o problemă de programare liniară în numere întregi (3.35a).

$$11 X_1 + 9 X_2 + 7.5 X_3 \leq 10600$$

$$7 X_1 + 12 X_2 + 9 X_3 \leq 9500$$

(3.35a)

$$13 X_1 + 15 X_2 + 8 X_3 \leq 11500$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$X_j \in \mathbf{Z}, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$f(X_1, X_2, X_3) = 150X_1 + 250X_2 + 230X_3$$

$$\max f(X_1, X_2, X_3)$$

Se rezolvă cu programul Qsb problema (3.35a), cu modulul Integer linear programming și se obține soluția optimă:

$$X_1 = 2 \text{ piese } P_1;$$

$$X_2 = 0 \text{ piese } P_2;$$

$$X_3 = 1054 \text{ piese } P_3$$

$$\max f(X_1, X_2, X_3) = 242720 \text{ lei}.$$

3. 6. PROGRAMAREA LINIARĂ PARAMETRICĂ

Se consideră problema de programare liniară (3.67) la forma standard, problemă de maximizare.

$$\begin{aligned} A \cdot X &= b \\ X &\geq 0 \\ f(X) &= c \cdot X \\ \max f(X) \end{aligned} \quad (3.67)$$

unde:

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\ \text{rang}(A) &= m < n. \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Problema de programare liniară în care matricea A sau vectorii b, c sunt funcții de unul sau mai mulți parametri reali, reprezintă o problemă de programare liniară parametrică. Se vor prezenta modelele matematice pentru cazurile când vectorii b și c depind liniar de un parametru real t. Disponibilul de resurse dat de vectorul b sau profitul (prețul) unitar dat de vectorul c pot să varieze în timp după o funcție liniară.

1. Parametrizarea vectorului b

Fie problema de programare liniară parametrică sub formă matricială (3.68) obținută din (3.67) prin înlocuirea vectorului b cu o funcție liniară de parametrul real t sau dezvoltat în (3.69):

$$\begin{aligned} A \cdot X &= b(t) \\ X &\geq 0 \\ f(X) &= c \cdot X \\ \max f(X) \end{aligned} \quad (3.68)$$

unde: $b(t) = b^0 + t \cdot b^1$

$$\begin{aligned} b^0 &= \begin{pmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \\ \vdots \\ \cdot \\ b_m^0 \end{pmatrix}, \quad b^1 = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ \vdots \\ \cdot \\ b_m^1 \end{pmatrix} \\ b(t) &= \begin{pmatrix} b_1^0 + t \cdot b_1^1 \\ b_2^0 + t \cdot b_2^1 \\ \dots \\ b_m^0 + t \cdot b_m^1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$t \in I \subseteq \mathbb{R}$, I este un interval ,
sau dacă se dezvoltă rezultă (3.69)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j = b_i^0 + t \cdot b_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.69)$$

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j$$

$$\max f$$

$$t \in I \subseteq \mathbb{R}, I \text{ este un interval ,}$$

Exemplul nr. 3.26. –

Fie problema de programare liniară parametrică:

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 100 + 3 \cdot t \\ 4 \cdot X_1 + X_2 + 2 \cdot X_3 &\leq 70 - t \\ 3 \cdot X_2 + X_3 &\leq 20 + 5 \cdot t \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f = 2 \cdot X_1 + X_2 + 5 \cdot X_3$$

$$\max f$$

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + X_4 &= 100 + 3 \cdot t \\ 4 \cdot X_1 + X_2 + 2 \cdot X_3 + X_5 &= 70 - t \\ 3 \cdot X_2 + X_3 + X_6 &= 20 + 5 \cdot t \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f = 2 \cdot X_1 + X_2 + 5 \cdot X_3$$

$$\max f$$

Cazul 1.

Pentru $t = 0$ se obține problema de programare liniară:

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + X_4 &= 100 \\ 4 \cdot X_1 + X_2 + 2 \cdot X_3 + X_5 &= 70 \\ 3 \cdot X_2 + X_3 + X_6 &= 20 \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f = 2 \cdot X_1 + X_2 + 5 \cdot X_3$$

$$\max f$$

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0,$$

rezultă valorile variabilelor de bază

$$X_4 = 100, \quad X_5 = 70, \quad X_6 = 20,$$

Se utilizează simplex primal în tabelul nr.3.46.

Tabelul nr. 3.46.

C _B	c _j	→	2	1	5	0	0	0
↓	VB	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃ ↓	P ₄	P ₅	P ₆
0	X ₄	100	1	2	1	1	0	0
0	X ₅	70	4	1	2	0	1	0
0	← X ₆	20	0	3	<u>1</u>	0	0	1
z ₀ = 0		c _j - z _j	2	1	5	0	0	0
0	X ₄	80	1 ↓	-1	0	1	0	-1
0	← X ₅	30	<u>4</u>	-5	0	0	1	-2
5	X ₃	20	0	3	1	0	0	1
z ₀ = 100		c _j - z _j	2	-14	0	0	0	-5
0	X ₄	145/2	0	1/4	0	<u>1</u>	- 1/4	- 1/2
2	X ₁	15/2	1	-5/4	0	0	1/4	- 1/2
5	X ₃	20	0	3	1	0	0	1
z ₀ = 115		c _j - z _j	0	-23/2	0	0	- 1/2	-4

Max f = z₀ = 115 , X₁ = 15/2 , X₂ = 0 , X₃ = 20 , X₄ = 145/2 , X₅ = 0 , X₆ = 0 .

Cazul 2.

Pentru t ≠ 0 , variabilele de bază din ultimul tabel simplex din tabelul nr. 3.46 se calculează și se pune condiția să fie nenegative, deci să rămână variabile de bază:

$$X^B(t) = B^{-1} \cdot b(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 + 3t \\ 70 - t \\ 20 + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{290 + 3t}{4} \\ \frac{30 - 11t}{4} \\ 20 + 5t \end{pmatrix} \geq 0$$

Pentru ca X^B(t) să fie soluție optimă, se rezolvă sistemul de inecuații:

$$290 + 3 \cdot t \geq 0$$

$$30 - 11 \cdot t \geq 0$$

$$20 + 5 \cdot t \geq 0$$

rezultă t ∈ [-4 , 30/11] , în acest caz soluția optimă este:

$$X^B(t) = \begin{pmatrix} \frac{290 + 3t}{4} \\ \frac{30 - 11t}{4} \\ 20 + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{145}{2} + \frac{3t}{4} \\ \frac{15}{2} - \frac{11t}{4} \\ 20 + 5t \end{pmatrix}$$

$$\text{Max } f = z_0 = 115 + 39 \cdot t/2,$$

$$X_1 = 15/2 - 11t/4 , X_2 = 0 , X_3 = 20 + 5t , X_4 = 145/2 + 3t/4 , X_5 = 0 , X_6 = 0 .$$

Cazul 3.

Pentru t > 30/11 , soluția X^B(t) nu mai este optimă deoarece

X₁ = 15/2 - 11t/4 < 0 , se va aplica simplex dual ultimului tabel simplex în tabelul nr.3.46 de la cazul 1 în care se înlocuiește P₀ cu X^B(t) .

Tabelul nr. 3.47.

C_B	c_j	$\rightarrow$	2	1	5	0	0	0
$\downarrow$	VB	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	$P_6 \downarrow$
0	X_4	$145/2 + 3.t/4$	0	$1/4$	0	1	$-1/4$	$-1/2$
2	$\leftarrow X_1$	$15/2 - 11.t/4$	1	$-5/4$	0	0	$1/4$	<u>$-1/2$</u>
5	X_3	$20 + 5.t$	0	3	1	0	0	1
$z_0 = 115 + 39.t/2$	$c_j - z_j$		0	$-23/2$	0	0	$-1/2$	-4
0	X_4	$65 + 7.t/2$	-1	$3/2$	0	1	$-1/2$	0
0	X_6	$-15 + 11.t/2$	-2	$5/2$	0	0	$-1/2$	1
5	X_3	$35 - t/2$	2	$1/2$	1	0	$1/2$	0
$z_0 = 175 - 5.t/2$	$c_j - z_j$		-8	$-3/2$	0	0	$-5/2$	0

Noua soluție obținută este optimă dacă: $X^B(t) \geq 0$, deci :

$$X_4 = 65 + 7.t/2 \geq 0$$

$$X_6 = 15 + 11.t/2 \geq 0$$

$$X_3 = 35 - t/2 \geq 0$$

Rezultă $t \in [30/11, 70]$,

$$\text{Max } f = 175 - 5.t/2,$$

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 35 - t/2, X_4 = 65 + 7.t/2, X_5 = 0, X_6 = 65 + 7.t/2$$

Cazul 4.

Dacă $t < -4$, în primul tabel simplex din tabelul nr. 3.47 de la cazul 3,

$$X_3 = 20 + 5.t < 0, z_{3j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6, \text{ problema nu are soluție.}$$

Cazul 5.

Pentru $t > 70$, în ultimul tabel simplex din tabelul nr. 3.47 de la cazul 3, $X_3 = 35 - t/2 < 0$,

$$z_{3j} \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6,$$

problema nu are soluție.

2. Parametrizarea vectorului c

Fie problema de programare liniară parametrică sub formă matricială (3.70) obținută din (3.67) prin înlocuirea vectorului c cu o funcție liniară de parametrul real t sau dezvoltat în (3.71):

$$A \cdot X = b$$

$$X \geq 0 \quad (3.70)$$

$$f(X) = c(t) \cdot X$$

$$\max f(X)$$

$$t \in I \subseteq \mathbb{R}, I \text{ este un interval,}$$

$$\text{unde: } c(t) = c^0 + t \cdot c^1$$

$$c^0 = (c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)$$

$$c^1 = (c_1^1, c_2^1, \dots, c_n^1)$$

$$c(t) = (c_1^0 + t \cdot c_1^1, c_2^0 + t \cdot c_2^1, \dots, c_n^0 + t \cdot c_n^1)$$

sau dacă se dezvoltă rezultă (3.71)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j &= b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
f &= \sum_{j=1}^n (c_j^0 + t \cdot c_j^1) \cdot X_j \\
\max f \\
t \in I &\subseteq \mathbb{R}, \text{ I este un interval}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Rezolvarea problemelor de programare parametrică se face pentru $t = 0$ cu algoritmul simplex primal sau dual sau cu un program pe calculator, apoi se rezolvă și discută după valorile parametrului t .

Exemplul nr. 3.27. –

Fie problema de programare liniară parametrică: cu vectorul c funcție liniară de parametrul real t

$$\begin{aligned}
2 \cdot X_1 + X_2 + 2 \cdot X_3 &\geq 4 \\
2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\geq 2 \\
X_1 + X_3 &\geq 3 \\
X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3; \\
f &= (4 + t) \cdot X_1 + (3 + t) \cdot X_2 + (6 + 3 \cdot t) \cdot X_3 \\
t &\in \mathbb{R} \\
\min f
\end{aligned}$$

Se înmulțesc restricțiile cu -1 și se adaugă variabilele ecart, rezultând problema la forma standard:

$$\begin{aligned}
-2 \cdot X_1 - X_2 - 2 \cdot X_3 + X_4 &= -4 \\
-2 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 - X_3 + X_5 &= -2 \\
-X_1 - X_3 + X_6 &= -3 \\
X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6 \\
f &= (4 + t) \cdot X_1 + (3 + t) \cdot X_2 + (6 + 3 \cdot t) \cdot X_3 \\
t &\in \mathbb{R} \\
\min f &= -\max(-f)
\end{aligned}$$

Cazul 1.

Pentru $t = 0$ se obține problema de programare liniară:

$$\begin{aligned}
-2 \cdot X_1 - X_2 - 2 \cdot X_3 + X_4 &= -4 \\
-2 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 - X_3 + X_5 &= -2 \\
-X_1 - X_3 + X_6 &= -3 \\
X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6 \\
f &= 4 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 6 \cdot X_3 \\
\min f &= -\max(-f) = -\max(-4 \cdot X_1 - 3 \cdot X_2 - 6 \cdot X_3)
\end{aligned}$$

$X_1 = X_2 = X_3 = 0$, rezultă $X_4 = -4$, $X_5 = -2$, $X_6 = -3$

Soluție dual posibilă, se va utiliza algoritmul simplex dual în tabelul nr.3.48.

Tabelul nr.3.48.

C _B	c _j	→	- 4	- 3	- 6	0	0	0
↓	VB	P ₀	P ₁ ↓	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
0	← X ₄	- 4	<u>- 2</u>	- 1	- 2	1	0	0
0	X ₅	- 2	- 2	- 2	- 1	0	1	0
0	X ₆	- 3	- 1	0	- 1	0	0	1
z ₀ = 0		c _j - z _j	- 4	- 3	- 6	0	0	0
- 4	X ₁	2	1	½	1	- ½ ↓	0	0
0	X ₅	2	0	- 1	1	- 1	1	0
5	← X ₆	- 1	0	½	0	<u>- ½</u>	0	1
z ₀ = - 8		c _j - z _j	0	- 1	- 2	- 2	0	0
- 4	X ₁	3	1	0	1	0	0	- 1
0	X ₅	4	0	- 2	1	0	1	- 2
0	X ₄	2	0	- 1	0	1	0	- 2
z ₀ = - 12		c _j - z _j	0	- 3	- 2	0	0	- 4

Pentru $t = 0$, $\min f = - \max(- f) = - (- 12) = 12$,
 $X_1 = 3$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 2$, $X_5 = 4$, $X_6 = 0$.

Cazul 2.

Dacă $t \neq 0$, pentru baza optimă din ultimul tabel simplex din tabelul nr.3.48 se face un nou tabel simplex, tabelul nr.3.49, cu funcția f depinzând de t .

Tabelul nr.3.49.

C _B	c _j	→	- 4 - t	- 3 - t	- 6 - 3t	0	0	0
↓	VB	P ₀	P ₁ ↓	P ₂	P ₃ ↓	P ₄	P ₅	P ₆
- 4 - t	← X ₁	3	1	0	<u>1</u>	0	0	- 1
0	X ₅	4	0	- 2	1	0	1	- 2
0	X ₄	2	0	- 1	0	1	0	- 2
z ₀ = - 12 - 3t		c _j - z _j	0	- 3 - t	- 2 - 2t	0	0	- 4 - t
- 6 - 3t	X ₃	3	1	0	1	0	0	- 1
0	X ₅	1	- 1	- 2	0	0	1	- 1
0	X ₄	2	0	- 1	0	1	0	- 2
z ₀ = - 18 - 9t		c _j - z _j	2 + 2t	- 3 - t	0	0	0	- 6 - 3t

Se pune condiția ca soluția din tabelul simplex din tabelul nr.3.49 să fie optimă :

$$c_j(t) - z_j(t) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6,$$

$$- 3 - t \leq 0$$

$$- 2 - 2t \leq 0$$

$$- 4 - t \leq 0$$

Rezultă $t \in [- 1, \infty)$

Soluția optimă este: $X_1 = 3$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 2$, $X_5 = 4$, $X_6 = 0$

$$\min f = - \max(- f) = - z_0 = - (- 12 - 3t) = 12 + 3t.$$

Cazul 3.

Dacă $t < - 1$

se aplică primului tabel simplex de la cazul 2, tabelul nr. 3.49, algoritmul simplex primal deoarece $c_3 - z_3 = - 2 - 2t > 0$.

Se pune condiția ca soluția din al doilea tabel simplex din tabelul nr. 3.49 să fie optimă :

$$\begin{aligned} c_j(t) - z_j(t) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \\ 2 + 2t &\leq 0 \\ -3 - t &\leq 0 \\ -6 - 3t &\leq 0, \end{aligned}$$

rezultă $t \in [-2, -1]$

Se obține soluția optimă:

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 3, X_4 = 2, X_5 = 1, X_6 = 0,$$

$$\min f = -\max(-f) = -z_0 = -(-18 - 9t) = 18 + 9t.$$

Cazul 4.

Dacă $t < -2$

$$c_6 - z_6 = -6 - 3t > 0, \text{ iar } z_{i6} \leq 0, (\forall) i \in I_B,$$

din al doilea tabel simplex din tabelul nr. 3.49, deci problema nu are soluție optimă.

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C4

5. PROGRAMAREA LINIARĂ MULTIIOBIECTIV

5.1. Concepte de bază

Modelul matematic al problemei de programare liniară multiobiectiv, numită și problemă de decizie multiobiectiv, este dat de o mulțime de restricții (inegalități, egalități) pentru n variabile $X_1, X_2, \dots, X_n$ care reprezintă, în general, cantitățile care se vor fabrica din n produse într-un sistem de producție (atelier, secție, întreprindere) în care m resurse (materii prime, energie, utilaje, resurse umane) sunt limitate la b_i , $i = 1, 2, \dots, m$, consumul specific este a_{ij} , o funcție vectorială $f(X)$ ale cărei componente trebuie maximizate sau minimizate.

Modelul matematic al problemei de programare liniară multiobiectiv este dat de relațiile (5.1). Deciziile din procesele de decizie multicriteriale cu un număr infinit de soluții posibile (variante) se numesc **decizii multiobiectiv**.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{j=1}^n c_{kj} \cdot X_j, \quad k = 1, 2, \dots, p; \\ \text{optimum } f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) &\quad, k = 1, 2, \dots, p; \end{aligned} \tag{5.1}$$

unde:

a_{ij} - este consumul din resursa R_i disponibilă în cantitatea b_i , $b_i \geq 0$, care intră în unitatea de produs P_j , $a_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;

optimum $\in \{\max, \min\}$, deci, o parte din componentele lui $f(X)$ se maximizează, iar altă parte se minimizează. Restricțiile pot cuprinde relațiile $\leq$, $\geq$ sau $=$, care se pot aduce toate la utilizarea relației $\leq$.

Sunt mai multe posibilități de rezolvare a problemei de programare liniară multiobiectiv. În general o soluție optimă pentru problema de programare liniară cu o singură funcție obiectiv din cele p funcții ale modelului (5.1) nu este optimă și pentru celelalte funcții obiectiv ale funcției vectoriale $f(X)$, ea poate fi foarte nefavorabilă.

$$f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \dots \\ f_p(X) \end{pmatrix}$$

Modelul (5.1) se mai poate scrie matriceal prin relațiile (5.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{X}) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \\ \text{optimum } \mathbf{f}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

unde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{a}_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \mathbf{C} &= (\mathbf{c}_{kj}), \quad k = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, n; \end{aligned}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \dots \\ f_p(X) \end{pmatrix};$$

optimum $\in \{\max, \min\}$;

$$f_k(X) = \sum_{j=1}^n c_{kj} \cdot X_j, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Rezolvarea problemei de programare liniară multiobiectiv se poate face prin algoritmi: STEP, POP, prin maximizarea utilității globale, teoria jocurilor, metoda lexicografică etc.

Deoarece

$$\min f_k(X) = - \max (-f_k(X)),$$

se poate presupune, fără a reduce din generalitatea problemei, că toate componentele funcției vectoriale $f(X)$ se maximizează.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{X}_j &\leq \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ \mathbf{X}_j &\geq \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) &= \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_{kj} \cdot \mathbf{X}_j, \quad k = 1, 2, \dots, p; \\ \max \mathbf{f}_k(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) &\quad, \quad k = 1, 2, \dots, p; \end{aligned}$$

Componentele funcției vectoriale $f(X)$ pot avea ca și semnificații economice concrete:

- profitul, care se va maximiza;
- cifra de afaceri, care se va maximiza;
- costurile de producție, care se vor minimiza;
- timpul de nefolosire a utilajelor, care se va minimiza;
- productivitatea muncii, care se va maximiza;

- fondurile circulante, care trebuie minimizate.

Evident , fiecare $f_k(X)$, componentă a lui $f(X)$, poate avea și alte semnificații concrete.

În general, o soluție optimă pentru problema de programare liniară cu o singura funcție obiectiv $f_k(X)$ din cele p ale lui $f(X)$, nu este optimă și pentru celelalte ($p - 1$) funcții obiectiv, componente ale funcției vectoriale $f(X)$, ele pot să fie conflictuale și foarte nefavorabile.

Spațiul vectorial R^p nu este total ordonat, deci este dificil de găsit un punct din domeniul soluțiilor posibile care să optimizeze simultan ansamblul celor p funcții obiectiv. Pentru modelele multiobiectiv date de relațiile (5.1) și (5.2) nu există, în general, o soluție optimă care să optimizeze simultan toate cele p funcții obiectiv. Noțiunea de soluție optimă se înlocuiește în acest caz cu noțiunea de “cea mai bună” din punctul de vedere al ansamblului funcțiilor obiectiv componente ale lui $f(X)$. Noțiunea de “cea mai bună soluție” este ambiguă, dar există diverse noțiuni echivalente, cum ar fi: soluție Pareto-optimală, soluție nondominată, soluție eficientă, care reprezintă de fapt o soluție posibilă care realizează cel mai bun compromis în rezolvarea modelelor date de relațiile (5.1) și (5.2).

O soluție nondominată a modelului (5.1) sau (5.2) este o soluție posibilă pentru care nu există nici o altă soluție posibilă care să îmbunătățească o funcție obiectiv componentă a funcției vectoriale obiectiv $f(X)$, fără să deterioreze cel puțin o altă funcție obiectiv componentă.

Se notează cu S_p mulțimea soluțiilor posibile ale problemei multiobiectiv dată de relațiile (5.2), deci:

$$S_p = \{ X \mid X \in R^n: A \cdot X \leq b, X \geq 0 \} \quad (5.4)$$

Soluția nondominată X^* este o soluție posibilă, $X^* \in S_p$, dacă nu există nici o altă soluție posibilă $X \in S_p$, în așa fel ca:

$$f_k(X^*) \leq f_k(X)$$

pentru orice $k = 1, 2, \dots, p$, știind că pentru cel puțin un indice k este adevărată inegalitatea strictă:

$$f_k(X) < f_k(X)$$

Se notează cu S_n mulțimea soluțiilor nondominate, $S_n \subset S_p$.

Teorema 5.1.

O soluție optimă a modelului liniar cu o funcție obiectiv (5.5) este soluție nondominată a modelului multiobiectiv (5.1), respectiv (5.2).

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{j=1}^n c_{kj} \cdot X_j, \\ \max f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) & \end{aligned} \quad (5.5)$$

Teorema 5. 2.

Mulțimea soluțiilor nondominate ale modelului liniar multiobiectiv dat de relațiile (5.2) este o mulțime convexă.

O soluție preferată este o soluție nondominată, aleasă de către decident pe baza unor informații adiționale.

Se notează cu S_{pr} mulțimea soluțiilor preferate, existând incluziunea:

$$S_{pr} \subset S_n \subset S_p.$$

Pentru a se determina soluția preferată din mulțimea soluțiilor nondominate S_n sunt necesare informații suplimentare din partea decidentului în ceea ce privește preferințele sale.

5.2. Metode multiobiectiv

Soluțiile nondominate se pot afla prin diverse metode, din care vom prezenta metoda ponderilor și metoda ε - restrictivă.

1) Metoda ponderilor (parametrică) constă în construirea unui model liniar cu o singură funcție obiectiv dat de relațiile (5.6), din modelele multiobiectiv (5.1), respectiv (5.2), cu ajutorul unor ponderi w_k :

$$\begin{aligned} A \cdot X &\leq b \\ X &\geq 0 \\ F(X) &= \sum_{k=1}^p w_k \cdot f_k(X) = \sum_{k=1}^p w_k \cdot \sum_{j=1}^n c_{kj} \cdot X_j \\ \max F(X) \\ w_k &\geq 0, k = 1, 2, \dots, p; \end{aligned} \quad (5.6)$$

Prin variația parametrică a ponderilor se obține mulțimea soluțiilor nondominate ale modelului liniar multiobiectiv dat de relațiile (5.1), respectiv (5.2).

Ponderile w_k , $k = 1, 2, \dots, p$ nu reflectă importanța relativă a obiectivelor, dar pot fi interpretate și ca valoarea relativă a obiectivului $f_k(X)$ și în acest caz soluția problemei date de relațiile (5.5) prin algoritmul simplex primal sau simplex dual (dacă variabilele sunt întregi, algoritmul lui Gomory), respectiv prin utilizarea programelor QSB, DSSPOM, LINDO sau altele, este echivalentă cu soluția preferată.

2) Metoda ε - restrictivă

Se transformă problema multiobiectiv (5.1) într-o problemă de programare liniară cu un singur obiectiv și pentru toate funcțiile obiectiv se specifică limite minime :

$$\begin{aligned} A \cdot X &\leq b \\ f_k(X) &\geq \varepsilon_k, k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, p; \\ X &\geq 0 \\ \max f_l(X) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Funcția $f_l(X)$ se alege arbitrar.

I. Se va prezenta o metodă de determinare a soluțiilor nondominate **fără informație suplimentară**, metoda criteriului global.

Metoda criteriului global transformă modelul multiobiectiv (5.2) într-un model cu o funcție obiectiv sinteză, definită cu ajutorul celor p funcții obiectiv inițiale.

Sunt posibile două variante :

I.1. Se construiește o funcție obiectiv sinteză

$$F(X) = \min \{ f_1(X), f_2(X), \dots, f_p(X) \}$$

și se rezolvă problema de programare liniară cu o funcție obiectiv (5.8) cu algoritmul simplex primal sau simplex dual (algoritmul lui Gomory, dacă variabilele sunt întregi), respectiv prin utilizarea programelor QSB, DSSPOM, LINDO sau altele;

$$\begin{aligned} A \cdot X &\leq b \\ X &\geq 0 \\ \max F(X) \end{aligned} \quad (5.8)$$

I. 2. Se rezolvă p probleme de programare liniară cu o funcție obiectiv date de (5.9), utilizând metoda simplex, respectiv prin utilizarea programelor QSB, DSSPOM, LINDO sau altele.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) &= \sum_{j=1}^n c_{kj} \cdot X_j \\ \max f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \quad (5.9)$$

unde: $k = 1, 2, \dots, p$;

apoi se construiește funcția obiectiv sinteză $F(X)$:

unde X_k^* este soluția optimă cu $f_k(X_k^*)$ valoare optimă a lui $f_k(X)$, iar $F(X)$ reprezintă deviația obiectivelor $f_k(X)$ de la valoarea lor optimă și trebuie minimizată în problema (5.10).

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ X_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \min F(X) \end{aligned} \quad (5.10)$$

II. Dintre metodele cu informație preferențială dată apriori se va prezenta **metoda maximizării utilității globale** pentru determinarea soluțiilor preferate.

Se consideră problema de programare liniară multiobiectiv (5.11).

$$A \cdot X \leq b$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{X}) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \\ \text{optimum } \mathbf{f}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

unde: $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{kj})$, $k = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, n$;

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{X}) \\ f_2(\mathbf{X}) \\ \dots \\ f_p(\mathbf{X}) \end{pmatrix}, \quad \text{optimum} \in \{\max, \min\},$$

$$f_k(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n c_{kj} \cdot X_j, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Metoda constă în înlocuirea funcțiilor obiectiv cu semnificație economică concretă, cu funcții utilitate în sensul von Neumann-Morgestern, care pot fi însumate dacă obiectivele sunt independente, obținându-se prin însumare o funcție sinteză.

Algoritmul.

Etapa 1.

Pentru fiecare funcție obiectiv $f_k(\mathbf{X})$ se determină soluția optimă a problemei de programare liniară (5.12) cu o funcție obiectiv.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X}_j &\geq \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_{kj} \cdot \mathbf{X}_j$$

$$\max \mathbf{f}_k(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$$

$$k = 1, 2, \dots, p.$$

Se obține valoarea optimă $\mathbf{X}^{*k}$ care maximizează pe $f_k(\mathbf{X})$, dacă se cere în problema dată de relațiile (5.11) maximizarea sa (sau care minimizează pe $f_k(\mathbf{X})$ dacă în (5.11) se cere $\min f_k(\mathbf{X})$), $k = 1, 2, \dots, p$, aplicând algoritmul simplex primal sau simplex dual (sau Gomory, pentru numere întregi) respectiv prin utilizarea programelor QSB, DSSPOM, LINDO sau altele.

Deci, se rezolvă p probleme de programare liniară cu algoritmul simplex primal sau dual (sau Gomory), respectiv prin utilizarea programelor QSB, DSSPOM, LINDO, QM sau altele.

Apoi, pentru fiecare funcție obiectiv $f_k(\mathbf{X})$ se determină valoarea pesimă (cea mai puțin favorabilă, opusă valorii optime) $\mathbf{X}^{-k}$ care minimizează pe $f_k(\mathbf{X})$ dacă în (5.11) $f_k(\mathbf{X})$ trebuia maximizată (respectiv care maximizează pe $f_k(\mathbf{X})$, dacă în (5.11) $f_k(\mathbf{X})$ trebuia minimizată), deci încă p probleme de programare liniară cu câte o funcție obiectiv.

De exemplu, dacă în (5.11) se cere $\max f_1(\mathbf{X})$, atunci problema optimă este (5.13)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X}_j &\geq \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \max \mathbf{f}_1(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

și problema pesimă este (5.14).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X}_j &\geq \mathbf{0}, j = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\min f_1(\mathbf{X})$$

Dacă se cere în (5.11) $\min f_2(\mathbf{X})$, atunci problema optimă este (5.15)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X}_j &\geq \mathbf{0}, j = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\min f_2(\mathbf{X})$$

și problema sa pesimă este (5.16).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X}_j &\geq \mathbf{0}, j = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\max f_2(\mathbf{X})$$

Fie: $O_k = \text{Optimum } f_k(\mathbf{X}) = f_k(\mathbf{X}^{*k})$

$P_k = \text{Pesim } f_k(\mathbf{X}) = f_k(\mathbf{X}^{-k}), k = 1, 2, \dots, p;$

Optimum {Max, Min}, Pesim {Min, Max}, Pesim = Non Optimum.

Etapă 2.

Pentru mulțimea tuturor valorilor optime sau pesime determinate se estimează utilitățile acestor valori (de către decident):

- valoarea optimă O_k are utilitatea $U_k, k = 1, 2, \dots, p;$
- valoarea pesimă P_k are utilitatea $U_{p+k}, k = 1, 2, \dots, p.$

Cu cât o situație este mai convenabilă, cu atât utilitatea sa este mai mare, iar

$$U_k > U_{p+k}$$

, deoarece valorile optime O_k sunt preferate valorilor pesime (non optime) $P_k, k = 1, 2, \dots, p.$

Etapă 3.

Se transformă funcțiile obiectiv $f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_p(\mathbf{X})$ în funcții utilitate $F_1(\mathbf{X}), F_2(\mathbf{X}), \dots, F_p(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{X}) = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{f}_k(\mathbf{X}) + \mathbf{b}_k, \mathbf{X} = \mathbf{X}^{*k} \text{ și } \mathbf{X} = \mathbf{X}^{-k},$$

se rezolvă p sisteme liniare de două necunoscute:

$$\begin{aligned} \alpha_k \cdot O_k + \beta_k &= U_k \\ \alpha_k \cdot P_k + \beta_k &= U_{p+k}, k = 1, 2, \dots, p; \end{aligned}$$

se obțin α_k și β_k . Atunci,

$$F_k(\mathbf{X}) = \alpha_k \cdot f_k(\mathbf{X}) + \beta_k = \alpha_k \cdot \sum_{j=1}^n c_{kj} \cdot \mathbf{X}_j + \beta_k, k = 1, 2, \dots, p;$$

Etapă 4.

Se construiește funcția obiectiv sinteză:

$$F(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^p F_k(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^p (\alpha_k \cdot \sum_{j=1}^n c_{kj} \cdot \mathbf{X}_j + \beta_k)$$

și se rezolvă cu algoritmul simplex primal, dual sau utilizând programele QSB, DSSPOM, LINDO, QM sau altele, problema de programare liniară (5.17) cu o funcție obiectiv $F(X)$.

$$\begin{aligned} A \cdot X &\leq b \\ X &\geq 0 \\ \max F(X) \end{aligned} \quad (5.17)$$

și se obține soluția optimă de maximă utilitate X^* .

III. Metodele cu informații preferențiale date progresiv (interactive)

Sunt caracterizate de trei etape de bază:

- determinarea mulțimii soluțiilor nondominate;
- aprecierea decidentului asupra uneia din soluțiile nondominate obținute;
- folosirea aprecierii decidentului pentru formularea unei noi mulțimi de parametri, elaborând o nouă problemă pentru a fi rezolvată.

Cele trei etape de mai sus se repetă până când decidentul este satisfăcut cu soluția obținută și nu mai este posibilă o îmbunătățire a sa.

Această familie de metode cuprinde metodele: STEP, POP, Steuer, SWT etc.

Abordarea mixtă a metodelor multiobiectiv cu metodele multiatribut

Modelele de decizie multiobiectiv pot fi **abordate mixt**, adică prin combinarea metodelor multiobiectiv cu metodele multiatribut.

Astfel, metoda mixtă cuprinde etapele:

1. etapa multiobiectiv:

se determină soluțiile nondominate $X^1, X^2, \dots, X^p$ pentru problema multiobiectiv (5.1), rezolvând p probleme de programe liniară monoobiectiv obținute din (5.1);

2. etapa multiatribut:

alegerea între soluțiile nondominate: $X^1, X^2, \dots, X^p$ a soluției care constituie cel mai bun compromis între criterii; se consideră că $X^1, X^2, \dots, X^p$ sunt p variante, iar $f_1, f_2, \dots, f_p$ sunt p criterii și se calculează matricea B .

$B = (f_k(X^i))$, $i, k = 1, 2, \dots, p$,

Se normalizează matricea B , apoi se utilizează un algoritm multiatribut; se poate considera alături de cele p soluții nondominate și o nouă soluție X^{p+1} (sau mai multe) care este combinație convexă a celor p soluții;

3. etapa multiobiectiv: determinarea soluției X^* care satisface ansamblul celor p funcții obiectiv, utilizând ierarhia soluțiilor nondominate de la punctul 2.

Exemplul 5.1.

Se reia multicriterial, cu două funcții obiectiv, exemplul nr. 3.6. Se va rezolva cu metoda ε - restrictivă.

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\leq 120 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 80 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 70 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3; \\ f_1(X_1, X_2, X_3) &= 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \end{aligned}$$

$$f_2(X_1, X_2, X_3) = X_2$$

$$\max f_1(X_1, X_2, X_3)$$

$$\max f_2(X_1, X_2, X_3)$$

Se rezolvă cu programul Qsb două probleme de programare liniară: prima cu funcția obiectiv f_1 , iar a doua cu funcția obiectiv f_2 .

1.

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 120$$

$$2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 80$$

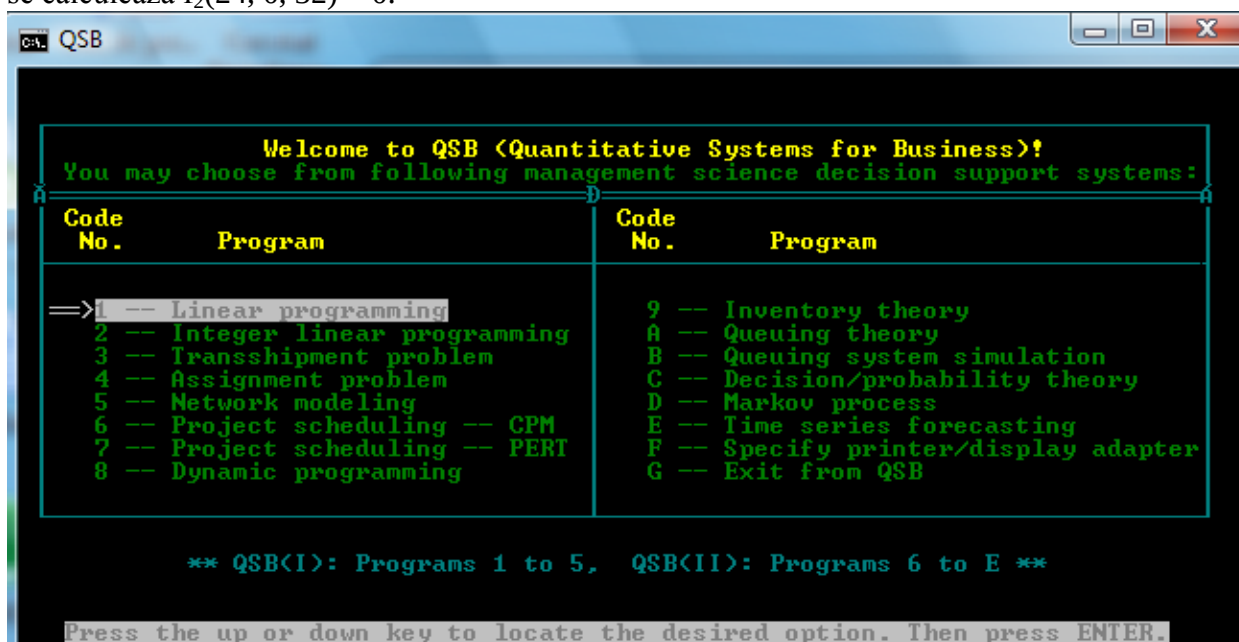
$$X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, 3;$$

$$f_1(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3$$

$$\max f_1(X_1, X_2, X_3)$$

Se obține soluția optimă: $X_1 = 24$, $X_2 = 0$, $X_3 = 32$, $\max f_1 = 4640$, se calculează $f_2(24, 0, 32) = 0$.



2.

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 120$$

$$2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 80$$

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, 3;$$

$$f_2(X_1, X_2, X_3) = X_2$$

$$\max f_2(X_1, X_2, X_3)$$

Se obține soluția optimă: $X_1 = 0$, $X_2 = 35$, $X_3 = 0$, $\max f_2 = 35$, se calculează $f_1(0, 35, 0) = 80 \cdot 35 = 2800$.

3.

Se alege $\varepsilon_1 = 0.9 \cdot \max f_1(X_1, X_2, X_3) = 0.9 \cdot 4640 = 4176$

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 120$$

$$2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 80$$

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70$$

$$60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \geq 4176$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, 3;$$

$$f_2(X_1, X_2, X_3) = X_2$$

$$\max f_2(X_1, X_2, X_3)$$

Se obține soluția optimă: $X_1 = 0$, $X_2 = 23.53$, $X_3 = 22.93$, $\max f_2 = 23.53$, se calculează $f_1(0, 23.53, 22.93) = 4175.4$

4.

Se alege $\varepsilon_2 = 0.9 \cdot \max f_2(X_1, X_2, X_3) = 0.9 \cdot 35 = 31.5$

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 120$$

$$2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 80$$

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70$$

$$X_2 \geq \varepsilon_2 = 31.5$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, 3;$$

$$f_1(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3$$

$$\max f_1(X_1, X_2, X_3)$$

Se obține soluția optimă: $X_1 = 0$, $X_2 = 31.5$, $X_3 = 7$, $\max f_1 = 3220$
se calculează $f_2(0, 31.5, 7) = 31.5$

Se poate continua cu alte valori pentru ε_1 din vecinătatea lui $\max f_1(X_1, X_2, X_3)$, respectiv pentru ε_2 din vecinătatea lui $\max f_2(X_1, X_2, X_3)$. Se va alege varianta dorită de decident.

6. Programarea liniară stochastică

Se va prezenta o extensie a modelelor deterministe, considerând modele stochastice în alocarea resurselor. O critică adusă modelării deterministe este aceea că anumiți coeficienți (parametri, variabile) trebuie priviți ca variabile aleatoare. Modelele matematice deterministe nu aproximează întotdeauna suficient de bine realitatea obiectivă și nici activitățile de management care au un caracter dinamic. În relațiile de la modelele precedente se vor considera mai mulți vectori b și c cu probabilități corespunzătoare și analog mai multe consumuri specifice date de matrici A cu anumite probabilități. Deci, se va considera că A , b , c sunt matrici aleatoare și se vor nota: $A(w)$, $b(w)$, $c(w)$, iar elementele lor sunt variabile aleatoare definite pe câmpul de probabilitate $\{W, K, P\}$, obținându-se modelul dat de relațiile (6.1).

$$A(w) \cdot X \leq b(w)$$

$$X \geq 0 \quad (6.1)$$

$$f(X) = c(w) \cdot X, w \in W$$

$$\max f(X)$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$$

și aceasta este o problemă de programare liniară stochastică.

Se pune problema găsirii funcției de repartiție a valorii optime a lui $f(X)$.

Vom avea:

$$f(w) = f(A(w), b(w), c(w)). \quad (6.2)$$

Funcția $f(X)$ reprezintă profitul și se dorește să se știe probabilitatea cu care profitul $f(X)$ ia o anumită valoare. Se consideră repartițiile variabilelor aleatoare discrete independente A, b, c :

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \dots & A^q \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1q} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\sum_{k=1}^q p_{1k} = 1, \quad p_{1k} \in [0, 1]$$

unde:

$A^k = (a_{ij}^k)$,
 a_{ij}^k - este consumul specific din resursa R_i realizabil cu probabilitatea p_{1k} , $k = 1, 2, \dots, q$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

$$b = \begin{pmatrix} b^1 & b^2 & \dots & b^r \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2r} \end{pmatrix}, \quad b^k = \begin{pmatrix} b_1^k \\ b_2^k \\ \dots \\ b_m^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, r; \quad (6.4)$$

$$\sum_{k=1}^r p_{2k} = 1, \quad p_{2k} \in [0, 1]$$

și b_i^k reprezintă disponibilul din resursa R_i care este posibil cu probabilitatea p_{2k} , $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, r$.

$$c = \begin{pmatrix} c^1 & c^2 & \dots & c^s \\ p_{31} & p_{32} & \dots & p_{3s} \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

$$c^k = (c_1^k, c_2^k, \dots, c_n^k), \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{k=1}^s p_{3k} = 1, \quad p_{3k} \in [0, 1]$$

c_j^k - reprezintă profitul unitar al produsului P_j posibil cu probabilitatea p_{3k} , $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, s$.

Evident că avem condițiile:

$a_{ij}^k \geq 0, b_i^h \geq 0, c_l^j \geq 0$,
 $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, q$; $h = 1, 2, \dots, r$; $l = 1, 2, \dots, s$.

Tripletul $(A, b, c) = (A(w), b(w), c(w))$ poate lua $q \cdot r \cdot s$ valori. Rezolvarea problemei de programare liniară stochastică dată de relațiile (6.1), se reduce la rezolvarea următoarelor probleme de programare liniară deterministe, date de (6.6), care se vor realiza cu probabilitatea P_{khl} :

$$\begin{aligned} A^k \cdot X &\leq b^h \\ X &\geq 0 \\ f(X_1, X_2, \dots, X_n) &= c^l \cdot X \\ \max f(X_1, X_2, \dots, X_n) & \end{aligned} \quad (6.6)$$

unde:

$$k = 1, 2, \dots, q; h = 1, 2, \dots, r; l = 1, 2, \dots, s.$$

Aceste relații dau $q \cdot r \cdot s$ probleme (6.6), ce trebuie rezolvate, iar problemele sunt probleme de programare liniară deterministă realizabile cu probabilitatea P_{khl} , rezolvabile cu algoritmul simplex primal sau dual, respectiv cu programele QSB, DSSPOM, LINDO sau alte programe.

Dacă modelul matematic dat de relațiile (6.6) se referă la produse indivizibile (piese/repere), atunci trebuie adăugată condiția (6.7), rezultând o problemă de programare liniară în numere întregi.

$$X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.7)$$

Se notează:

$$\max f(X) = \max f(A^k, b^h, c^l) = M_{khl}, \quad (6.8)$$

Probabilitatea ca $f(X)$ să ia valoarea M_{khl} este :

$$P(f(X) = M_{khl}) = P(A = A^k, b = b^h, c = c^l) = p_{1k} \cdot p_{2h} \cdot p_{3l} = P_{khl},$$

$$k = 1, 2, \dots, q; h = 1, 2, \dots, r; l = 1, 2, \dots, s.$$

Se poate scrie repartiția profitului maxim (6.9).

$$\max f(a, b, c) = \begin{pmatrix} M_{111} & M_{112} & \dots & M_{qrs} \\ p_{111} & p_{112} & \dots & p_{qrs} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Funcția de repartiție a variabilei aleatoare X , în general, este:

$F(x) = P(X < x)$ = probabilitatea evenimentului $X < x$, unde x este o anumită valoare curentă. Funcția de repartiție $F(x)$ este o funcție nedescrescătoare.

$$F(x) = \sum_{x_j < x} p_j = \sum_{x_j < x} P(X = x_j) \quad (6.10)$$

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Dacă funcția obiectiv $f(X)$ are altă semnificație concretă se procedează analog.

Aplicarea modelului elaborat pentru estimarea profitului în alocarea resurselor, în condițiile a trei piese / repere și trei resurse. Se va scrie repartiția și funcția de repartiție a profitului maxim.

Tabelul nr. 6.1.

R_i	P_j	P_1	P_2	P_3	Resurse disponibile b_i
R_1		1	2	3	100
R_2		2	2	1	70
R_3		1	2	1	60
Profitul unitar c_j		30	40	50	

Se consideră $q = 2, r = 2, s = 3$ în modelul problemei de programare liniară stohastică, deci sunt două matrici A (consumul specific), doi vectori b (resurse disponibile) și trei vectori c (profitul unitar), fiecare cu probabilitățile corespunzătoare.

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b^1 & b^2 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1.1 & 2.2 & 3.3 \\ 2.2 & 2.2 & 1.1 \\ 1.1 & 2.2 & 1.1 \end{pmatrix}, b^1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}, b^2 = \begin{pmatrix} 125 \\ 100 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$c^1 = (30, 40, 50), c^2 = (40, 50, 60), c^3 = (55, 60, 80)$$

Se rezolvă cu programul QSB, modulul Integer linear programming,
 $q \cdot r \cdot s = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ probleme de programare liniară în numere întregi, date de (6. 11), realizabile cu anumite probabilități ce se vor calcula.

$$A^k \cdot X \leq b^h$$

$$X \geq 0 \quad (6. 11)$$

$$X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3$$

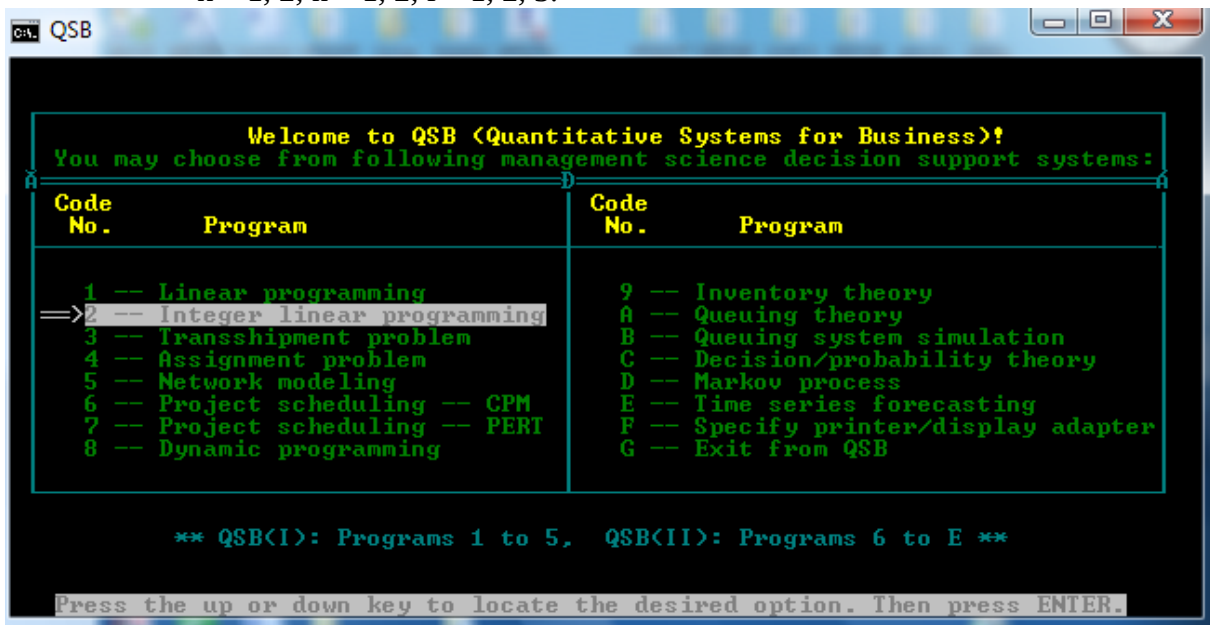
$$f(X_1, X_2, X_3) = c^l \cdot X$$

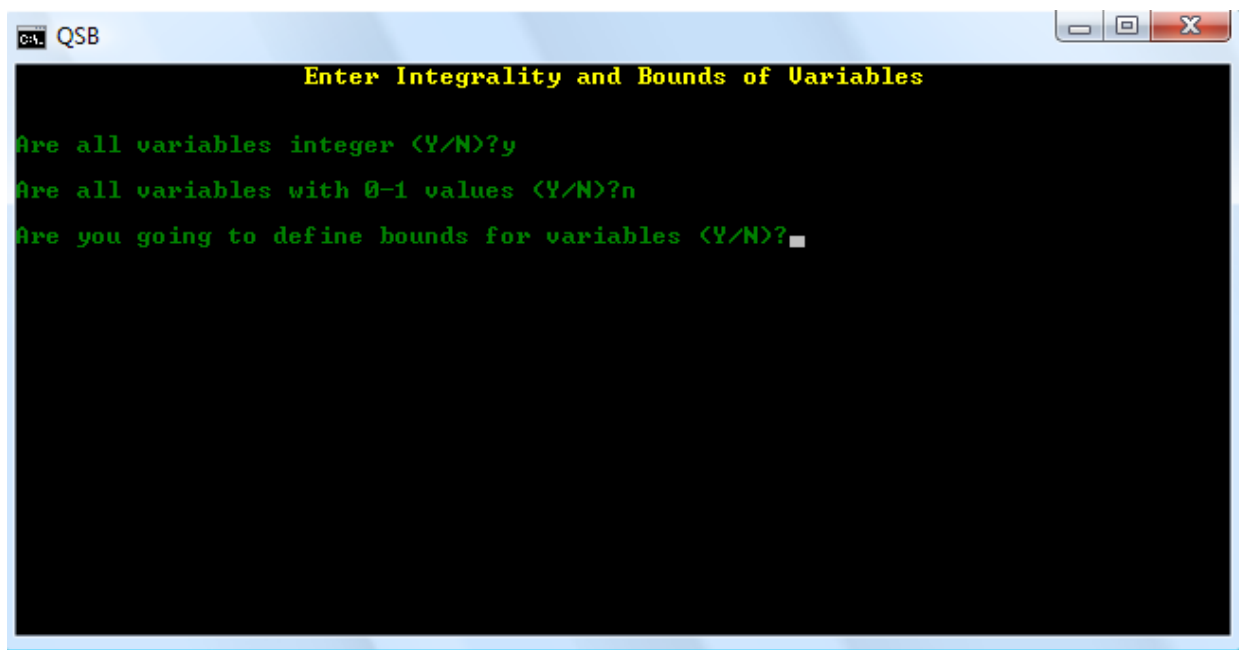
$$\max f(X_1, X_2, X_3)$$

unde:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$$k = 1, 2; h = 1, 2; l = 1, 2, 3.$$





La ultima întrebare se răspunde N.

1) Pentru (A^1 , b^1 , c^1) se obține problema de programare liniară deterministă (6. 12).

$$\begin{aligned}
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 100 \\
 &2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70 \\
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 60 \\
 &X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
 &X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
 &f(X_1, X_2, X_3) = 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3 \\
 &\max f(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned} \tag{6. 12}$$

Se rezolvă cu programul Qsb și se obține soluția optimă:

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{111} = 1960$, $X_1 = 22$, $X_2 = 0$, $X_3 = 26$;

realizabilă cu probabilitatea $P_{111} = p_{11} \cdot p_{21} \cdot p_{31} = 0.7 \times 0.8 \times 0.5 = 0.28$;

2) Pentru (A^1 , b^1 , c^2) se obține problema deterministă (6. 13).

$$\begin{aligned}
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 100 \\
 &2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70 \\
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 60 \\
 &X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
 &X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
 &f(X_1, X_2, X_3) = 40 \cdot X_1 + 50 \cdot X_2 + 60 \cdot X_3 \\
 &\max f(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned} \tag{6. 13}$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{112} = 2440$, $X_1 = 22$, $X_2 = 0$, $X_3 = 26$;

cu probabilitatea $P_{112} = p_{11} \cdot p_{21} \cdot p_{32} = 0.7 \times 0.8 \times 0.3 = 0.168$;

3) Pentru (A^1 , b^1 , c^3) se obține (6. 14).

$$\begin{aligned}
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 100 \\
 &2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70 \\
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 60 \\
 &X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
 &X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
 &f(X_1, X_2, X_3) = 55 \cdot X_1 + 60 \cdot X_2 + 80 \cdot X_3 \\
 &\max f(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned} \tag{6. 14}$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{113} = 3290$, $X_1 = 22$, $X_2 = 0$, $X_3 = 26$;

realizabilă cu probabilitatea $P_{113} = p_{11} \cdot p_{21} \cdot p_{33} = 0.7 \times 0.8 \times 0.2 = 0.112$;

4) Pentru (A^1 , b^2 , c^1) se obține (6. 15).

$$\begin{aligned}
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 125 \\
 &2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 100 \\
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 90 \\
 &X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
 &X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
 &f(X_1, X_2, X_3) = 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3 \\
 &\max f(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned}
 \tag{6.15}$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{121} = 2550$, $X_1 = 35$, $X_2 = 0$, $X_3 = 30$;

realizabilă cu probabilitatea $P_{121} = p_{11} \cdot p_{22} \cdot p_{31} = 0.7 \times 0.2 \times 0.5 = 0.07$.

5) Pentru (A^1 , b^2 , c^2) se obține (6.16).

$$\begin{aligned}
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 125 \\
 &2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 100 \\
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 90 \\
 &X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
 &X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
 &f(X_1, X_2, X_3) = 40 \cdot X_1 + 50 \cdot X_2 + 60 \cdot X_3 \\
 &\max f(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned}
 \tag{6. 16}$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{122} = 3200$, $X_1 = 35$, $X_2 = 0$, $X_3 = 30$;

realizabilă cu probabilitatea $P_{122} = p_{11} \cdot p_{22} \cdot p_{32} = 0.7 \times 0.2 \times 0.3 = 0.042$.

6) Pentru (A^1 , b^2 , c^3) se obține (6. 17).

$$\begin{aligned}
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 125 \\
 &2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 100 \\
 &X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 90 \\
 &X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
 &X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
 &f(X_1, X_2, X_3) = 55 \cdot X_1 + 60 \cdot X_2 + 80 \cdot X_3 \\
 &\max f(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned}
 \tag{6. 17}$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{123} = 4325$, $X_1 = 35$, $X_2 = 0$, $X_3 = 30$;

realizabilă cu probabilitatea $P_{123} = p_{11} \cdot p_{22} \cdot p_{33} = 0.7 \times 0.2 \times 0.2 = 0.028$.

7) Pentru (A^2 , b^1 , c^1) se obține (6. 18).

$$\begin{aligned}
 &1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 3.3 \cdot X_3 \leq 100 \\
 &2.2 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 70 \\
 &1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 60 \\
 &X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
 &X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
 &f(X_1, X_2, X_3) = 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3 \\
 &\max f(X_1, X_2, X_3)
 \end{aligned}
 \tag{6. 18}$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{211} = 1760$, $X_1 = 19$, $X_2 = 1$, $X_3 = 23$;

realizabilă cu probabilitatea $P_{211} = p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{31} = 0.3 \times 0.8 \times 0.5 = 0.12$.

8) Pentru (A^2 , b^1 , c^2) se obține (6. 19).

$$\begin{aligned}
 &1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 3.3 \cdot X_3 \leq 100 \\
 &2.2 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 70 \\
 &1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 60 \\
 &X_j \geq 0, j = 1, 2, 3;
 \end{aligned}
 \tag{6. 19}$$

$$\begin{aligned}
&X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
&f(X_1, X_2, X_3) = 40 \cdot X_1 + 50 \cdot X_2 + 60 \cdot X_3 \\
&\max f(X_1, X_2, X_3)
\end{aligned}$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{212} = 2190$, $X_1 = 19$, $X_2 = 1$, $X_3 = 23$;
 cu probabilitatea $P_{212} = p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{32} = 0.3 \times 0.8 \times 0.3 = 0.072$.
 9) Pentru (A^2, b^1, c^3) se obține (6. 20).

$$\begin{aligned}
&1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 3.3 \cdot X_3 \leq 100 \\
&2.2 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 70 \\
&1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 60 \\
&X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
&X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
&f(X_1, X_2, X_3) = 55 \cdot X_1 + 60 \cdot X_2 + 80 \cdot X_3 \\
&\max f(X_1, X_2, X_3)
\end{aligned} \tag{6. 20}$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{213} = 2945$, $X_1 = 19$, $X_2 = 1$, $X_3 = 23$;
 cu probabilitatea $P_{213} = p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{33} = 0.3 \times 0.8 \times 0.2 = 0.048$.
 10) Pentru (A^2, b^2, c^1) se obține (6. 21).

$$\begin{aligned}
&1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 3.3 \cdot X_3 \leq 125 \\
&2.2 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 100 \\
&1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 90 \\
&X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
&X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
&f(X_1, X_2, X_3) = 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3 \\
&\max f(X_1, X_2, X_3)
\end{aligned} \tag{6. 21}$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{221} = 2290$, $X_1 = 29$, $X_2 = 3$, $X_3 = 26$;
 cu probabilitatea $P_{221} = p_{12} \cdot p_{22} \cdot p_{31} = 0.3 \times 0.2 \times 0.5 = 0.03$.

11) Pentru (A^2, b^2, c^2) se obține (6. 22).

$$\begin{aligned}
&1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 3.3 \cdot X_3 \leq 125 \\
&2.2 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 100 \\
&1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 90 \\
&X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
&X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
&f(X_1, X_2, X_3) = 40 \cdot X_1 + 50 \cdot X_2 + 60 \cdot X_3 \\
&\max f(X_1, X_2, X_3)
\end{aligned} \tag{6. 22}$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{222} = 2870$, $X_1 = 29$, $X_2 = 3$, $X_3 = 26$;
 cu probabilitatea $P_{222} = p_{12} \cdot p_{22} \cdot p_{32} = 0.3 \times 0.2 \times 0.3 = 0.018$.

12) Pentru (A^2, b^2, c^3) se obține problema dată de relațiile (6. 23).

$$\begin{aligned}
&1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 3.3 \cdot X_3 \leq 125 \\
&2.2 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 100 \\
&1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \leq 90 \\
&X_j \geq 0, j = 1, 2, 3; \\
&X_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3 \\
&f(X_1, X_2, X_3) = 55 \cdot X_1 + 60 \cdot X_2 + 80 \cdot X_3 \\
&\max f(X_1, X_2, X_3)
\end{aligned} \tag{6. 23}$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{223} = 3870, X_1 = 30, X_2 = 1, X_3 = 27;$

cu probabilitatea $P_{223} = p_{12} \cdot p_{22} \cdot p_{33} = 0.3 \times 0.2 \times 0.2 = 0.012$.

Problema de programare liniară stochastică s-a rezolvat prin cele 12 probleme de programare liniară în numere întregi, realizabile cu anumite probabilități, care la rândul lor au avut fiecare propriile iterații, plus calculul probabilităților corespunzătoare, a repartiției profitului maxim și funcția de repartiție, deci cantitatea de calcule crește considerabil prin utilizarea modelului stochastic.

Repartiția profitului maxim este:

$$\max f(A, b, c) = \begin{pmatrix} 1760 & 1960 & 2190 & 2290 & 2440 & 2550 & 2870 & 2945 & 3200 & 3290 & 3870 & 4325 \\ 0.12 & 0.28 & 0.072 & 0.03 & 0.168 & 0.07 & 0.018 & 0.048 & 0.042 & 0.112 & 0.012 & 0.028 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

sau

$$\max f(A, b, c) = \begin{pmatrix} 1760 & 1960 & 2190 & 2290 & 2440 & 2550 & 2870 & 2945 & 3200 & 3290 & 3870 & 4325 \\ 0.12 & 0.28 & 0.072 & 0.03 & 0.168 & 0.07 & 0.018 & 0.048 & 0.042 & 0.112 & 0.012 & 0.028 \end{pmatrix}$$

Funcția de repartiție este $F(f)$ dată de (6.25).

$$F(f) = \begin{cases} 0, & \text{daca } f \leq 1760 \\ 0.12, & \text{daca } 1760 < f \leq 1960 \\ 0.40, & \text{daca } 1960 < f \leq 2190 \\ 0.472, & \text{daca } 2190 < f \leq 2290 \\ 0.502, & \text{daca } 2290 < f \leq 2440 \\ 0.670, & \text{daca } 2440 < f \leq 2550 \\ 0.740, & \text{daca } 2550 < f \leq 2870 \\ 0.758, & \text{daca } 2870 < f \leq 2945 \\ 0.806, & \text{daca } 2945 < f \leq 3200 \\ 0.848, & \text{daca } 3200 < f \leq 3290 \\ 0.960, & \text{daca } 3290 < f \leq 3870 \\ 0.972, & \text{daca } 3870 < f \leq 4325 \\ 1, & \text{daca } f > 4325 \end{cases} \quad (6.25)$$

Dacă se exclude cea mai mică și cea mai mare valoare ale profitului maxim, $\max f$ (variabila aleatoare), atunci probabilitatea ca profitul maxim să se încadreze în intervalul $[1960 ; 3870)$, deci $\max f [1960 ; 3870)$, este:

$$P(1960 \leq \max f < 3870) = F(3870) - F(1960) = 0.960 - 0.12 = 0.840$$

deci sunt șanse mari de realizare.

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C5

Programarea fuzzy

Mulțimile fuzzy (vagi) au fost introduse în matematică de Zadeh, L. A. în 1965 ca o necesitate de a măsura imprecisul, vagul, nuanța, fiind apoi utilizate în diverse domenii ale științei și tehnicii. Pentru o mulțime fuzzy nu există o tranziție netă de la apartenența la neapartenența unui element la o mulțime, existând grade de apartenență intermediare între apartenență și neapartenență. Mulțimile fuzzy se bazează pe logica continuă, iar teoria clasică a mulțimilor pe logica bivalentă, deci discontinuă, care lucrează cu două valori logice: adevărul și falsul, cu valorile de adevăr 1, respectiv 0.

O altă extensie a mulțimilor clasice care poate manevra concepte vagi este dată de mulțimile flue introduse de Y. Gentilhomme în 1968 care au la bază o logică trivalentă cu valorile de adevăr: 0, $1/2$, 1, corespunzătoare pentru fals, posibil și adevărat sau la modul general se bazează pe logica n-valentă, dar sunt logici discontinue.

Pentru definirea și utilizarea mulțimilor fuzzy se vor introduce câteva noțiuni necesare.

Se consideră o mulțime nevidă L , înzestrată cu două operații, notate: $\vee$ (disjuncție) și $\wedge$ (conjuncție) și axiomele:

1.) Comutativitatea

$$a \vee b = b \vee a ;$$

$$a \wedge b = b \wedge a ;$$

2.) Asociativitatea

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) ;$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) ;$$

3.) Idempotența

$$a \vee a = a ;$$

$$a \wedge a = a ;$$

4.) Absorbția

$$a \vee (a \wedge b) = a ;$$

$$a \wedge (a \vee b) = a ;$$

5.) Distributivitatea

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) ;$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) ;$$

6.) Prim și ultim element

Există elementele $0, 1 \in L$, astfel încât:

$$0 \vee a = a ,$$

$$0 \wedge a = 0 ;$$

$$1 \vee a = 1 ,$$

$$1 \wedge a = a ;$$

7.) Negația

Există operația negație " $\bar{}$ " , astfel încât:

$$\bar{\bar{a}} \vee a = 1$$

$$a \wedge \bar{a} = 0$$

$$\bar{\bar{a}} = a$$

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0.$$

Se vor defini câteva concepte utilizând cele șapte axiome.

Tripletul $(L, \vee, \wedge)$ care verifică axiomele 1) - 4) se numește **latice**.

O latice $(L, \vee, \wedge)$ care verifică axiomele 5) - 7) se numește **algebra Boole**.

Fie L o latice și X o mulțime oarecare.

Se numește **L - multime fuzzy** în X o aplicație F ,

$$F : X \rightarrow L.$$

Fie B o algebră Boole și X o mulțime oarecare.

Se numește **B - multime fuzzy** în X o aplicație F ,

$$F : X \rightarrow B.$$

Se poate considera intervalul $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, $B = [0, 1]$, care este o algebră Boole cu operațiile:

$$a \vee b = \max(a, b),$$

$$a \wedge b = \min(a, b), \forall a, b \in [0, 1]$$

$$\bar{a} = 1 - a, \forall a \in [0, 1]$$

În acest caz se numește **multime fuzzy** sau **vagă** (în X) o aplicație

$$F : X \rightarrow [0, 1]$$

[Negoită, C.V., ș.a.]

Alți autori, [Dumitrescu, D., Costin, H.], numesc mulțimea fuzzy mulțime nuanțată, fiind definită astfel:

dacă X este o mulțime nevidă, o **mulțime fuzzy (nuanțată)** este o pereche (X, A) , unde $A : X \rightarrow [0, 1]$.

X este universul mulțimii fuzzy (nuantate) și A este funcția de apartenență a mulțimii fuzzy. $A(x)$ se interpretează ca fiind gradul de apartenență al lui x la mulțimea fuzzy (X, A) .

Dacă $A(x) = 1$, atunci, cu certitudine, x este un element din A . Între apartenența totală și neapartenența totală există o infinitate de situații intermediare (fuzzy). Din motive de simplitate se va identifica mulțimea fuzzy cu funcția ei de apartenență, deci vom spune că A este o mulțime fuzzy peste universul X . Se va nota cu $L(X)$ familia mulțimilor fuzzy peste X .

Zimmermann, H. J. definește mulțimea fuzzy asemănător cu cele două definiții precedente.

Dacă X este o mulțime de obiecte notate generic prin x , atunci mulțimea fuzzy A în X este o mulțime de perechi ordonate

$A = \{ (x, \mu_A(x)) \mid x \in X \}$, iar $\mu_A(x)$ este numită funcție de apartenență a elementului x la A ,

$$\mu : X \rightarrow M$$

, M fiind spațiul de apartenență.

Dacă M conține numai două elemente 0 și 1, mulțimea A este non-fuzzy, deci clasică, cu $\mu_A(x)$ identică cu funcția caracteristică a mulțimii non-fuzzy.

Se vor enunța câteva relații și operații cu mulțimi fuzzy.

Dacă A și B sunt mulțimi fuzzy peste X , **egalitatea mulțimilor fuzzy**:

$$A = B \Leftrightarrow A(x) = B(x), \forall x \in X.$$

Mulțimea fuzzy A este **inclusă** în mulțimea fuzzy B ,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x), \forall x \in X.$$

Dacă A este o mulțime fuzzy peste X , complementara A' a mulțimii A peste X , este definită de:

$$A'(x) = 1 - A(x), (\forall) x \in X.$$

Mulțimea vidă se notează cu Φ și se definește:

$$\Phi(x) = 0, (\forall) x \in X.$$

Complementara mulțimii vide Φ se notează cu X și:

$$X(x) = 1, (\forall) x \in X.$$

Reuniunea și intersecția mulțimilor fuzzy peste X au fost definite de Zadeh în (7. 1).

$$\begin{aligned} (A \cup B)(x) &= \max(A(x), B(x)), \forall x \in X; \\ (A \cap B)(x) &= \min(A(x), B(x)), \forall x \in X. \end{aligned} \quad (7. 1)$$

Această definire a reuniunii și intersecției mulțimilor fuzzy nu este singura posibilă, iar la modul general se definesc prin utilizarea t-normelor a căror definiție se dă în continuare.

O **t-normă** este o funcție

$$T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

care satisface următoarele patru axiome:

1. condiția la limită: $T(a, 1) = a, \forall a \in [0, 1]$;
2. monotonia: $a \leq u, b \leq v \Rightarrow T(a, b) \leq T(u, v)$;
3. comutativitatea: $T(a, b) = T(b, a), \forall a, b \in [0, 1]$;
4. asociativitatea: $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c)), \forall a, b, c \in [0, 1]$;

Dacă T este o t-norma

$$T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

atunci funcția S

$$S: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

definită prin : $S(a, b) = 1 - T(1-a, 1-b), \forall a, b \in [0, 1]$
se numește **t-conorma duală** a lui T .

La modul general se definesc reuniunea și intersecția mulțimilor fuzzy A și B definite peste X în (7. 2).

$$\begin{aligned} (A \cap B)(x) &= T(A(x), B(x)), \forall x \in X; \\ (A \cup B)(x) &= S(A(x), B(x)), \forall x \in X, \end{aligned} \quad (7. 2)$$

unde T este o t-normă și S este t-conorma duală a lui T .

Câteva exemple concrete de t-norme T și t-conorme S sunt:

- 1.) $T_0(a, b) = \min(a, b)$
 $S_0(a, b) = \max(a, b);$
- 2.) $T_1(a, b) = a \cdot b$
 $S_1(a, b) = a + b - a \cdot b;$

$$\begin{aligned}
3.) \quad T_{\infty}(a, b) &= \max(a + b - 1, 0) \\
S_{\infty}(a, b) &= \min(a + b, 1); \\
4.) \quad T_s(x, y) &= \log_s \left(1 + \frac{(s^x - 1)(s^y - 1)}{s - 1} \right), \quad s > 0, s \neq 1, \\
S_s(x, y) &= 1 - T(1 - x, 1 - y).
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Cele patru t-norme au proprietatea:

$$T_i = \lim_{s \rightarrow i} T_s, \quad \text{unde } i = 0, 1, \infty.$$

Din t-norma 4), dată de (7.3), se obțin o infinitate de t-norme, după valorile lui s .

Programarea liniară fuzzy.

Programarea liniară clasică, deterministă, non-fuzzy, utilizată în alocarea resurselor cu maximizarea profitului este în principiu dată de tabelul nr. 3.1 și relațiile (3.7) sau matricial (3.8) din cursul C2, pe care le reluăm și le rescriem alfel prin relațiile (7.4).

$$\begin{aligned}
&\max f(x) \\
&f(x) = c \cdot x \\
&A \cdot x \leq b \\
&x \geq 0
\end{aligned} \tag{7.4}$$

unde: $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Toți coeficienții relației (7.4) sunt mulțimi clasice, non-fuzzy.

Dacă decizia bazată pe soluția optimă a problemei de programare liniară (7.4) trebuie luată în condiții vagi, în împrejurări fuzzy, trebuie modificate relațiile (7.4) și trebuie utilizat modelul programării liniare fuzzy dat de relațiile (7.5).

Se presupune că funcția obiectiv f va avea un nivel aspirat (cel puțin egal) z .

$$\begin{aligned}
&c \cdot x \underset{\approx}{\geq} z \\
&A \cdot x \underset{\approx}{\leq} b \\
&x \geq 0
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Relația $\underset{\approx}{\leq}$ este versiunea fuzzy a relației clasice, non-fuzzy $\leq$ și are interpretarea

lingvistică "esențial mai mic decât sau egal". La fel, relația $\underset{\approx}{\geq}$ este versiunea fuzzy

a relației clasice, non-fuzzy $\geq$, și are interpretarea lingvistică "esențial mai mare decât sau egal".

Fiecare restricție a modelului (7.5) este privită ca o mulțime fuzzy.

În programarea liniară clasică, non-fuzzy, violarea oricărei restricții în relațiile (7.4) duce la soluții nefezabile, neadmisibile, dar în programarea liniară fuzzy anumite violări ale restricțiilor în relațiile (7. 5) sunt permise. Spre deosebire de programarea liniară clasică, non-fuzzy, în programarea liniară fuzzy nu este definit unic tipul modelului, fiind posibile multe variații, funcție de trăsăturile caracteristice ale situației reale care va fi modelată. În relațiile (7. 5) se face substituția:

$$B = \begin{pmatrix} -c \\ A \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -z \\ b \end{pmatrix} \text{ și relațiile (7. 5) devin (7. 6).}$$

$$\begin{aligned} B \cdot x &\lesseqgtr d \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (7. 6)$$

În relațiile (7.6) fiecare linie din cele $m + 1$ reprezintă mulțimi fuzzy cu funcția de apartenență a relației i , $\mu_i(x)$, care pot fi interpretate ca și gradul de satisfacere al inegalității fuzzy:

$$B_i \cdot x \lesseqgtr d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m + 1,$$

iar B_i este linia i în matricea B .

Deci, notațiile sunt:

$$\begin{aligned} B_1 &= -c \\ d_1 &= -z \\ B_{i+1} &= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ d_{i+1} &= b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \end{aligned}$$

Funcția de apartenență pentru modelul (7.6) este dată de definirea intersecției mulțimilor fuzzy prin relația (7.1), obținându-se relațiile (7.7).

$$\mu_D(x) = \min_{1 \leq i \leq m+1} \{\mu_i(x)\} \quad (7. 7)$$

iar pentru rezolvarea problemei fuzzy dată de (7. 6) trebuie aflat (7. 8).

$$\max_{x \geq 0} \mu_D(x) = \max_{x \geq 0} \min_{1 \leq i \leq m+1} \{\mu_i(x)\} \quad (7. 8)$$

Sunt posibile diverse funcții de apartenență $\mu_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m + 1$.

Se poate utiliza funcția de apartenență (7. 9).

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{daca } B_i \cdot x \leq d_i \\ 1 - \frac{B_i \cdot x - d_i}{p_i}, & \text{daca } d_i < B_i \cdot x \leq d_i + p_i \\ 0, & \text{daca } B_i \cdot x > d_i + p_i \end{cases} \quad (7. 9)$$

unde p_i sunt constante alese subiectiv și reprezintă violările admisibile ale funcției obiectiv și restricțiilor, pentru $i = 1, 2, \dots, m + 1$.

Pentru rezolvarea problemei de programare liniară fuzzy (7.6) trebuie determinat (7. 10).

$$\max_{x \geq 0} \min_{1 \leq i \leq m+1} \left(1 - \frac{B_i \cdot x - d_i}{p_i} \right) \quad (7.10)$$

Problema de programare liniară fuzzy (7. 5) se reduce la rezolvarea problemei de programare liniară clasică (deterministă), non-fuzzy, dată de relațiile (7. 11) care are o restricție și o variabilă în plus față de (7. 5) și (7. 6) , se rezolvă cu algoritmul simplex primal sau dual sau prin utilizarea programelor Qsb, Dsspom, Lindo sau altele.

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \lambda \cdot p_i + B_i \cdot x \leq d_i + p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m + 1; \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

[Zimmermann, H.J., 1991]

Relațiile (7. 11) se dezvoltă, rezultă (7.11a)

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \lambda \cdot p_1 - c \cdot x \leq -z + p_1 \\ & \lambda \cdot p_i + B_i \cdot x \leq d_i + p_i, \quad i = 2, 3, \dots, m + 1; \\ & x \geq 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (7.11a)$$

Relațiile (7. 11a) se dezvoltă, rezultă (7.11b), apoi (7.11c).

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \lambda \cdot p_1 - \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j \leq -z + p_1 \\ & \lambda \cdot p_{i+1} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \leq b_i + p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (7.11b)$$

Se notează:

$$\lambda = X_{n+1}$$

Rezultă (7.11c).

$$\begin{aligned} & \max X_{n+1} \\ & \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j - p_1 \cdot X_{n+1} \geq z - p_1 \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j + p_{i+1} \cdot X_{n+1} \leq b_i + p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, n+1; \end{aligned} \quad (7.11c)$$

Radulescu, D. consideră [Radulescu, D., Gheorghiu, O., 1992] că programarea matematică fuzzy cuprinde trei cazuri principale:

- restricții și funcții obiectiv formulate fuzzy;
- restricții și funcții obiectiv deterministe, dar tratate în context fuzzy;
- coeficienți care formează mulțimi fuzzy.

Programarea matematică fuzzy în sensul strict cuprinde primul caz de mai sus, deci fiind date m restricții fuzzy $R_1, R_2, \dots, R_m$ și p obiective fuzzy $O_1, O_2, \dots, O_p$, cu funcțiile de apartenență $\mu_{R_i}(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ și $\mu_{O_k}(x)$, $k = 1, 2, \dots, p$, trebuie determinat:

$$\max_{x \geq 0} \min_{i,k} \{ \mu_{R_i}(x), \mu_{O_k}(x) \} \quad (7.12)$$

, obținându-se soluția optimă. Aceasta formulare a problemei de programare matematică fuzzy eludează aspectele liniar-nelinier și monocriterial-multicriterial, acestea fiind abordate unitar mai sus.

Exemplul nr. 7.1.

Se consideră o problemă de alocare a resurselor materiale cu maximizarea profitului, Din $m = 3$ resurse se fabrică $n = 3$ produse, date în tabelul nr.7.1. și împrejurările sunt vagi, fuzzy Trebuie determinată ce cantitate se va fabrica din fiecare produs, astfel încât profitul obținut să fie maxim. Va fi o abordare fuzzy a problemei maximizării profitului.

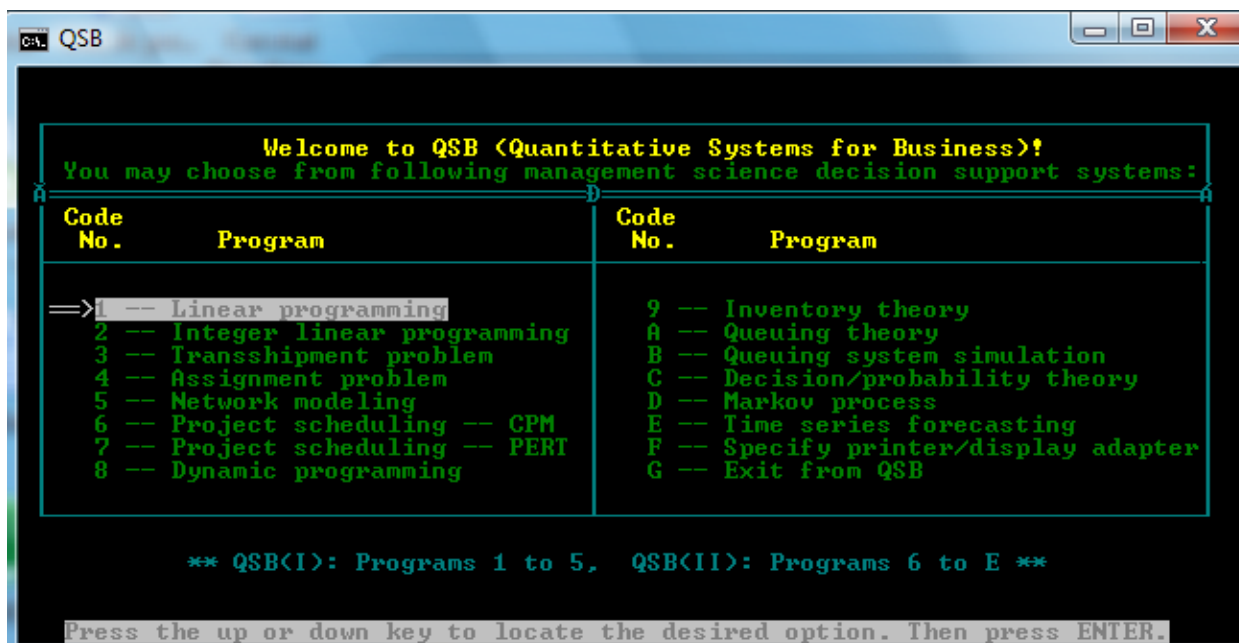
Tabelul nr.7.1.

P_j	P_1	P_2	P_3	Resurse disponibile b_i
R_i				
R_1	1	2	3	100
R_2	2	2	1	70
R_3	1	2	1	60
Profitul unitar c_j	30	40	50	

Modelul de alocare a resurselor prin programare liniară clasică, non-fuzzy este dat de relațiile (7.13) și are soluția optimă:

$$\max f = 1960, X_1 = 22, X_2 = 0, X_3 = 26;$$

$$\begin{aligned} X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\leq 100 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 70 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\leq 60 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3; \\ f(X_1, X_2, X_3) &= 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3 \\ \max f(X_1, X_2, X_3) \end{aligned} \quad (7.13)$$



Reformularea modelului (7.13) în sensul programării liniare fuzzy este dat de relațiile (7.14).

$$30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3 \geq z$$

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 100$$

$$2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70 \quad (7.14)$$

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 60$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, 3;$$

z - este nivelul aspirat (așteptat, cel puțin egal cu z) al funcției obiectiv .

Relațiile si sunt versiunea fuzzy a relațiilor și .

Problema de programare liniară fuzzy (7.14) se reduce la rezolvarea problemei de programare liniară clasică, non-fuzzy (7.15) , diferită de problema inițială deterministă, în care s-a notat $\lambda = X_4$ în modelul general (7.11).

$$\begin{aligned} 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3 - p_1 \cdot X_4 &\geq z - p_1 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + p_2 \cdot X_4 &\leq 100 + p_2 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + p_3 \cdot X_4 &\leq 70 + p_3 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + p_4 \cdot X_4 &\leq 60 + p_4 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4; \\ f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &= X_4 \\ \max f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) & \end{aligned} \quad (7.15)$$

unde: z - este nivelul aspirat (așteptat, cel puțin egal cu z) al funcției obiectiv ;

p_1 - violarea permisă a funcției obiectiv;

p_2 - violarea permisă a restricției (1) din relațiile (7.14);

p_3 - violarea permisă a restricției (2) din relațiile (7.14);

p_4 - violarea permisă a restricției (3) din relațiile (7.14).

Se vor da câteva valori lui z și p_1, p_2, p_3, p_4 .

- Pentru: $z = 1900$; $p_1 = 200$; $p_2 = 20$; $p_3 = 10$; $p_4 = 15$, prin înlocuirea acestor valori în relațiile (7.15), se obține (7.16).

$$\begin{aligned}
30.X_1 + 40.X_2 + 50.X_3 - 200.X_4 &\geq 1700 \\
X_1 + 2.X_2 + 3.X_3 + 20.X_4 &\leq 120 \\
2.X_1 + 2.X_2 + X_3 + 10.X_4 &\leq 80 \\
X_1 + 2.X_2 + X_3 + 15.X_4 &\leq 75 \\
X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4; \\
f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &= X_4 \\
\max f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Prin utilizarea programului QSB, se obține soluția:

$$X_1 = 21.785715 ; X_2 = 0 ;$$

$$X_3 = 25.357142 ; X_4 = \lambda = 1.1071428 = \max f_1 ;$$

Deci, utilizând valorile determinate pentru X_1, X_2, X_3 se obține profitul f :

$$f = 30 \cdot 21,785715 + 50 \cdot 25,357142 = 1921,42855 > 1900 = \text{nivelul aspirat, dar}$$

$f = 1921,42855 < 1960 = \text{valoarea optimă pentru problema deterministă (7.13). Valorile determinate pentru } X_1, X_2, X_3 \text{ reprezintă soluția care maximizează în (7.8) pentru modelul (7.13) cu funcția de apartenență (7.9).}$

- Dacă se modifică p_1 în relațiile (7.16) (rezultate din (7.15)), $p_1 = 100$, se obține (7.17).

$$\begin{aligned}
3.X_1 + 4.X_2 + 5.X_3 - 10.X_4 &\geq 180 \\
X_1 + 2.X_2 + 3.X_3 + 20.X_4 &\leq 120 \\
2.X_1 + 2.X_2 + X_3 + 10.X_4 &\leq 80 \\
X_1 + 2.X_2 + X_3 + 15.X_4 &\leq 75 \\
X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4; \\
f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &= X_4 \\
\max f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Relațiile (7.17) reprezintă o problemă de programare liniară non-fuzzy, diferită de problema deterministă inițială (7.13), ce se rezolvă cu programul QSB și se obține soluția optimă:

$$X_1 = 21,739132 ; X_2 = 0 ; X_3 = 25,21739 ; X_4 = \lambda = 1,1304348 = \max f_1 .$$

Pentru problema de programare liniară inițială (7.13), valoarea profitului f este :

$$f = 30 \cdot 21.739132 + 50 \cdot 25.21739 = 1913.04346 > z = 1900$$

$$f = 1913.04346 < 1960$$

- Dacă se modifică z și p_1 în relațiile (7.16) care s-au obținut din (7.15), $z = 1920$ și $p_1 = 50$, se obține (7.18).

$$\begin{aligned}
3.X_1 + 4.X_2 + 5.X_3 - 5.X_4 &\geq 187 \\
X_1 + 2.X_2 + 3.X_3 + 20.X_4 &\leq 120 \\
2.X_1 + 2.X_2 + X_3 + 10.X_4 &\leq 80 \\
X_1 + 2.X_2 + X_3 + 15.X_4 &\leq 75 \\
X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4; \\
f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &= X_4 \\
\max f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Relațiile (7.18) sunt o problemă de programare liniară non-fuzzy ce se rezolvă cu programul QSB și se obține în trei iterații soluția optimă: $X_1 = 21.80488 ; X_2 = 0 ; X_3 = 25.414635 ;$

$$X_4 = \lambda = 1.0975608 = \max f_1 .$$

Valoarea funcției obiectiv a problemei de programare liniară inițiale este în acest caz:

$$f = 30 \cdot 21.80488 + 50 \cdot 25.414635 = 1924.87815 > z = 1920$$

- Dacă se modifică z în relațiile (7.18), $z = 1960$, se obține:

$$\begin{aligned} 3.X_1 + 4.X_2 + 5.X_3 - 5.X_4 &\geq 191 \\ X_1 + 2.X_2 + 3.X_3 + 20.X_4 &\leq 120 \\ 2.X_1 + 2.X_2 + X_3 + 10.X_4 &\leq 80 \\ X_1 + 2.X_2 + X_3 + 15.X_4 &\leq 75 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4; \\ f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &= X_4 \\ \max f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) \end{aligned} \quad (7.19)$$

care are soluția optimă:

$$X_1 = 22.000002; X_2 = 0; X_3 = 26; X_4 = \lambda = 0.9999988 = \max f_1.$$

Pentru problema de programare liniară inițială în acest caz se obține:

$$f = 30 \cdot 22.000002 + 50 \cdot 26 = 1960.00006 > 1960$$

- Dacă se modifică din nou z și p_1 în relațiile (7.19), $z = 2410$ și $p_1 = 100$, se obține (7.20).

$$\begin{aligned} 3.X_1 + 4.X_2 + 5.X_3 - 10.X_4 &\geq 231 \\ X_1 + 2.X_2 + 3.X_3 + 20.X_4 &\leq 120 \\ 2.X_1 + 2.X_2 + X_3 + 10.X_4 &\leq 80 \\ X_1 + 2.X_2 + X_3 + 15.X_4 &\leq 75 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4; \\ f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &= X_4 \\ \max f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Soluția optimă:

$$X_1 = 23.956522; X_2 = 0; X_3 = 31.869564; X_4 = \lambda = 0.02173898 = \max f_1$$

și $f = 30 \cdot 23.956522 + 50 \cdot 31.869564 = 2312.17386 > 2410 - 100 = 2310$

- Dacă se modifică din nou z în relațiile (7.20), $z = 2420$ nu vom avea soluție fezabilă, admisibilă, deci nici soluție optimă.

Prin utilizarea problemei de programare liniară fuzzy, dacă condițiile concrete ale firmei impun acest lucru, se obține mai multă flexibilitate în decizii, dar crește cantitatea de calcule.

Programarea liniară fuzzy cu restricții fuzzy și restricții non-fuzzy

Este posibil ca o parte din restricțiile unei probleme de programare liniară fuzzy să fie restricții fuzzy, alte restricții să fie restricții clasice (determinate), non-fuzzy de forma:

$$D.x \leq h$$

unde: D este o matrice, x și h sunt vectori, iar funcția obiectivă să fie fuzzy.

$$D = (e_{kj}), k = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, n$$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_r \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

În acest caz restricțiile non-fuzzy se adaugă la formularea dată în modelul (7.11) și se obține (7.21).

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \lambda \cdot p_i + B_i \cdot x \leq d_i + p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m + 1; \\ & D \cdot x \leq h \\ & x, \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

Relațiile (7.21) reprezintă o problemă de programare liniară clasică (deterministă), non-fuzzy, care se rezolvă cu algoritmul simplex primal sau dual sau cu un program calculator corespunzător. [Zimmermann, H. J., 1991]

Relațiile (7.21) se dezvoltă, rezultând relațiile (7.22).

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \lambda \cdot p_i + B_i \cdot x \leq d_i + p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m + 1; \\ & \sum_{j=1}^n e_{kj} \cdot X_j \leq h_k, \quad k = 1, 2, \dots, r \\ & x, \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

Din relațiile (7.11b) și (7.22), rezultă modelul din relațiile (7.23).

$$\begin{aligned} & \max \lambda \\ & \lambda \cdot p_1 - \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j \leq -z + p_1 \\ & \lambda \cdot p_{i+1} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \leq b_i + p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\sum_{j=1}^n e_{kj} \cdot X_j \leq h_k, \quad k = 1, 2, \dots, r$$

$$\begin{aligned} & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Se notează:

$$\lambda = X_{n+1}$$

Din (7.23) și (7.11c) rezultă (7.24) care rezolvă problema de programare liniară fuzzy cu restricții fuzzy și restricții non-fuzzy, deci problema (7.21).

$$\begin{aligned} & \max X_{n+1} \\ & \sum_{j=1}^n c_j \cdot X_j - p_1 \cdot X_{n+1} \geq z - p_1 \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j + p_{i+1} \cdot X_{n+1} \leq b_i + p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ & \sum_{j=1}^n e_{kj} \cdot X_j \leq h_k, \quad k = 1, 2, \dots, r \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, n+1; \end{aligned} \quad (7.24)$$

Exemplul nr. 7.2.

Se reia exemplul 7.1. cu modelul matematic dat de relațiile (7.14), problemă de programare liniară fuzzy, în relațiile (7.25), având și două restricții non fuzzy.

$$\begin{aligned} 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3 &\underset{\approx}{\geq} z \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 &\underset{\approx}{\leq} 100 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\underset{\approx}{\leq} 70 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 &\underset{\approx}{\leq} 60 \\ X_1 &\geq 20 \\ X_2 &\geq 10 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (7.25)$$

Se rezolvă problema de programare liniară fuzzy (7.25) cu modelul (7.26).

$$\begin{aligned} 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3 - p_1 \cdot X_4 &\geq z - p_1 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + p_2 \cdot X_4 &\leq 100 + p_2 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + p_3 \cdot X_4 &\leq 70 + p_3 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + p_4 \cdot X_4 &\leq 60 + p_4 \\ X_1 &\geq 20 \\ X_2 &\geq 10 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4; \\ f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &= X_4 \\ \max f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) & \end{aligned} \quad (7.26)$$

unde: z - este nivelul aspirat (așteptat, cel puțin egal cu z) al funcției obiectiv ;

p_1 - violarea permisă a funcției obiectiv;

p_2 - violarea permisă a restricției (1) din relațiile (7.25);

p_3 - violarea permisă a restricției (2) din relațiile (7.25);

p_4 - violarea permisă a restricției (3) din relațiile (7.25).

Pentru: $z = 1900$; $p_1 = 100$; $p_2 = 20$; $p_3 = 10$; $p_4 = 15$, din (7.26) rezultă (7.27), se rezolvă cu programul Qsb.

$$\begin{aligned} 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3 - 100 \cdot X_4 &\geq 1800 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 20 \cdot X_4 &\leq 120 \\ 2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 10 \cdot X_4 &\leq 80 \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 15 \cdot X_4 &\leq 75 \\ X_1 &\geq 20 \\ X_2 &\geq 10 \\ X_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4; \\ f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &= X_4 \\ \max f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) & \end{aligned} \quad (7.27)$$

Soluția optimă: $X_1 = 20$, $X_2 = 10$, $X_3 = 16.66$, $X_4 = 0.33$, $\max f_1 = 0.33$

Valoarea funcției obiectiv a problemei de programare liniară inițială este:

$$f = 30 \cdot 20 + 40 \cdot 10 + 50 \cdot 16.66 = 1833 > z - 100 = 1900 - 100 = 1800$$

Se pot lua diverse valori pentru z , p_1 , p_2 , p_3 , p_4 .

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C6

MINIMIZAREA COSTURILOR PRIN PROBLEME DE TRANSPORT

4.1. PROBLEMA DE TRANSPORT DE MINIMIZARE

4.1.1. DEFINIREA PROBLEMEI DE TRANSPORT DE MINIMIZARE

Competitivitatea firmei este influențată de costuri, care trebuie să fie minime sau cât mai mici, inclusiv costurile de transport din activitățile de aprovizionare, de desfacere a produselor sau transport intern (logistica firmei).

Există m centre de aprovizionare (depozite) și n centre de consum. Un produs omogen este stocat în localitățile (depozitele) $A_1, A_2, \dots, A_m$ respectiv în cantitățile $a_1, a_2, \dots, a_m$ și trebuie transportat în centrele de consum (magazine, firme, localități) $B_1, B_2, \dots, B_n$ unde este cerut respectiv în cantitățile $b_1, b_2, \dots, b_n$. Costul transportului unei unități de produs din depozitul A_i la centrul de consum B_j este egal cu c_{ij} unități monetare. Se pune problema determinării cantităților de produs ce urmează să fie transportate de la depozite la centrele de consum, astfel încât să nu depășească disponibilul (oferta), cererea să fie satisfăcută și costul total al transportului să fie minim. Aceste elemente sunt sintetizate în tabelul nr.4.1.

Se presupune că: $a_i > 0$, $b_j > 0$, $c_{ij} > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;

Se notează cu X_{ij} cantitatea de produs ce va fi transportată din A_i în B_j ,

$$X = (X_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Schematic avem:

$$A_i, a_i \xrightarrow[c_{ij}]{X_{ij}} B_j, b_j$$

Modelul matematic al problemei de transport în forma generală este dat de relațiile (4.1), (4.2), (4.3), (4.4).

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, m; \quad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} \geq b_j, j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.2)$$

$$X_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.3)$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \quad (4.4)$$

$$\min f(X)$$

Inegalitățile (4.1) arată că totalul livrărilor fiecărui furnizor să se încadreze în disponibil (ofertă). Inegalitățile (4.2) arată că cererea fiecărui consumator trebuie să fie acoperită (satisfăcută) de totalul cantităților primite. Relațiile (4.4) reprezintă costul total al transportului. O condiție necesară și suficientă pentru existența unei soluții a problemei de transport neechilibrate din relațiile (4.1) – (4.4) este dată de relația (4.5), adică oferta este mai mare sau egală cu cererea.

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j \quad (4.5)$$

Problema de transport echilibrată

Se va presupune că **cererea este egală cu oferta**, deci problema de transport este **echilibrată**, relația (4.6) este satisfăcută. Problema de transport neechilibrată se va analiza după rezolvarea celei echilibrate.

$$\text{oferta} = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = \text{cererea} \quad (4.6)$$

Modelul matematic al problemei de transport în forma standard este dat de relațiile (4.7) care sunt echivalente cu (4.8) – (4.11).

Tabelul nr.4.1

A_i	B_j	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil (Oferta) a_i
A_1		c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2		c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...		...	...	...	...	...
A_m		c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Necesar (Cererea) b_j		b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i$ $\sum_{j=1}^n b_j$

Tabelul problemei de transport, tabelul nr.4.1, poate cuprinde în fiecare celulă (i, j), costul unitar c_{ij} care se scrie în celula (i, j) în partea stânga sus, sau variabila X_{ij} sau valoarea $\overline{X_{ij}}$ a variabilei X_{ij} scrise în partea dreapta jos a celulei (i, j).

c_{ij}
X_{ij}

Matricea costurilor problemei de transport este C,

$$C = (c_{ij}) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

Schema de obținere a modelului matematic.

$$A_1, a_1 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{X_{11}} B_1 \\ \xrightarrow{X_{12}} B_2 \\ \dots \\ \xrightarrow{X_{1n}} B_n \end{array} \right.$$

$$X_{11} + X_{12} + \dots + X_{1n} = a_1$$

$$A_2, a_2 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{X_{21}} B_1 \\ \xrightarrow{X_{22}} B_2 \\ \dots \\ \xrightarrow{X_{2n}} B_n \end{array} \right.$$

$$X_{21} + X_{22} + \dots + X_{2n} = a_2$$

...

$$A_m, a_m \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{X_{m1}} B_1 \\ \xrightarrow{X_{m2}} B_2 \\ \dots \\ \xrightarrow{X_{mn}} B_n \end{array} \right.$$

$$X_{m1} + X_{m2} + \dots + X_{mn} = a_m$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{X_{11}} \\ A_2 \xrightarrow{X_{21}} \\ \dots \\ A_m \xrightarrow{X_{m1}} \end{array} \right\} \longrightarrow B_1, b_1$$

$$X_{11} + X_{21} + \dots + X_{m1} = b_1$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{X_{12}} \\ A_2 \xrightarrow{X_{22}} \\ \dots \\ A_m \xrightarrow{X_{m2}} \end{array} \right\} \rightarrow B_2, b_2$$

$$X_{12} + X_{22} + \dots + X_{m2} = b_2$$

...

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{X_{1n}} \\ A_2 \xrightarrow{X_{2n}} \\ \dots \\ A_m \xrightarrow{X_{mn}} \end{array} \right\} \rightarrow B_n, b_n$$

$$X_{1n} + X_{2n} + \dots + X_{mn} = b_n$$

$$A_i, a_i \xrightarrow[c_{ij}]{X_{ij}} B_j, b_j$$

$$f(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{m,n}) = c_{11} \cdot X_{11} + c_{12} \cdot X_{12} + \dots + c_{mn} X_{mn} = \text{Costul total al transportului}$$

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + \dots + X_{1n} &= a_1 \\ X_{21} + X_{22} + \dots + X_{2n} &= a_2 \\ &\dots \\ X_{m1} + X_{m2} + \dots + X_{mn} &= a_m \\ X_{11} + X_{21} + \dots + X_{m1} &= b_1 \\ X_{12} + X_{22} + \dots + X_{m2} &= b_2 \\ &\dots \\ X_{1n} + X_{2n} + \dots + X_{mn} &= b_n \\ X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\ f(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{m,n}) &= c_{11} \cdot X_{11} + c_{12} \cdot X_{12} + \dots + c_{mn} X_{mn} \\ \min f(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{m,n}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

sau

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.9)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.10)$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \quad (4.11)$$

$$\min f(X)$$

unde: $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$, $X = (X_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;

Se presupune că:

$$\text{Oferta} = S = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = \text{Cererea},$$

Problema de transport poate fi neechilibrată, fiind posibile două situații:

1. oferta este mai mare decât cererea, deci:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

și în acest caz problema se echilibrează pentru rezolvare prin introducerea unui consumator fictiv B_{n+1} care are nevoie de cantitatea:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

și ale cărui costuri unitare sunt nule, $c_{i, n+1} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$;

2. cererea este mai mare decât oferta, deci:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

și în acest caz problema se echilibrează pentru rezolvare prin introducerea unui depozit (furnizor) fictiv A_{m+1} , al cărui disponibil este:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Problema de transport (4.8) – (4.11) este o problemă de programare liniară cu $m + n$ restricții și $m \cdot n$ variabile, dar numai $m + n - 1$ ecuații sunt liniar independente.

O soluție de bază nedegenerată a problemei de transport (4.8) – (4.11) este o soluție $X = (X_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; care verifică relațiile (4.8) – (4.10) și are $m + n - 1$ componente diferite de zero (pozitive), iar dacă are mai puțin de $m + n - 1$ componente diferite de zero (pozitive) X este soluție de bază degenerată.

Problema de transport se rezolvă în două etape, în etapa întâi se determină o soluție de bază (metoda colțului Nord-Vest, metoda costului minim pe linie, metoda costului minim pe coloană, metoda costului minim pe matricea costurilor), iar în etapa a doua se aplică algoritmul potențialelor. Problema de transport se poate rezolva pe calculator cu programele: Qsb, Dsspom, Lindo sau altele.

Observații

1. Degenerarea problemei de transport.

Problema de transport este o problemă de programare liniară, deci poate să aibă soluții degenerate și să apară fenomenul de degenerare care poate conduce la ciclare. O soluție de bază a problemei de transport în forma standard este nedegenerată dacă numărul componentelor sale

diferite de zero (pozitive) este egal cu $m + n - 1$ și este degenerată dacă are mai puțin de $m + n - 1$ componente nenule (pozitive). Degenerarea poate apare în timpul optimizării în momentul ciclului pentru determinarea valorii variabilei ce iese din bază, putând avea mai multe variabile cu valoarea egală. Degenerarea problemelor de transport poate avea ca și consecință apariția ciclării în algoritmul potențialelor. O posibilitate de evitare a ciclării constă în utilizarea metodei perturbării. Următoarea teoremă stabilește situațiile când apare degenerarea problemei de transport.

Teoremă

Problema de transport în forma standard (4.8) – (4.11) este degenerată dacă și numai dacă există mulțimile de indici A și B,

$$A \subset \{1, 2, \dots, m\}, B \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

astfel încât:

$$\sum_{i \in A} a_i = \sum_{j \in B} b_j$$

Se presupune că problema de transport (4.16) este degenerată.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n X_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^m X_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\ f(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \\ \min f(X) \end{aligned} \quad (4.16)$$

O posibilitate de evitare a ciclării constă în utilizarea metodei perturbării.

Metoda perturbării constă în înlocuirea valorilor a_i și b_j din (4.16) respectiv cu $\overline{a_i}$ și $\overline{b_j}$, $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$;

$$\overline{a_i} = a_i + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\overline{b_j} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\overline{b_n} = b_n + m \cdot \varepsilon,$$

unde $\varepsilon > 0$, ε este număr real pozitiv și mic,

$$0 < \varepsilon < \frac{10^{-p}}{2 \cdot m}$$

p - reprezintă ordinul de mărime al celei mai semnificative cifre a datelor a_i , $i = 1, 2, \dots, m$ ($p = 2$ pentru sute, $p = 3$ pentru mii etc.).

Se utilizează apoi algoritmul potențialelor pentru rezolvarea problemei de transport din relațiile (4.17).

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n X_{ij} &= \overline{a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
\sum_{i=1}^m X_{ij} &= \overline{b_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
f(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \\
\min f(X)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

După rezolvarea problemei (4.17), în soluția optimă obținută se pune $\varepsilon = 0$, rezultând soluția optimă a problemei de transport degenerate din relațiile (4.16).

2. Determinarea celei mai defavorabile soluții a problemei de transport.

Dacă se rezolvă problema de transport de minimizare (4.8) – (4.11), obținându-se soluția optimă

$$X^{\min} = (X_{ij}^{\min}), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

și valoarea minimă a funcției obiectiv este $f_{\min}$, apoi se consideră problema de transport (4.8) – (4.11), dar de maximizare cu aceleași date, dar se cere $\max f$, cea mai defavorabilă și nedorită, i se determină soluția optimă

$$X^{\max} = (X_{ij}^{\max}), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

cu valoarea maximă a funcției obiectiv $f_{\max}$, se obține intervalul de încadrare a costului total al transportului f . Rezultă:

$$f [f_{\min}, f_{\max}]$$

Evident că este preferabilă soluția optimă $f_{\min}$, dar în situația cea mai nefavorabilă costul total al transportului este $f_{\max}$.

Exemplul nr. 4.1.

Un produs se află în diverse cantități în depozitele A_1, A_2, A_3 și trebuie transportat în punctele de consum B_1, B_2, B_3, B_4 . Oferta, cererea și costurile unitare de transport sunt date în tabelul nr. 4. 2.

Tabelul nr.4. 2.

A_i B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3	2	1	1	140
A_2	2	1	3	1	180
A_3	1	2	3	1	80
Cererea b_j	90	110	115	85	$S = 400$

Ce cantitate trebuie transportată din fiecare depozit în fiecare punct de consum, astfel încât costul total al transportului să fie minim.

Se vor scrie ecuațiile problemei de transport de minimizare, se va determina o soluție de bază prin cele patru metode prezentate și soluția optimă. (Laborator)

Modelul matematic:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 140$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 180$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 80$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 90$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 110$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 115$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 85$$

$$X_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4;$$

$$f = 3.X_{11} + 2.X_{12} + 1.X_{13} + 1.X_{14} + 2.X_{21} + 1.X_{22} + 3.X_{23} + 1.X_{24} + 1.X_{31} + 2.X_{32} + 3.X_{33} + 1.X_{34}$$

$$\min f$$

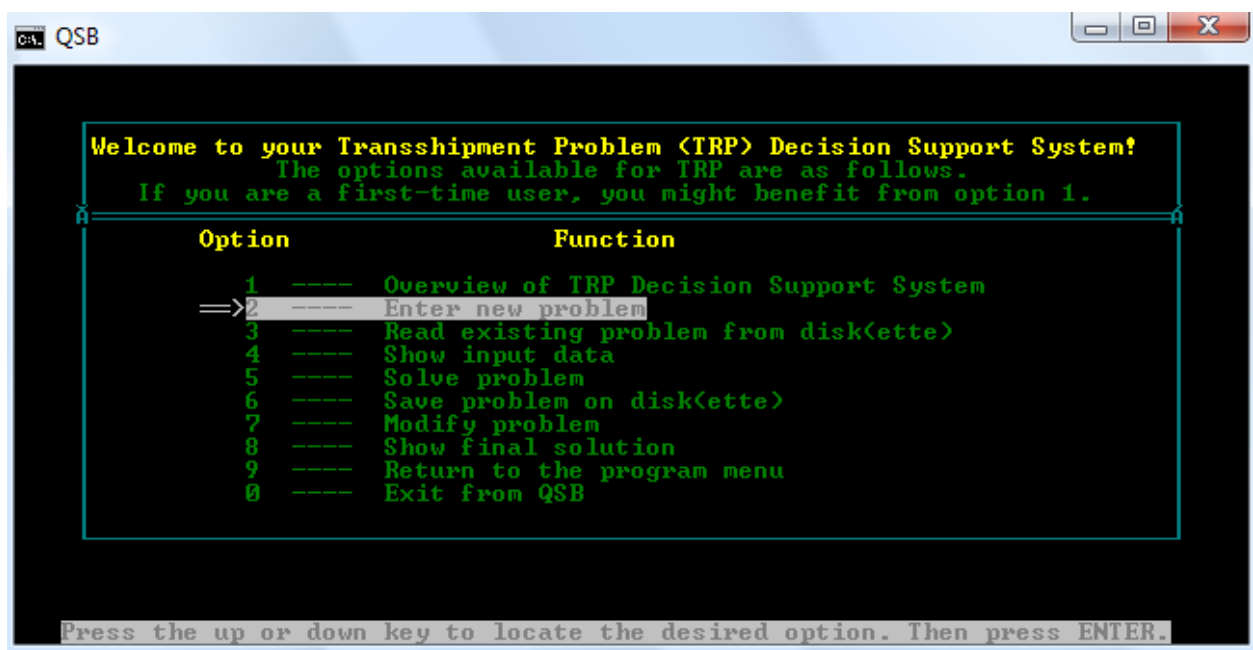
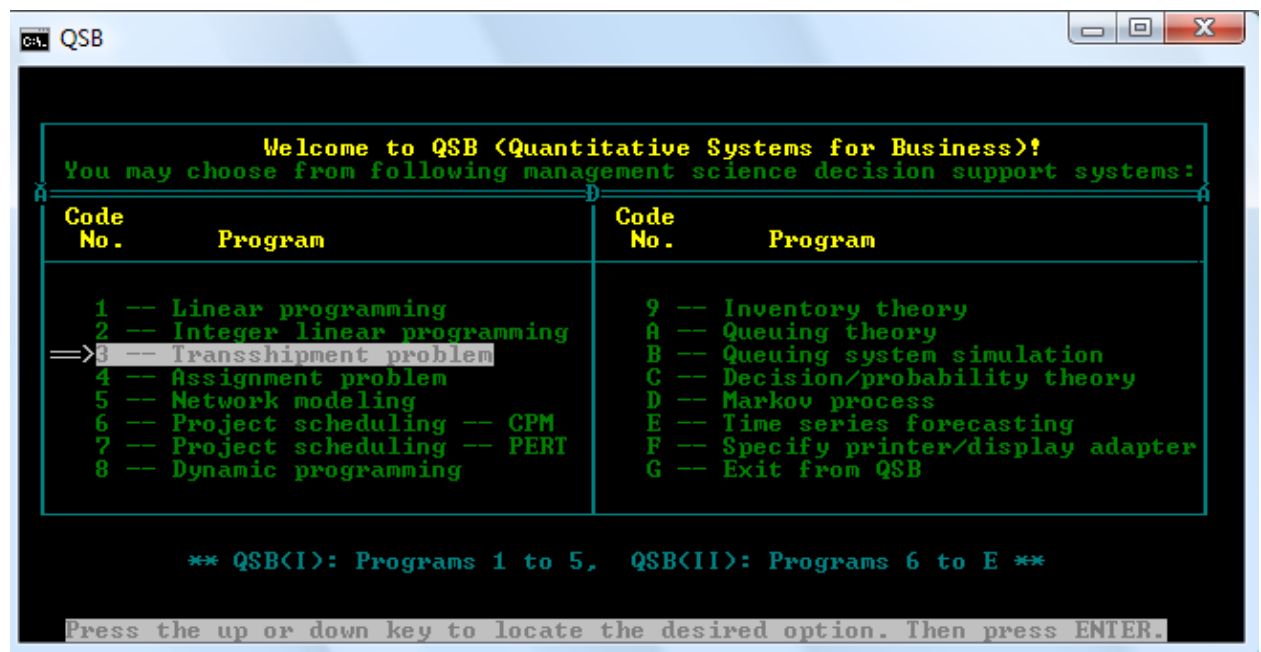
Se rezolvă cu programul QSB, rezultând soluția optimă din tabelul nr. 4.3.

Tabelul nr. 4.3

3 0	2 0	1 115	1 25
2 10	1 110	3 0	1 60
1 80	2 0	3 0	1 0

Valoarea funcției obiectiv f pentru soluția optimă va fi :

$$\min f = 1. 115 + 1. 25 + 2.10 + 1. 110 + 1. 60 + 1. 80 = 410 \text{ u. m.}$$



```

QSB

TRP Model Entry for pt1

Please observe the following conventions when entering a problem:

1. Respond to the questions which define the general format about the problem.
2. Then enter the names of each node unless using defaults.
3. Then enter the capacities and/or demands of each point. For a transship-
ment point, enter a positive/negative number for a net supply/demand.
4. Then enter the transportation costs or profits between nodes. A very
large positive/negative number or +M/-M could be entered to represent no
direct linkage <flow> between two nodes when the fixed format is used.
5. The BACKSPACE BAR can be used to move the cursor back to the position you
want to correct data; the Esc key can be pressed to go to the previous
page; and the / key to go to the next page when the fixed format is used.

Do you want to maximize <1> or minimize <2> criterion? <Enter 1 or 2> <2>
How many sources are there in your problem? <Enter number ~ 500> <3>
How many destinations are there in your problem? <Enter number ~ 500> <4>
How many transshipment points are there in your problem? <~ 500> <0>
Do you want to use the default names <S1...Sn,D1...Dn,T1...Tn><Y/N>? <y>
Press the SPACE BAR to continue if your entries are correct.

```

Se va determina cu programul Qsb soluția defavorabilă, considerând pentru problema de transport dată de tabelul nr.4. 2 obiectivul max f. Soluția problemei de transport de maximizare în acest caz este în tabelul nr. 4.4 și max f = 920 u. m.

```

QSB

TRP Model Entry for ptmax

Please observe the following conventions when entering a problem:

1. Respond to the questions which define the general format about the problem.
2. Then enter the names of each node unless using defaults.
3. Then enter the capacities and/or demands of each point. For a transship-
ment point, enter a positive/negative number for a net supply/demand.
4. Then enter the transportation costs or profits between nodes. A very
large positive/negative number or +M/-M could be entered to represent no
direct linkage <flow> between two nodes when the fixed format is used.
5. The BACKSPACE BAR can be used to move the cursor back to the position you
want to correct data; the Esc key can be pressed to go to the previous
page; and the / key to go to the next page when the fixed format is used.

Do you want to maximize <1> or minimize <2> criterion? <Enter 1 or 2> <1>
How many sources are there in your problem? <Enter number ~ 500> <3>
How many destinations are there in your problem? <Enter number ~ 500> <4>
How many transshipment points are there in your problem? <~ 500> <0>
Do you want to use the default names <S1...Sn,D1...Dn,T1...Tn><Y/N>? <y>
Press the SPACE BAR to continue if your entries are correct.

```

Tabelul nr. 4.4

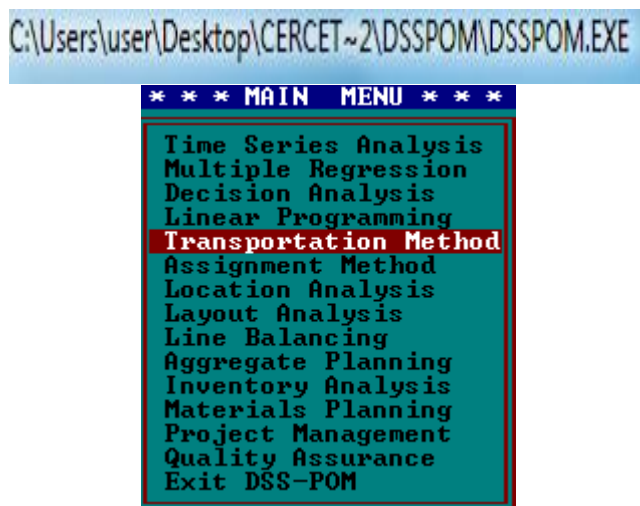
3	2	1	1
90	50	0	0
2	1	3	1
0	0	115	65
1	2	3	1
0	60	0	20

$$f \in [f_{\min}, f_{\max}]$$

Rezultă $f \in [410, 920]$

Evident că este preferabilă soluția optimă $f_{\min} = 410$ unități monetare, dar în situația cea mai nefavorabilă costul total al transportului este $f_{\max} = 920$ unități monetare (u.m.).

Se poate utiliza și programul DSSPOM pentru a determina min f .



4.1.2. REZOLVAREA PROBLEMEI DE TRANSPORT NEECHILIBRATE

4.1.2.1. CAZUL CEREREA < OFERTA

Se consideră problema de transport de minimizare dată în tabelul nr.4.5 , cu cererea mai mică decât oferta. Deci: $\sum_{j=1}^n b_j < \sum_{i=1}^m a_i$.

Tabelul nr.4.5

A_i	B_j	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil (Oferta) a_i
A_1		c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2		c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...		...	...	...	...	...
A_m		c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Necesar (Cererea) b_j		b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i$ $\sum_{j=1}^n b_j$

Problema de transport neechilibrată, cu cererea mai mică decât oferta, se echilibrează prin introducerea unui consumator fictiv B_{n+1} care ar avea nevoie de cantitatea de produs b_{n+1} din relația (4.18), iar costurile sale unitare de transport sunt zero.

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (4.18)$$

$$c_{i, n+1} = 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

Practic, la tabelul nr. 4.5 al problemei neechilibrate se mai adaugă o coloană pentru consumatorul fictiv, rezultând tabelul nr. 4.6.

Tabelul nr. 4.6.

A_i	B_j	B_1	B_2	...	B_n	B_{n+1}	Disponibil (Oferta) a_i
A_1		c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	0	a_1
A_2		c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	0	a_2
...		...	...	...	...	...	...
A_m		c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	0	a_m
Necesar (Cererea) b_j		b_1	b_2	...	b_n	b_{n+1}	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$

Se determină soluția optimă a problemei de transport modificată și echilibrată dată de tabelul nr. 4.6, iar soluția optimă a problemei de transport inițiale neechilibrate, cu cererea mai mică decât oferta, se obține renunțând la consumatorul fictiv B_{n+1} , adică se taie coloana sa din tabelul soluției optime.

Exemplul nr. 4.2. Cererea < Oferta

Se consideră problema de transport de minimizare dată în tabelul nr. 4.7, cu cererea mai mică decât oferta.

Tabelul nr.4.7

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1		2	1	3	2	150
A_2		1	2	3	1	150
A_3		3	2	1	2	200
Cererea b_j		90	75	95	140	500
						400

Pentru echilibrarea problemei de transport din tabelul nr.4.7 se introduce un consumator fictiv B_5 , rezultând tabelul nr. 4.8, care ar avea nevoie de cantitatea

$b_5 = 500 - 400 = 100$, iar costurile sale unitare de transport sunt zero, $c_{i5} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Tabelul nr.4.8

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Oferta a_i
A_1		2	1	3	2	0	150, 50, 0
		0	50	0	0	100	
A_2		1	2	3	1	0	150, 60, 0
		90	0	0	60	0	
A_3		3	2	1	2	0	200, 105, 80, 0
		0	25	95	80	0	
Cererea b_j		90	75	95	140	100	$S = 500$
		0	25	0	80	0	
			0		0		

Valoarea funcției obiectiv f pe soluția de bază din tabelul nr.4.8 este $f = 455$ u. m.

Se determină o soluție de bază prin metoda costului minim pe linie.

Variabilele de bază sunt: $VB = \{X_{12}, X_{15}, X_{21}, X_{24}, X_{32}, X_{33}, X_{34}\}$

$m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$, sunt șapte variabile pozitive, deci este soluție de bază nedegenerată.

Se rezolvă cu programul Qsb, rezultând soluția optimă din tabelul nr. 4.9.

(X_{optim}^1) Tabelul nr.4. 9.

2	1	3	2	0
0	75	0	0	75
1	2	3	1	0
90	0	0	60	0
3	2	1	2	0
0	0	95	80	25

Valoarea funcției obiectiv f pe soluția optimă este $f = 480$ u. m.

$\min f = 480$ u. m.

Se revine la problema de transport neechilibrată inițială prin renunțarea la ultima coloană corespunzătoare consumatorului fictiv B_5 în tabelul nr. 4.9, rezultând soluția optimă a problemei inițiale în tabelul nr.4. 10.

(X_{optim}^1) Tabelul nr.4.10

2	1	3	2
0	75	0	0
1	2	3	1
90	0	0	60
3	2	1	2
0	0	95	80

Deci, depozitul A_1 va vinde doar 75 unități de produs din 150 disponibile, depozitul A_2 va vinde tot ce poate oferi : 150 unități de produs, iar depozitul A_3 va vinde 175 unități de produs din 200 disponibile. $\min f = 480$ u.m.

4.1.2.2. CAZUL CEREREA > OFERTA

Se consideră problema de transport de minimizare dată în tabelul nr.4.11 , cu cererea mai mare decât oferta. Deci: $\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i$

Problema de transport neechilibrată, cu cererea mai mare decât oferta, se echilibrează prin introducerea unui depozit fictiv A_{m+1} care ar avea de oferit cantitatea de produs a_{m+1} din relația (4.19) , iar costurile sale unitare de transport sunt zero.

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \quad (4.19)$$

$$c_{m+1,j} = 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Tabelul nr.4.11

A_i	B_j	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil (Oferta) a_i
A_1		c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2		c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...		...	...	...	...	...
A_m		c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Necesar (Cererea) b_j		b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i$ $\sum_{j=1}^n b_j$

Practic, la tabelul nr. 4.11 al problemei neechilibrate, cu cererea mai mare decât oferta, se mai adaugă o linie pentru depozitul fictiv A_{m+1} ca în tabelul nr. 4.12.

Tabelul nr. 4.12

A_i	B_j	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil (Oferta) a_i
A_1		c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2		c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...		...	...	...	...	...
A_m		c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
A_{m+1}		0	0	...	0	a_{m+1}
Necesar (Cererea) b_j		b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Se determină soluția optimă a problemei de transport echilibrată dată de tabelul nr.4.12, iar soluția optimă a problemei de transport inițiale neechilibrate din tabelul nr.4.11 , cu cererea mai mare decât oferta, se obține renunțând la depozitul fictiv A_{m+1} , adică se taie linia sa din tabelul soluției optime.

Exemplul nr. 4.3. Cererea > Oferta

Se consideră problema de transport de minimizare dată în tabelul nr. 4.13 , cu cererea mai mare decât oferta.

Tabelul nr.4.13

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1		4	2	3	1	150
A_2		2	5	1	3	175
A_3		3	1	2	4	125
Cererea b_j		100	120	140	165	450 525

Pentru echilibrarea problemei de transport se introduce în tabelul nr.4.14 un depozit fictiv A_4 care ar avea oferta sa, cantitatea $a_4 = 525 - 450 = 75$, iar costurile sale unitare de transport sunt zero, $c_{4j} = 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Tabelul nr. 4.14

A_i B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	4 0	2 0	3 0	1 150	150, 0
A_2	2 35	5 0	1 140	3 0	175, 35, 0
A_3	3 5	1 120	2 0	4 0	125, 5, 0
A_4	0 60	0 0	0 0	0 15	75, 15, 0
Cererea b_j	100 65 60 0	120 0	140 0	165 15 0	525

Se determină o soluție de bază prin metoda costului minim pe linie.

Valoarea funcției obiectiv f pe soluția de bază este $f = 495$ u.m.

Variabilele de bază sunt: $VB = \{X_{14}, X_{21}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{41}, X_{44}\}$

$m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$, sunt șapte variabile pozitive, deci este soluție de bază nedegenerată.

Soluția din tabelul nr.4.14 este optimă, notată cu X^1_{optim} , $\min f = 495$ u. m.

Se revine la problema de transport neechilibrată inițială prin renunțarea la ultima linie corespunzătoare depozitului A_4 rezultând soluția optimă din tabelul nr. 4.15.

Tabelul nr.4.15

A_i B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	4 0	2 0	3 0	1 150	150
A_2	2 35	5 0	1 140	3 0	175
A_3	3 5	1 120	2 0	4 0	125
Cererea b_j	100	120	140	165	

$\min f = 495$ u. m.

Consumatorul B_1 primește 35 unități de produs, deși avea nevoie de 100; consumatorul B_2 primește 120 unități de produs, exact cât are nevoie; consumatorul B_3 primește 140 unități de produs, exact cât are nevoie; consumatorul B_4 primește 150 unități de produs, deși avea nevoie de 165.

4. 2. PROBLEMA DE TRANSPORT CU RUTE INTERZISE (BLOCATE)

Există situații practice în care anumite rute între furnizori și consumatori nu pot fi folosite la un moment dat, numindu-le rute interzise sau blocate, dar trebuie rezolvată problema de transport. Rezolvarea problemei de transport cu rute interzise (blocate) se face cu problema de transport de minimizare clasică, obișnuită, dar se modifică costurile unitare de transport ale rutelor interzise (blocate), atribuindu-le valori mai mari decât toate costurile c_{ij} pentru ca algoritmul să ocolească rutele interzise. De exemplu, dacă din depozitul A_k nu se poate transporta în punctul de consum B_r , se va atribui lui c_{kr} o valoare mare care verifică: $c_{kr} > c_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Variabila X_{kr} nu va fi de bază nici în soluția de bază inițială, nici pe parcursul iterațiilor algoritmului.

Observație

Dacă sunt verificate inegalitățile:

$$a_k > \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m a_i$$

$$b_r > \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n b_j$$

, atunci ruta A_k, B_r nu poate fi evitată oricât de mare ar fi valoarea c_{kr} atribuită costului unitar corespunzător. Trebuie căutat încă un furnizor sau consumator pentru rezolvarea problemei.

Exemplul nr. 4.4.

Se consideră problema de transport de minimizare dată în tabelul nr.4.7, pe care o reluăm în tabelul nr.4.16, considerând că ruta de la A_1 la B_3 este interzisă. Se va atribui un cost mai mare lui c_{13} decât toate costurile din tabel, de exemplu se pune $c_{13} = 99$ în tabelul nr. 4.17.

Tabelul nr.4.16

A_i B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3	2	1	1	140
A_2	2	1	3	1	180
A_3	1	2	3	1	80
Cererea b_j	90	110	115	85	$S = 400$

Tabelul nr.4. 17

A _i	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	Oferta a _i
B _j					
A ₁	3 0	2 55	99 0	1 85	140, 55, 0
A ₂	2 10	1 55	3 115	1 0	180, 125, 115, 0
A ₃	1 80	2 0	3 0	1 0	80, 0
Cererea b _j	90 10 0	110 55 0	115 0	85 0	S = 400

Se determină o soluție de bază în tabelul nr.4.17 prin metoda costului minim pe ansamblu matrice. Variabilele de bază sunt: $VB = \{X_{12}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}\}$, deci X_{13} nu este variabilă de bază. Valoarea funcției obiectiv f pe soluția de bază este $f = 695$ u.m. Se rezolvă problema de transport din tabelul nr.4.17 cu programul Qsb și rezultă că soluția de bază din tabelul nr. 4.17 este optimă.

Ruta din A_1 la B_3 este evitată, nu este folosită, $\min f = 695$ u. m.

Laboratorul nr. 6 – se vor rezolva cu programele Qsb și Dsspom exemplele din curs, eventual diverse modificări ale coeficienților problemelor respective sau prob

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C7

4. 3. PROBLEMA DE TRANSPORT DE MAXIMIZARE

Există probleme practice al căror model matematic este același cu al problemei de transport de minimizare, dar care cer maximizarea funcției obiectiv.

Dacă în problema de transport considerată în relațiile (4.8) – (4.11) se consideră ca și criteriu de optimizare criteriul de maximizare a funcției obiectiv f , se obține modelul matematic al problemei de transport de maximizare, dată de relațiile (4.20).

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
 x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij}$$

$$\max f(X)$$

unde: $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$, $X = (X_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;

Se presupune că problema de transport de maximizare (4.20) este echilibrată, este adevărată relația (4.21).

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (4.21)$$

Problema de transport de maximizare (4.20) se rezolvă asemănător cu problema de transport de minimizare, în două etape. În prima etapă se determină o soluție de bază a problemei (4.20) cu una din metodele:

- metoda colțului nord-vest, care este aceeași cu cea analizată la problema de transport de minimizare;
- metodele costului minim pe linie, pe coloană sau pe ansamblu matrice costuri, se înlocuiesc cu metodele profitului (venitului, costului) maxim pe linie, pe coloană sau pe ansamblu matrice a profitului (venitului, costurilor), deci se alege profitul (venitul, costul) maxim pe linie, pe coloană sau pe ansamblu matrice, pentru a determina variabila cu care se începe găsirea soluției de bază.

În etapa a doua se utilizează soluția de bază determinată în prima etapă, aplicând algoritmul potențialelor pentru problema de maximizare.

Observație.

Dacă se rezolvă problema de transport de maximizare (4.20), obținându-se soluția optimă

$$X^{\max} = (X_{ij}^{\max}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

și valoarea maximă a funcției obiectiv este $f_{\max}$, apoi considerăm problema de transport de minimizare obținută din relațiile (4.20), dar se cere $\min f$ și se determină soluția optimă (de minimizare, nedorită)

$$X^{\min} = (X_{ij}^{\min}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

cu valoarea minimă a funcției obiectiv $f_{\min}$, se obține intervalul de încadrare a profitului total f ,

$$f \in [f_{\min}, f_{\max}]$$

Evident că este preferabilă soluția optimă $f_{\max}$, dar în situația cea mai nefavorabilă profitul (venitul) total este $f_{\min}$.

Exemplul nr. 4.5.

În fabricile (secțiile, atelierele) F_1, F_2, F_3 se pot fabrica produsele din tipurile P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . În cele trei fabrici (secții, ateliere) condițiile de fabricație sunt diferite, deci cele cinci tipuri de produse se pot fabrica cu costuri de producție diferite, rezultând un profit diferit la fabricarea și vânzarea aceluiași tip de produs, conform tabelului nr. 4.23. Profitul unitar obținut prin fabricarea și vânzarea produsului P_j fabricat în fabrica (secția, atelierul) F_i este egal cu c_{ij} , $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Profitul unitar, oferta și cererea sunt date în tabelul nr. 4.23. Să se

determine cantitatea care trebuie să se fabrice din fiecare produs în fiecare fabrică (secție, atelier) astfel încât profitul să fie maxim.

Se determină soluția de bază prin metoda profitului maxim pe linie

Se notează cu X_{ij} cantitatea din produsul P_j ce se va fabrica în fabrica (secția, atelierul) F_i , $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Modelul matematic:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 175$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 225$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 200$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 130$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 90$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 120$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 180$$

$$X_{15} + X_{25} + X_{35} = 80$$

$$X_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$f = 2.X_{11} + 3.X_{12} + \dots + 4.X_{35}$$

$$\max f$$

Tabelul nr.4.23

$F_i \backslash P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Capacitatea maximă de producție (Oferta) a_i
F_1	2 0	3 0	1 0	4 175	3 0	175, 0
F_2	1 0	2 90	4 120	3 5	1 10	225, 105, 100, 10, 0
F_3	4 130	2 0	1 0	2 0	4 70	200, 70, 0
Cererea (Necesar) b_j	130 0	90 0	120 0	180 5 0	80 70 0	$S = 600$

Valoarea funcției obiectiv f pe soluția de bază determinată este $f = 2185$ u. m. Variabilele de bază sunt: $VB = \{X_{14}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{25}, X_{31}, X_{35}\}$

$m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$, sunt șapte variabile pozitive, deci este soluție de bază nedegenerată.

Tabelul nr.4.24

2 0	3 0	1 0	4 165	3 10
1 0	2 90	4 120	3 15	1 0
4 130	2 0	1 0	2 0	4 70

Valoarea lui f pe noua soluție de bază este: $f = 2195$ u. m.

$$VB = \{X_{14}, X_{15}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{31}, X_{35}\}$$

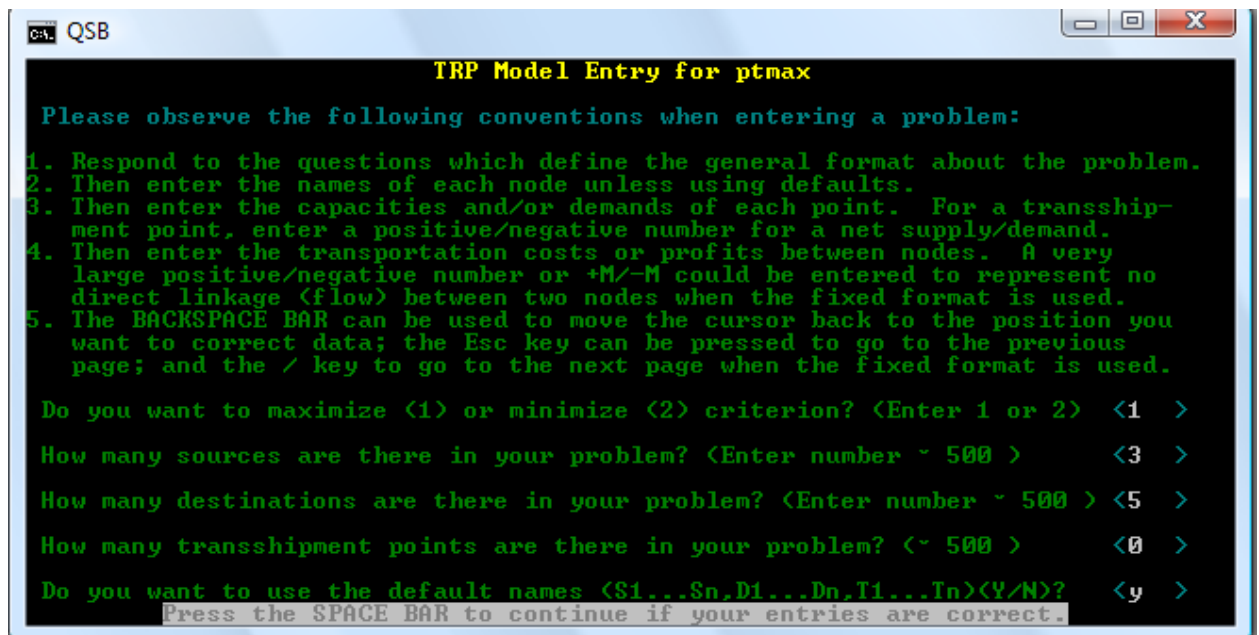
, s-a obținut soluția optimă în tabelul nr.4.24, $\max f = 2195$ u.m. ,

$Z_{12} = 0$, optim dublu, a doua soluție optimă se obține prin introducerea în bază a lui X_{12}

Tabelul nr.4.25

2 0	3 90	1 0	4 75	3 10
1 0	2 0	4 120	3 105	1 0
4 130	2 0	1 0	2 0	4 70

$\max f = 2195 \text{ u. m.}$



Dacă în problema de transport din tabelul nr. 4.23 se va considera $\min f$, se va determina soluția pesimă, cea mai defavorabilă și nedorită, cu cel mai mic profit în condițiile date, din tabelul nr. 4.26 și $\min f = 925 \text{ u. m.}$,

Tabelul nr.4.26

2 55	3 0	1 120	4 0	3 0
1 75	2 70	4 0	3 0	1 80
4 0	2 20	1 0	2 180	4 0

$\text{deci, } f \in [f_{\min}, f_{\max}]$

rezultă: $f \in [925, 2195]$,

evident că este dorită și preferată soluția optimă $\max f = 2195 \text{ u. m.}$

Pe calculatoare se pot utiliza pentru rezolvarea problemei de transport (echilibrată sau neechilibrată, de minimizare sau de maximizare) programele:

- Qsb, modulul Transshipment problem;
- Dsspom, modulul Transportation Method;
- Lindo sau alte programe.

4.4. PROBLEMA DE TRANSPORT CU CENTRE INTERMEDIARE

Un produs se află în m depozite inițiale $A_1, A_2, \dots, A_m$, respectiv în cantitățile $a_1, a_2, \dots, a_m$ și trebuie transportat în centrele intermediare $D_1, D_2, \dots, D_p$, care au capacitățile (cererea 1) respectiv egală cu $d_1, d_2, \dots, d_p$. Din depozitele intermediare produsul trebuie transportat pe piață în centrele de consum $B_1, B_2, \dots, B_n$, care au cererea (cererea 2) respectiv egală cu $b_1, b_2, \dots, b_n$. Costul unitar de transport din depozitul A_i în depozitul intermediar D_k este c_{ik} , iar costul transportului din depozitul intermediar D_k în centrul de consum B_j este q_{kj} . Datele problemei sunt sintetizate în tabelele nr.4.27 și nr. 4.28.

Tabelul nr. 4.27

A_i	D_k	D_1	D_2	$\dots$	D_p	Oferta 1 a_i
A_1		c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1p}	a_1
A_2		c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2p}	a_2
$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m		c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mp}	a_m
Cererea 1 d_k		d_1	d_2	$\dots$	d_p	$\sum_{i=1}^m a_i$ $\sum_{k=1}^p d_k$

Tabelul nr. 4.28

D_k	B_j	B_1	B_2	$\dots$	B_n	Oferta 2 d_k
D_1		q_{11}	q_{12}	$\dots$	q_{1p}	d_1
D_2		q_{21}	q_{22}	$\dots$	q_{2p}	d_2
$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
D_p		q_{p1}	q_{p2}	$\dots$	q_{pn}	d_p
Cererea 2 b_j		b_1	b_2	$\dots$	b_n	$\sum_{k=1}^p d_k$ $\sum_{j=1}^n b_j$

Se cere să se determine ce cantitate se transportă din depozitele inițiale A_i în depozitele intermediare D_k și din depozitele intermediare D_k la centrele de consum B_j , $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, n$, astfel încât costul total al transportului să fie minim.

Sunt verificate condițiile:

$$c_{ik} \geq 0, q_{kj} \geq 0, a_i \geq 0, d_k \geq 0, b_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n;$$

În prima etapă depozitele intermediare D_k reprezintă cererea, numită *cererea 1*, apoi acestea devin ofertă, numite *oferta 2* și centrele de consum B_j sunt *cererea 2*.

Se notează cu X_{ik} cantitatea ce se transportă din depozitul inițial A_i în depozitul intermediar D_k și cu Y_{kj} cantitatea ce se transportă din depozitul intermediar D_k la centrele de consum B_j , $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Schematic avem:

$$A_i, a_i \xrightarrow[X_{ik}]{} D_k, d_k \xrightarrow[Y_{kj}]{} B_j, b_j$$

Modelul matematic este dat de relațiile (4.22).

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p X_{ik} &= a_i, i = 1, 2, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^m X_{ik} &= d_k, k = 1, 2, \dots, p; \\ \sum_{j=1}^n Y_{kj} &= d_k, k = 1, 2, \dots, p; \\ \sum_{k=1}^p Y_{kj} &= b_j, j = 1, 2, \dots, n; \\ X_{ik} &\geq 0, Y_{kj} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n; \\ f &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p c_{ik} \cdot X_{ik} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p q_{kj} \cdot Y_{kj} \\ \min f \end{aligned} \quad (4.22)$$

Rezolvarea problemei (4.22) se reduce la rezolvarea a două probleme de transport de minimizare (4.23) și (4.24), acestea fiind independente .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p X_{ik} &= a_i, i = 1, 2, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^m X_{ik} &= d_k, k = 1, 2, \dots, p; \\ X_{ik} &\geq 0, i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p; \\ f_1 &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p c_{ik} \cdot X_{ik} \\ \min f_1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n Y_{kj} &= d_k, k = 1, 2, \dots, p; \\ \sum_{k=1}^p Y_{kj} &= b_j, j = 1, 2, \dots, n; \\ Y_{kj} &\geq 0, k = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n; \\ f_2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p q_{kj} \cdot Y_{kj} \\ \min f_2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Rezolvarea problemei de transport din relațiile (4.22) constă în determinarea soluției optime pentru problemele de transport (4.23) și (4.24).

Costul minimal problemei (4.22) va fi: $\min f = \min f_1 + \min f_2$

Pe calculator se pot utiliza pentru rezolvarea problemei de transport cu centre intermediare programele:

- Qsb - modulul Transshipment problem;

- Dsspom - modulul Transportation Method;
sau cu alte programe.

Exemplul nr. 4.6.

Un produs se află în $m = 4$ depozite A_1, A_2, A_3, A_4 , respectiv în cantitățile 100, 80, 190, 30 și trebuie transportat în $p = 2$ centre intermediare D_1, D_2 , care au capacitățile (cererea 1) respectiv egală cu 250 și 150. Din depozitele intermediare D_1, D_2 produsul trebuie transportat pe piață în $n = 5$ centre de consum B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 , care au cererea (cererea 2) respectiv egală cu 50, 80, 120, 60, 90. Costul unitar de transport din depozitul A_i în depozitul intermediar D_k este c_{ik} , iar costul transportului din depozitul intermediar D_k în centrul de consum B_j este q_{kj} . Costurile unitare de transport date de matricile C și Q , oferta 1, oferta 2, cererea 1 și cererea 2 sunt sintetizate în tabelele nr.4.29 și nr.4.30. Să se determine ce cantitate se transportă din depozitele inițiale A_i în depozitele intermediare D_k și din depozitele intermediare D_k la centrele de consum B_j , $i = 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$, astfel încât costul total al transportului să fie minim.

$$C = (c_{ik}), Q = (q_{kj}), i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Tabelul nr.4. 29

A_i	D_k	D_1	D_2	Oferta 1 a_i
A_1		5	7	100
A_2		8	6	80
A_3		9	4	190
A_4		10	5	30
Cererea 1 d_k		250	150	$S = 400$

Tabelul nr. 4.30

D_k	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Oferta 2 d_k
D_1		3	6	5	7	9	250
D_2		2	8	4	3	5	150
Cererea 2 b_j		50	80	120	60	90	$S = 400$

Schema transportului cu centre intermediare este:

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \xrightarrow[c_{ik}]{X_{ik}} D_1, D_2 \xrightarrow[q_{kj}]{Y_{kj}} B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$$

Modelul matematic al problemei de transport cu centre intermediare este în acest caz concret:

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{12} &= 100 \\ X_{21} + X_{22} &= 80 \\ X_{31} + X_{32} &= 190 \\ X_{41} + X_{42} &= 30 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} &= 250 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} &= 150 \\ Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15} &= 250 \\ Y_{21} + Y_{22} + Y_{23} + Y_{24} + Y_{25} &= 150 \\ Y_{11} + Y_{21} &= 50 \\ Y_{12} + Y_{22} &= 80 \end{aligned}$$

$$Y_{13} + Y_{23} = 120$$

$$Y_{14} + Y_{24} = 60$$

$$Y_{15} + Y_{25} = 90$$

$$X_{ik} \geq 0, Y_{kj} \geq 0, i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$f = f_1 + f_2$$

$$\min f$$

notațiile sunt:

$$f_1 = 5.X_{11} + 7.X_{12} + \dots + 5.X_{42}$$

$$f_2 = 3.Y_{11} + 6.Y_{12} + \dots + 5.Y_{25}$$

$$\min f = \min f_1 + \min f_2$$

Rezolvarea problemei de transport cu centre intermediare se reduce la două probleme de transport clasice de minimizare cu funcțiile obiectiv f_1 și f_2 .

$$X_{11} + X_{12} = 100$$

$$X_{21} + X_{22} = 80$$

$$X_{31} + X_{32} = 190$$

$$X_{41} + X_{42} = 30$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 250$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 150$$

$$X_{ik} \geq 0, i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2$$

$$f_1 = 5.X_{11} + 7.X_{12} + \dots + 5.X_{42}$$

$$\min f_1$$

$$Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15} = 250$$

$$Y_{21} + Y_{22} + Y_{23} + Y_{24} + Y_{25} = 150$$

$$Y_{11} + Y_{21} = 50$$

$$Y_{12} + Y_{22} = 80$$

$$Y_{13} + Y_{23} = 120$$

$$Y_{14} + Y_{24} = 60$$

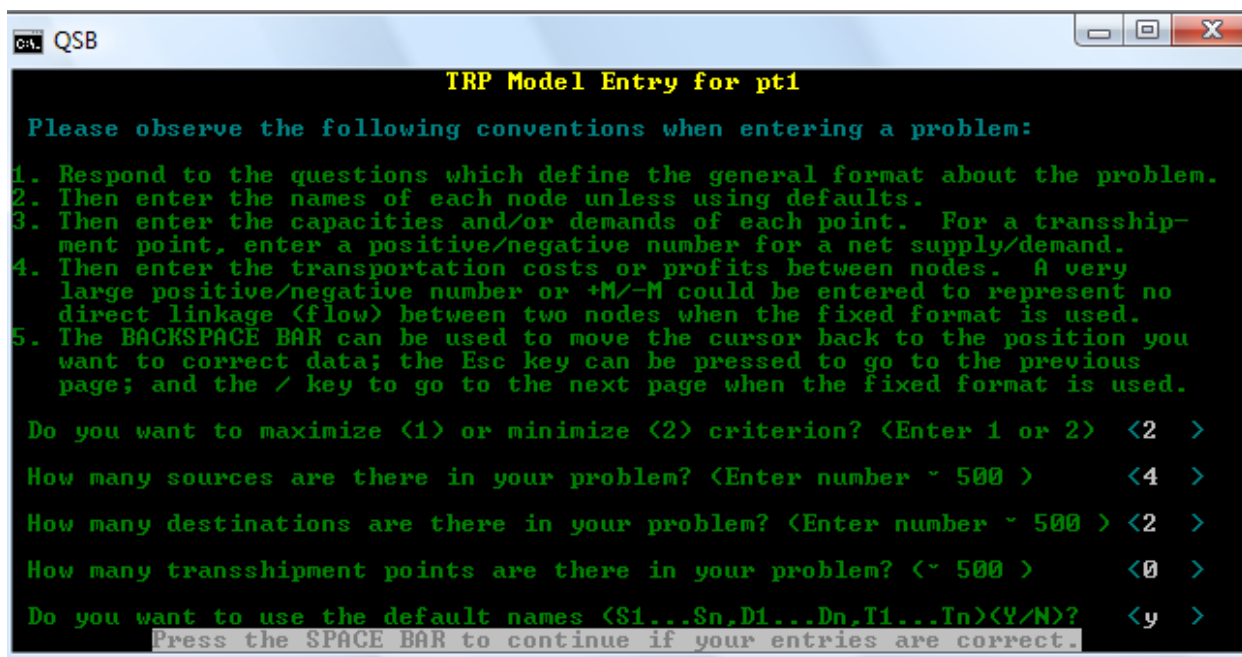
$$Y_{15} + Y_{25} = 90$$

$$Y_{kj} \geq 0, k = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$f_2 = 3.Y_{11} + 6.Y_{12} + \dots + 5.Y_{25}$$

$$\min f_2$$

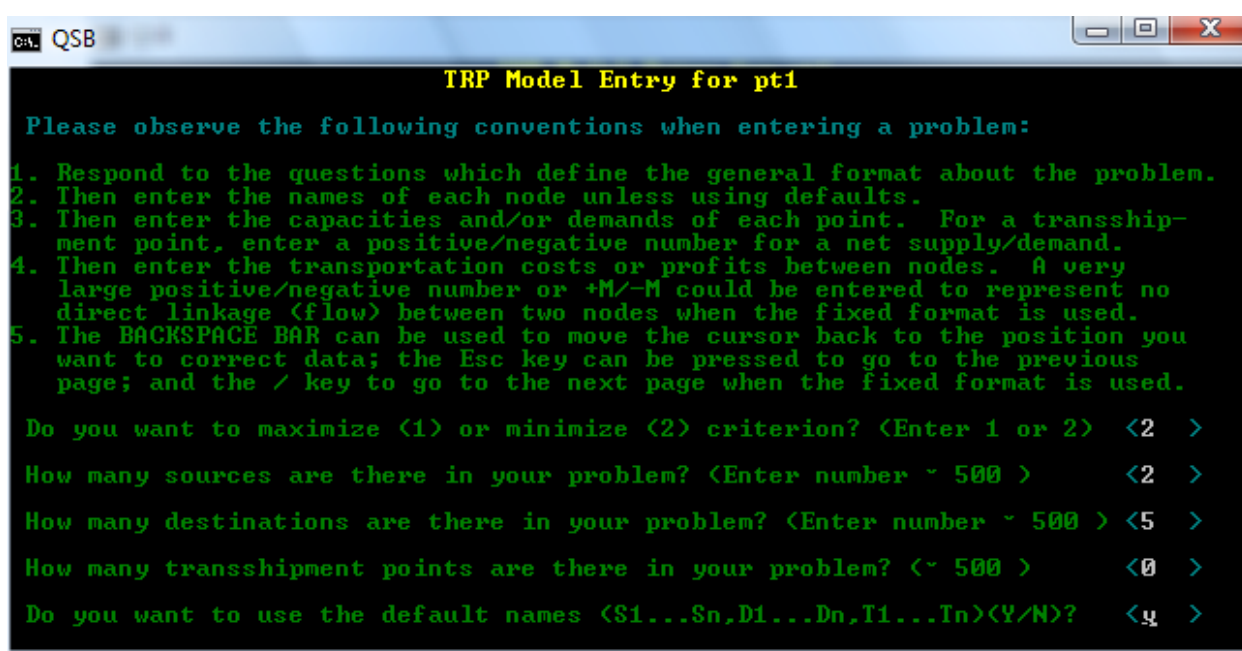
Se rezolvă cele două probleme de transport cu programul Qsb (modulul Transshipment problem) și se obțin soluțiile lor minime.



Tabelul nr.4.31

A_i	D_k	D_1	D_2	Oferta 1 a_i
A_1		5 100	7 0	100
A_2		8 80	6 0	80
A_3		9 40	4 150	190
A_4		10 30	5 0	30
Cererea 1 d_k	250		150	$S = 400$

$\min f_1 = 2400$ u. m.



Tabelul nr.4.32

D_k	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Oferta 2 d_k
D_1		3	6	5	7	9	250
		50	80	120	0	0	
D_2		2	8	4	3	5	150
		0	0	0	60	90	
Cererea 2 b_j		50	80	120	60	90	$S = 400$

$$\min f_2 = 1860 \text{ u. m.}$$

$$\min f = \min f_1 + \min f_2 = 2400 + 1860 = 4260 \text{ u. m.}$$

Se va determina și **soluția defavorabilă**, evident nedorită, prin rezolvarea problemei de transport cu centre intermediare de maximizare, deci aceleași restricții dar se cere $\max f$, care se reduce la două probleme de transport clasice de maximizare cu funcțiile obiectiv f_1 și f_2 . Se rezolvă cele două probleme de transport de maximizare cu programul Qsb (modulul Transshipment problem) și se obțin soluțiile lor maxime în tabelele nr. 4.31A și nr.4.32 A.

Tabelul nr.4.31,A

A_i	D_k	D_1	D_2	Oferta 1 a_i
A_1		5	7	100
		0	100	
A_2		8	6	80
		30	50	
A_3		9	4	190
		190	0	
A_4		10	5	30
		30	0	
Cererea 1 d_k		250	150	$S = 400$

$$\max f_1 = 3250 \text{ u. m.}$$

Tabelul nr.4.32 A

D_k	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Oferta 2 d_k
D_1		3	6	5	7	9	250
		0	0	100	60	90	
D_2		2	8	4	3	5	150
		50	80	20	0	0	
Cererea 2 b_j		50	80	120	60	90	$S = 400$

$$\max f_2 = 2550 \text{ u. m.}$$

$$\max f = \max f_1 + \max f_2 = 3250 + 2550 = 5800 \text{ u.m.}$$

$$\text{deci, } f \in [f_{\min}, f_{\max}]$$

rezultă:

$$f \in [4260, 5800],$$

evident că este dorită și preferată soluția optimă $\min f = 4260 \text{ u. m.}$

4. 5. PROBLEMA DE TRANSPORT TRIDIMENSIONALĂ

Problema de transport tridimensională constă în transportul din m depozite a p produse (materiale, materii prime) în n centre de consum (localități, magazine) și minimizarea costului total al transportului.

În m localități (depozite) $A_1, A_2, \dots, A_m$ se află p produse (materiale) $P_1, P_2, \dots, P_p$ în cantitățile a_{ik} , $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, p$; și se transportă în n centre de consum (localități, magazine) $B_1, B_2, \dots, B_n$ în cantitățile b_{jk} , $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p$. Deci, oferta în A_i este a_{ik} și cererea în B_j este b_{jk} , iar costul unitar de transport a unității de produs P_k din A_i în B_j este c_{ijk} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p$.

Se notează cu g_{ij} cantitatea maximă ce se poate transporta din A_i în B_j . Ce cantitate trebuie transportată din fiecare depozit și fiecare produs la fiecare punct de consum, astfel încât costul total al transportului să fie minim.

Pentru rezolvare, se notează cu X_{ijk} cantitatea din produsul P_k transportată din A_i în B_j . Modelul matematic este în relațiile (4.25a).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m X_{ijk} &= b_{jk}, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{j=1}^n X_{ijk} &= a_{ik}, i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{k=1}^p X_{ijk} &\leq g_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \\ X_{ijk} &\geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p \\ f(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p c_{ijk} \cdot X_{ijk} \\ \min f(X) \end{aligned} \quad (4.25a)$$

care este modelul problemei de transport tridimensională ce se rezolvă cu algoritmul de transport tridimensional.

Trebuie să fie îndeplinite condițiile (4.25b).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ik} &= \sum_{j=1}^n b_{jk}, k = 1, 2, \dots, p; \\ \sum_{k=1}^p a_{ik} &= \sum_{j=1}^n g_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^m g_{ij} &= \sum_{k=1}^p b_{jk}, j = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p a_{ik} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p b_{jk} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij} \end{aligned} \quad (4.25b)$$

O altă rezolvare a problemei date de relațiile (4.25) este prin transformarea problemei de transport tridimensională, deci cu trei indici, într-o problemă de programare liniară, în care variabilele vor avea un indice.

Cu aceste notații se obține o problemă de programare liniară cu $m \cdot n + m \cdot p + n \cdot p$ restricții și $m \cdot n \cdot p$ variabile, care se poate rezolva utilizând programele calculator Qsb, Dsspom, Lindo sau alte programe. O altă rezolvare a problemei de transport tridimensională se poate face prin programare liniară prin redenumirea variabilelor cu trei indici prin variabile cu un indice și apoi se utilizează un program pe calculator, de exemplu Qsb, modulul *linear programming*. Sunt posibile două variante de introducere a variabilelor.

De exemplu, se notează:

$$Y_1 = X_{111}, Y_2 = X_{112} \text{ etc.}$$

Sau a doua variantă.

Astfel, se poate nota (sau altfel):

$$X_{111} = X_{111}, X_{112} = X_{112} \text{ etc., iar la întrebarea programului Qsb:}$$

Do you want to use default variable names (X1, X2, ..., Xn) (Y/N)?

Se va răspunde N, apoi când apare mesajul:

Enter the variable names using ...

Se vor introduce numele variabilelor: $X_{111}, X_{112}, X_{113}$ etc.

Modelul matematic (4.25) se poate utiliza și în logistica întreprinderii, pentru minimizarea costurilor de transport (intern sau extern), considerând că se face aprovizionarea firmei din m depozite $A_1, A_2, \dots, A_m$, cu p tipuri de materii prime (materiale) $P_1, P_2, \dots, P_p$, pentru n secții, ateliere sau magazine $B_1, B_2, \dots, B_n$. Modelul (4.25) se poate utiliza și în minimizarea costurilor distribuției produselor firmei, considerând că în m ateliere $A_1, A_2, \dots, A_m$ se fabrică (sau în m magazine sunt depozitate) p produse $P_1, P_2, \dots, P_p$, care se vor vinde (distribui) pe piață în punctele (magazinele) $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Exemplul nr. 4.6.T3

În $m = 3$ localități (depozite) A_1, A_2, A_3 se află $p = 2$ produse (materiale) P_1, P_2 în cantitățile a_{ik} , $i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2$; și se transportă în $n = 4$ centre de consum (localități, magazine) B_1, B_2, B_3, B_4 în cantitățile b_{jk} , $j = 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 2$.

Deci, oferta este a_{ik} și cererea b_{jk} , iar costul unitar de transport a unității de produs P_k din A_i în B_j este c_{ijk} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p$; $m = 3$; $n = 4$; $p = 2$.

Se notează cu g_{ij} cantitatea maximă ce se poate transporta din A_i în B_j . Ce cantitate trebuie transportată din fiecare depozit și fiecare produs la fiecare punct de consum, astfel încât costul total al transportului să fie minim. Datele sunt în cele 3 tabele următoare.

Tabelul nr. 4.32 P1. Oferta a_{i1} , cererea b_{j1} și costurile de transport c_{ij1} pentru produsul P1

B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta produsului P1 a_{i1}
A_i					
A_1	3	6	1	2	100
A_2	2	4	3	1	180
A_3	1	2	3	5	150
Cererea produsului P1 b_{j1}	90	110	115	115	$S_1 = 410$ $S_2 = 430$

Tabelul nr. 4.32.P2. Oferta a_{i2} , cererea b_{j2} si costurile de transport c_{ij2} pentru produsul P2

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta produsului P2 a_{i2}
A_1		1	2	1	3	120
A_2		2	1	3	4	140
A_3		5	2	3	1	145
Cererea produsului P2 b_{j2}		90	125	115	75	$S = 405$

Tabelul nr. 4.32. g_{ij} . Valorile g_{ij}

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1					
A_1		60	35	80	45
A_2		80	90	80	70
A_3		40	110	70	75

Soluția 1. Modelul matematic este cu inegalitati pentru a se evita erorile de rotunjire.

$$X_{111} + X_{121} + X_{131} + X_{141} \geq 100$$

$$X_{211} + X_{221} + X_{231} + X_{241} \geq 180$$

$$X_{311} + X_{321} + X_{331} + X_{341} \geq 150$$

$$X_{112} + X_{122} + X_{132} + X_{142} \geq 120$$

$$X_{212} + X_{222} + X_{232} + X_{242} \geq 140$$

$$X_{312} + X_{322} + X_{332} + X_{342} \geq 145$$

$$X_{111} + X_{211} + X_{311} \leq 90$$

$$X_{121} + X_{221} + X_{321} \leq 110$$

$$X_{131} + X_{231} + X_{331} \leq 115$$

$$X_{141} + X_{241} + X_{341} \leq 115$$

$$X_{112} + X_{212} + X_{312} \leq 90$$

$$X_{122} + X_{222} + X_{322} \leq 125$$

$$X_{132} + X_{232} + X_{332} \leq 115$$

$$X_{142} + X_{242} + X_{342} \leq 75$$

$$X_{111} + X_{112} \leq \mathbf{60}$$

$$X_{121} + X_{122} \leq \mathbf{35}$$

$$X_{131} + X_{132} \leq \mathbf{80}$$

$$X_{141} + X_{142} \leq \mathbf{45}$$

$$X_{211} + X_{212} \leq \mathbf{80}$$

$$X_{221} + X_{222} \leq 90$$

$$X_{231} + X_{232} \leq 80$$

$$X_{241} + X_{242} \leq 70$$

$$X_{311} + X_{312} \leq 40$$

$$X_{321} + X_{322} \leq 110$$

$$X_{331} + X_{332} \leq 70$$

$$X_{341} + X_{342} \leq 75$$

$$X_{ijk} \geq 0, i=1,2, \dots, m; j=1,2, \dots, n; k=1, 2, \dots, p; m=3; n=4; p=2;$$

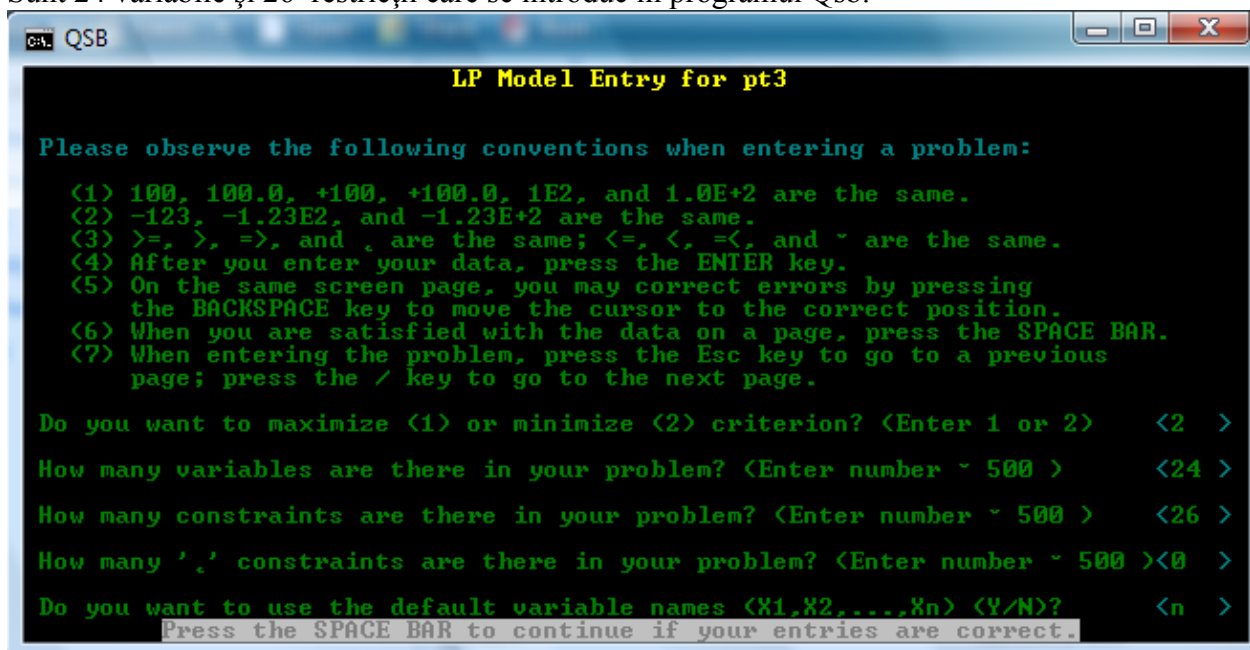
$$X_{ijk} \in \mathbb{Z}, i=1,2, \dots, m; j=1,2, \dots, n; k=1, 2, \dots, p; m=3; n=4; p=2;$$

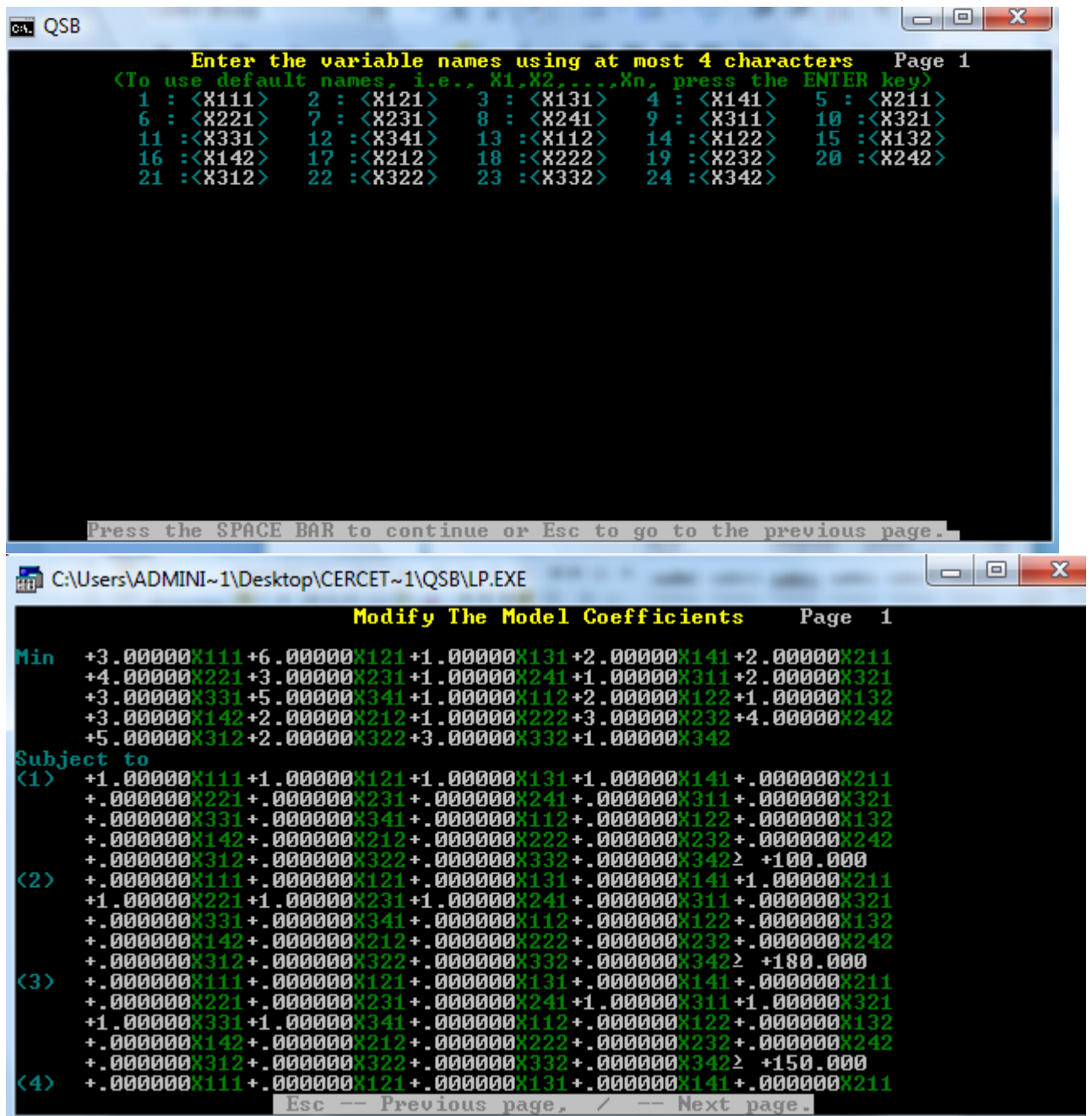
$$f = 3.X_{111} + 6.X_{121} + X_{131} + 2.X_{141} + 2.X_{211} + 4.X_{221} + 3.X_{231} + X_{241} + X_{311} + 2.X_{321} + 3.X_{331} + 5.X_{341} + X_{112} + 2.X_{122} + X_{132} + 3.X_{142} + 2.X_{212} + X_{222} + 3.X_{232} + 4.X_{242} + 5.X_{312} + 2.X_{322} + 3.X_{332} + X_{342}$$

Min f

Se rezolva cu programul Qsb, modulul *linear programming* (sau alt program),. Se poate rezolva și cu programul Qsb (sau alt program), modulul *integer linear programming*.

Sunt 24 variabile și 26 restricții care se introduc în programul Qsb.






```

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 2

(4) +.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+1.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342 ≥ +120.000
(5) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342 ≥ +140.000
(6) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+1.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342 ≥ +145.000
(7) +1.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342 ≤ +90.00000
(8) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+1.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
Esc -- Previous page, / -- Next page.

```

```

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 3

(8) +.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342 ≤ +110.000
(9) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+1.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342 ≤ +115.000
(10) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342 ≤ +115.000
(11) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+1.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342 ≤ +90.00000
(12) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342 ≤ +125.000
Esc -- Previous page, / -- Next page.

```

```

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 4

<13> 0.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +115.0000
<14> 0.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +75.0000
<15> 0.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +60.0000
<16> 0.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +35.0000
<17> 0.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
Esc -- Previous page, / -- Next page.

```

```

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 5

<17> 0.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +80.0000
<18> 0.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +45.0000
<19> 0.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +80.0000
<20> 0.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +90.0000
<21> 0.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
Esc -- Previous page, / -- Next page.

```

```

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 6

<21> +.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +80.0000
<22> +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +70.0000
<23> +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +40.0000
<24> +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +110.000
<25> +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +70.0000
<26> +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
Esc -- Previous page, / -- Next page.

```

```

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 7

<26> +.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +75.0000
Esc -- Previous page, / -- Next page.

```

Solutia optima:

Min f = 1405

X111 = 0 ; X121 = 0 ; X131 = 55 ; X141 = 45 ;
X211 = 50 ; X221 = 0 ; X231 = 60 ; X241 = 70 ;
X311 = 40 ; X321 = 110 ; X331 = 0 ; X341 = 0 ;

X112 = 60 ; X122 = 35 ; X132 = 25 ; X142 = 0 ;
X212 = 30 ; X222 = 90 ; X232 = 20 ; X242 = 0 ;
X312 = 0 ; X322 = 0 ; X332 = 70 ; X342 = 75 .

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE

Summarized Results for pt3c						Page : 1
Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	
1 X111	0	+2.00000000	16 X142	0	+2.00000000	
2 X121	0	+4.00000000	17 X212	+30.0000000	0	
3 X131	+55.0000000	0	18 X222	+90.0000000	0	
4 X141	+45.0000000	0	19 X232	+19.9999998	0	
5 X211	+50.0000000	0	20 X242	0	+4.00000000	
6 X221	0	+3.00000000	21 X312	0	+4.00000000	
7 X231	+59.9999996	0	22 X322	0	0	
8 X241	+70.0000000	0	23 X332	+70.0000000	0	
9 X311	+40.0000000	0	24 X342	+75.0000000	0	
10 X321	+110.000000	0	25 S1	0	+3.00000000	
11 X331	0	0	26 A1	0	-3.00000000	
12 X341	0	+3.00000000	27 S2	0	+3.00000000	
13 X112	+60.0000000	0	28 A2	0	-3.00000000	
14 X122	+35.0000000	0	29 S3	0	+3.00000000	
15 X132	+25.0000000	0	30 A3	0	-3.00000000	
Minimum value of the OBJ = 1405 ITERS. = 19						
Press any key to continue.						

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE

Summarized Results for pt3c						Page : 2
Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	
31 S4	0	+3.00000000	44 S14	0	+2.00000000	
32 A4	0	-3.00000000	45 S15	0	+1.00000000	
33 S5	0	+3.00000000	46 S16	+.000000156	0	
34 A5	0	-3.00000000	47 S17	0	+2.00000000	
35 S6	0	+3.00000000	48 S18	+.000000171	0	
36 A6	0	-3.00000000	49 S19	0	0	
37 S7	0	+1.00000000	50 S20	0	+1.00000000	
38 S8	0	+1.00000000	51 S21	+.000000477	0	
39 S9	+.000000134	0	52 S22	0	+1.00000000	
40 S10	0	+1.00000000	53 S23	0	+1.00000000	
41 S11	0	+1.00000000	54 S24	+2.980E-07	0	
42 S12	0	+1.00000000	55 S25	+.000000246	0	
43 S13	+.000000246	0	56 S26	0	0	
Minimum value of the OBJ = 1405 ITERS. = 19						
Press any key to continue.						

Solutia defavorabila

Sunt aceleasi ecuatii sau inegalitati, dar se cere max $f = 2490$

Evident, se doreste $\min f = 1405$

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE

Summarized Results for PT3MAX						Page : 1
Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	
1 X111	+35.0000004	0	16 X142	+30.0000000	0	
2 X121	+24.9999998	0	17 X212	+50.0000000	0	
3 X131	0	+1.00000000	18 X222	+9.99999962	0	
4 X141	+40.0000000	0	19 X232	+35.0000000	0	
5 X211	+54.9999996	0	20 X242	+45.0000000	0	
6 X221	+80.0000000	0	21 X312	+40.0000000	0	
7 X231	+45.0000000	0	22 X322	+105.0000000	0	
8 X241	0	+1.00000000	23 X332	0	+3.00000000	
9 X311	0	+1.00000000	24 X342	0	+9.00000000	
10 X321	+4.99999976	0	25 S1	+.000000134	0	
11 X331	+70.0000000	0	26 A1	0	0	
12 X341	+75.0000000	0	27 S2	0	+1.00000000	
13 X112	0	+1.00000000	28 A2	0	-1.00000000	
14 X122	+10.0000002	0	29 S3	0	+3.00000000	
15 X132	+80.0000000	0	30 A3	0	-3.00000000	
Maximum value of the OBJ = 2490 ITERS. = 32						
Press any key to continue.						

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE

Summarized Results for PT3MAX						Page : 2
Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	
31 S4	0	+1.00000000	44 S14	0	+4.00000000	
32 A4	0	-1.00000000	45 S15	+24.9999996	0	
33 S5	0	+1.00000000	46 S16	0	+1.00000000	
34 A5	0	-1.00000000	47 S17	+.000000343	0	
35 S6	+.000000246	0	48 S18	+10.0000002	0	
36 A6	0	0	49 S19	+25.0000002	0	
37 S7	0	+3.00000000	50 S20	+.000000156	0	
38 S8	0	+5.00000000	51 S21	0	+2.00000000	
39 S9	0	+2.00000000	52 S22	0	+1.00000000	
40 S10	0	+2.00000000	53 S23	0	+2.00000000	
41 S11	0	+3.00000000	54 S24	+2.980E-07	0	
42 S12	0	+2.00000000	55 S25	0	+4.00000000	
43 S13	0	+2.00000000	56 S26	0	+6.00000000	
Maximum value of the OBJ = 2490 ITERS. = 32						
Press any key to continue.						

$$f \in [1405, 2490]$$

Solutia defavorabila

Max f = 2490

X111 = 35 ; X121 = 25 ; X131 = 0 ; X141 = 40 ;
 X211 = 55 ; X221 = 80 ; X231 = 45 ; X241 = 0 ;
 X311 = 0 ; X321 = 5 ; X331 = 70 ; X341 = 75 ;

X112 = 0 ; X122 = 10 ; X132 = 80 ; X142 = 30 ;
 X212 = 50 ; X222 = 10 ; X232 = 35 ; X242 = 45 ;
 X312 = 40 ; X322 = 105 ; X332 = 0 ; X342 = 0 .

4.6. PROBLEMA DE TRANSPORT TRIDIMENSIONALĂ MULTIIOBIECTIV

Se poate da o generalizare în problema de transport tridimensională din paragraful 4.5 considerând mai multe funcții obiectiv

Problema de transport tridimensională multiobiectiv constă în transportul din m depozite a p produse (materiale, materii prime) în n centre de consum (n magazine) și optimizarea mai multor funcții obiectiv.

În m depozite $A_1, A_2, \dots, A_m$ se află p produse (materiale) $P_1, P_2, \dots, P_p$ în cantitățile a_{ik} , $i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, p$; și se transportă în n centre de consum (magazii) $B_1, B_2, \dots, B_n$ în cantitățile b_{jk} , $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p$.

Deci, oferta este a_{ik} și cererea b_{jk} , iar costul unitar de transport a unității de produs P_k din A_i în B_j este c_{ijk} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p$.

Se vor considera trei funcții obiectiv care trebuie optimizate:

- funcția f_1 care reprezintă costul total al transportului, care se va minimiza;
- funcția f_2 - timpul total de transport, care se va minimiza;
- funcția f_3 - cantitatea de produse care se transportă, care se va maximiza.

Se notează cu:

- X_{ijk} cantitatea din produsul P_k transportată din A_i în B_j ;
- t_{ij} timpul total de transport din A_i în B_j ;
- g_{ij} cantitatea maximă ce se poate transporta din A_i în B_j ;
- α_{ijk} factor de transformare a produselor pentru a se putea aduna;
- $X = (X_{ijk})$;

unde $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p$.

Modelul matematic corespunzător este dat de relațiile (4.27).

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m X_{ijk} &= b_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; \\
 \sum_{j=1}^n X_{ijk} &= a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p; \\
 \sum_{k=1}^p X_{ijk} &\leq g_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
 X_{ijk} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; \\
 f_1(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p c_{ijk} \cdot X_{ijk} \\
 f_2(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p t_{ij} \cdot X_{ijk} \\
 f_3(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \alpha_{ijk} \cdot X_{ijk} \\
 \min f_1(X) \\
 \min f_2(X) \\
 \max f_3(X)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Trebuie să fie îndeplinite condițiile (4.28).

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m a_{ik} &= \sum_{j=1}^n b_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, p; \\
\sum_{k=1}^p a_{ik} &= \sum_{j=1}^n g_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
\sum_{i=1}^m g_{ij} &= \sum_{k=1}^p b_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p a_{ik} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p b_{jk} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Rezolvarea se poate face prin maximizarea utilității globale.

4.8. REZOLVAREA PROBLEMEI DE TRANSPORT TRIDIMENSIONALĂ MULTI-OBIECTIV PRIN METODA MAXIMIZĂRII UTILITĂȚII GLOBALE

Se consideră modelul matematic al problemei de transport tridimensională multiobiectiv din relațiile (4.37).

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m X_{ijk} &= b_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; \\
\sum_{j=1}^n X_{ijk} &= a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p; \\
\sum_{k=1}^p X_{ijk} &\leq g_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
X_{ijk} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; \\
f_1(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p c_{ijk} \cdot X_{ijk} \\
f_2(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p t_{ij} \cdot X_{ijk} \\
f_3(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \alpha_{ijk} \cdot X_{ijk} \\
\min f_1(X) \\
\min f_2(X) \\
\max f_3(X)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

unde:

X_{ijk} este cantitatea din produsul P_k transportată din A_i în B_j ;
 $X = (X_{ijk})$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, p$.

Etapa 1.

Pentru fiecare funcție obiectiv $f_k(X)$ se determină soluția optimă a problemei de transport cu o funcție obiectiv, $k = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m X_{ijk} &= b_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; \\
\sum_{j=1}^n X_{ijk} &= a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p;
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^p X_{ijk} \leq g_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.38)$$

$$X_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p;$$

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p c_{ijk} \cdot X_{ijk}$$

$$\min f_1(X)$$

cu soluția optimă X^{*1} ;

$$\sum_{i=1}^m X_{ijk} = b_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p;$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ijk} = a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p;$$

$$\sum_{k=1}^p X_{ijk} \leq g_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.39)$$

$$X_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p;$$

$$f_2(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p t_{ij} \cdot X_{ijk}$$

$$\min f_2(X)$$

cu soluția optimă X^{*2} ;

$$\sum_{i=1}^m X_{ijk} = b_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p;$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ijk} = a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p;$$

$$\sum_{k=1}^p X_{ijk} \leq g_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.40)$$

$$X_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p;$$

$$f_3(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \alpha_{ijk} \cdot X_{ijk}$$

$$\max f_3(X)$$

cu soluția optimă X^{*3} .

Pentru fiecare funcție obiectiv $f_k(X)$ se determină soluția pesimă (nonoptimă, opusă valorii optime, cea mai defavorabilă) X^{-k} a problemei de transport cu o funcție obiectiv, $k = 1, 2, 3$.

$$\sum_{i=1}^m X_{ijk} = b_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p;$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ijk} = a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p;$$

$$\sum_{k=1}^p X_{ijk} \leq g_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.41)$$

$$X_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p;$$

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p c_{ijk} \cdot X_{ijk}$$

$$\max f_1(X)$$

cu soluția pesimă X^{-1} ;

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m X_{ijk} &= b_{jk} \quad , j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; \\
\sum_{j=1}^n X_{ijk} &= a_{ik} \quad , i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p; \\
\sum_{k=1}^p X_{ijk} &\leq g_{ij} \quad , i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
\mathbf{X}_{ijk} &\geq \mathbf{0} \quad , i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; \\
\mathbf{f}_2(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p t_{ij} \cdot X_{ijk} \\
\max \mathbf{f}_2(\mathbf{X})
\end{aligned} \tag{4.42}$$

cu soluția pesimă $\mathbf{X}^{-2}$;

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m X_{ijk} &= b_{jk} \quad , j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; \\
\sum_{j=1}^n X_{ijk} &= a_{ik} \quad , i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p; \\
\sum_{k=1}^p X_{ijk} &\leq g_{ij} \quad , i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
\mathbf{X}_{ijk} &\geq \mathbf{0} \quad , i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; \\
\mathbf{f}_3(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \alpha_{ijk} \cdot X_{ijk} \\
\min \mathbf{f}_3(\mathbf{X})
\end{aligned} \tag{4.43}$$

cu soluția pesimă $\mathbf{X}^{-3}$.

Se notează:

$$O_k = \text{Optimum } f_k(\mathbf{X}) = f_k(\mathbf{X}^{*k})$$

$$P_k = \text{Pesim } f_k(\mathbf{X}) = f_k(\mathbf{X}^{-k})$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Deci:

$$O_1 = \min f_1(\mathbf{X}) = f_1(\mathbf{X}^{*1})$$

$$O_2 = \min f_2(\mathbf{X}) = f_2(\mathbf{X}^{*2})$$

$$O_3 = \max f_3(\mathbf{X}) = f_3(\mathbf{X}^{*3})$$

$$P_1 = \max f_1(\mathbf{X}) = f_1(\mathbf{X}^{-1})$$

$$P_2 = \max f_2(\mathbf{X}) = f_2(\mathbf{X}^{-2})$$

$$P_3 = \min f_3(\mathbf{X}) = f_3(\mathbf{X}^{-3})$$

Etapa 2.

Pentru valorile optime și pesime ale funcțiilor obiectiv se dau utilitățile acestor valori de către decident în tabelul nr. 4.43.

Valoarea optimă O_k are utilitatea U_k , $k = 1, 2, 3$.

Valoarea pesimă P_k are utilitatea U_{3+k} , $k = 1, 2, 3$.

Tabelul nr. 4.43 Utilitățile valorilor optime și pesime

O_k / P_k	O_1	O_2	O_3	P_1	P_2	P_3
U_k	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6

Dacă o situație este mai convenabilă, utilitatea sa va fi mai mare și

$$U_k > U_{3+k}, k = 1, 2, 3;$$

deoarece valoarea optimă O_k este preferată valorii pesime P_k , $k = 1, 2, 3$.

Etapa 3.

Se transformă funcțiile obiectiv $f_1(X)$, $f_2(X)$, $f_3(X)$ în funcții utilitate $F_1(X)$, $F_2(X)$, $F_3(X)$, astfel:

$$F_k(X) = \alpha_k \cdot f_k(X) + \beta_k,$$

se face:

Se obțin și se rezolvă trei sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute α_k și β_k , $k = 1, 2, 3$.

$$\alpha_k \cdot O_k + \beta_k = U_k$$

$$\alpha_k \cdot P_k + \beta_k = U_{3+k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Se obțin α_k și β_k :

$$\alpha_k = \frac{U_k - U_{3+k}}{O_k - P_k}$$

$$\beta_k = \frac{U_{3+k} \cdot O_k - U_k \cdot P_k}{O_k - P_k}$$

Se calculează $F_k(X)$

$$F_k(X) = \alpha_k \cdot f_k(X) + \beta_k = \frac{U_k - U_{3+k}}{O_k - P_k} \cdot f_k(X) + \frac{U_{3+k} \cdot O_k - U_k \cdot P_k}{O_k - P_k}$$

$k = 1, 2, 3$.

Etapă 4.

Se construiește funcția obiectiv sinteză $F(X)$,

$$F(X) = F_1(X) + F_2(X) + F_3(X) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{U_k - U_{3+k}}{O_k - P_k} \cdot f_k(X) + \frac{U_{3+k} \cdot O_k - U_k \cdot P_k}{O_k - P_k} \right) = \dots$$

Se rezolvă problema de transport tridimensională monoobiectiv:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m X_{ijk} &= b_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; \\ \sum_{j=1}^n X_{ijk} &= a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p; \\ \sum_{k=1}^p X_{ijk} &\leq g_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\ X_{ijk} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} F(X) &= \left(\frac{U_1 - U_4}{O_1 - P_1} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p c_{ijk} \cdot X_{ijk} + \frac{U_4 \cdot O_1 - U_1 \cdot P_1}{O_1 - P_1} \right) + \left(\frac{U_2 - U_5}{O_2 - P_2} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p t_{ij} \cdot X_{ijk} + \right. \\ &+ \left. \frac{U_5 \cdot O_2 - U_2 \cdot P_2}{O_2 - P_2} \right) + \left(\frac{U_3 - U_6}{O_3 - P_3} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \alpha_{ijk} \cdot X_{ijk} + \frac{U_6 \cdot O_3 - U_3 \cdot P_3}{O_3 - P_3} \right) \end{aligned}$$

Max $F(X)$

Se obține soluția optimă de maximă utilitate $X^* = (X^*_{ijk})$.

Se calculează cele trei funcții obiectiv în soluția optimă obținută X^* : $f_1(X^*)$, $f_2(X^*)$, $f_3(X^*)$.

Observație.

Funcția obiectiv sinteză $F(X)$ poate fi obținută și altfel:

$$F(X) = k_1 \cdot F_1(X) + k_2 \cdot F_2(X) + k_3 \cdot F_3(X) = \dots$$

k_1, k_2, k_3 sunt coeficienți de importanță ale funcțiilor obiectiv f_i , $k_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Se pot alege coeficienții de importanță k_1, k_2, k_3 astfel încât:

$$\begin{aligned} k_i &> 0, i = 1, 2, 3; \\ k_1 + k_2 + k_3 &= 1. \end{aligned}$$

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C8

4. 7. PROBLEMA DE TRANSPORT CU CAPACITĂȚI LIMITATE

4. 7. 1. PROBLEMA DE TRANSPORT CU CAPACITĂȚI LIMITATE MONOOBIECTIV

Există probleme de transport cu limitări ale capacităților de transport pe anumite rute. Un produs omogen este stocat în depozitele (localitățile) $A_1, A_2, \dots, A_m$ respectiv în cantitățile $a_1, a_2, \dots, a_m$ și trebuie transportat în centrele de consum (magazine, firme, localități) $B_1, B_2, \dots, B_n$ unde este cerut respectiv în cantitățile $b_1, b_2, \dots, b_n$. Costul transportului unei unități de produs din depozitul A_i la centrul de consum B_j este egal cu c_{ij} unități monetare, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Capacitatea maximă de transport din depozitul A_i în centrul de consum B_j este egală cu d_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Se pune problema determinării cantităților de produs ce urmează să fie transportate de la depozite la centrele de consum, astfel încât să nu depășească disponibilul (oferta), cererea să fie satisfăcută, capacitatea rutei să nu fie depășită și costul total al transportului să fie minim.

Se presupune că:

$$a_i \geq 0, b_j \geq 0, c_{ij} > 0, d_{ij} > 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m d_{ij} &\geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n d_{ij} &\geq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \end{aligned}$$

Se va presupune că cererea este egală cu oferta, deci problema de transport cu capacități limitate este echilibrată:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Se notează cu X_{ij} cantitatea de produs ce va fi transportată din A_i în B_j ,

$$X = (X_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Schematic transportul va fi reprezentat astfel:

$$A_i, a_i \xrightarrow[c_{ij}, d_{ij}]{X_{ij}} B_j, b_j$$

Modelul matematic al problemei de transport cu capacități limitate este în relațiile (4. 45).

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n X_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
\sum_{i=1}^m X_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
0 &\leq X_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
f(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \\
\min f(X)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Problema de transport cu capacități limitate se poate pune într-un tabel de transport ca la problema de transport de minimizare clasică, dar în aceeași celulă (i, j) a tabelului se pun c_{ij} , d_{ij} , X_{ij} .

c_{ij}	d_{ij}
	X_{ij}

Rezolvarea problemei de transport cu capacități limitate se poate face în două etape, se determină o soluție de bază (metoda colțului Nord-Vest, metoda costului minim pe linie, metoda costului minim pe coloană, metoda costului minim pe matricea costurilor) prin o metodă modificată și apoi se aplică algoritmul potențialelor. Altă rezolvare a problemei de transport cu capacități limitate (care este o problemă de programare liniară de o formă particulară) este prin algoritmul simplex primal sau dual cu care se rezolvă problemele de programare liniară.

Determinarea soluției de bază utilizează relația:

$$X_{ij} = \min \{a_i, b_j, d_{ij}\}$$

fiind posibile trei situații.

1. Dacă

$$X_{ij} = a_i \text{ sau } X_{ij} = b_j$$

se rezolvă ca la problema de transport obișnuită.

2. Dacă

$$X_{ij} = d_{ij} < \min \{a_i, b_j\}$$

variabila X_{ij} nu este considerată variabilă de bază.

3. Dacă

$$X_{ij} = d_{ij} = \min \{a_i, b_j\},$$

atunci variabila X_{ij} este considerată variabilă de bază. Se analizează soluția de bază obținută, eventual se fac redistribuiri pentru cazul 2.

În etapa a doua se aplică algoritmul potențialelor soluției de bază obținute.

O altă rezolvare a problemei de transport cu capacități limitate se poate face prin programare liniară prin redenumirea variabilelor cu doi indici prin variabile cu un indice și apoi se utilizează un program pe calculator, de exemplu Qsb, modulul *linear programming* sau modulul *integer linear programming*.

Sunt posibile două variante de introducere a variabilelor.

De exemplu, se notează:

$$Y_1 = X_{11}, Y_2 = X_{12} \text{ etc.}$$

Sau a doua variantă, la întrebarea programului Qsb:

Do you want to use default variable names (X1, X2, ..., Xn) (Y/N)?

Se va răspunde N, apoi când apare mesajul:

Enter the variable names using ...

Se vor introduce numele variabilelor: X11, X12, X13 etc.

Deci, $X_{11} = X_{11}$, $X_{12} = X_{12}$ etc.

Exemplul nr. 4.7.

Un produs omogen este stocat în depozitele (localitățile) A_1, A_2, A_3 respectiv în cantitățile $a_i, i = 1, 2, 3$; și trebuie transportat în centrele de consum (magazine, firme, localități) B_1, B_2, B_3, B_4 unde este cerut respectiv în cantitățile $b_j, j = 1, 2, 3, 4$. Costul transportului unei unități de produs din depozitul A_i la centrul de consum B_j este egal cu c_{ij} unități monetare, $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$. Capacitatea maximă de transport din depozitul A_i în centrul de consum B_j este egală cu $d_{ij}, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$. Oferta, cererea, limitările de capacitate de transport și costurile unitare de transport sunt date în tabelul nr. 4.18. Se pune problema determinării cantităților de produs ce urmează să fie transportate de la depozite la centrele de consum, astfel încât să nu depășească disponibilul (oferta), cererea să fie satisfăcută, capacitatea rutei să nu fie depășită și costul total al transportului să fie minim.

Tabelul nr. 4.18

B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_i					
A_1	3 20	2 10	1 60	1 85	140
A_2	2 70	1 110	3 50	1 50	180
A_3	1 20	2 30	3 60	1 30	80
Cererea b_j	90	110	115	85	$S = 400$

Problema de transport cu capacități limitate din tabelul nr. 4.18 este echilibrată,

cererea = oferta = $S = 400$

și sunt verificate condițiile de existență a soluțiilor:

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} \geq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$d_{11} + d_{21} + d_{31} = 20 + 70 + 20 = 110 > b_1 = 90 \text{ etc.}$$

Se va scrie modelul matematic similar celui din relațiile (4.45) pentru datele concrete, apoi se va rezolva cu programul Qsb, modulul *linear programming*.

Rezolvarea 1

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 140$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 180$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 80$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 90$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 110$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 115$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 85$$

$$0 \leq X_{11} \leq 20$$

$$0 \leq X_{12} \leq 10$$

$$0 \leq X_{13} \leq 60$$

$$0 \leq X_{14} \leq 85$$

$$0 \leq X_{21} \leq 70$$

$$0 \leq X_{22} \leq 110$$

$$0 \leq X_{23} \leq 50$$

$$0 \leq X_{24} \leq 50$$

$$0 \leq X_{31} \leq 20$$

$$0 \leq X_{32} \leq 30$$

$$0 \leq X_{33} \leq 60$$

$$0 \leq X_{34} \leq 30$$

$$X_{IJ} \geq 0, I = 1, 2, 3; J = 1, 2, 3, 4;$$

$$f = 3.X_{11} + 2.X_{12} + 1.X_{13} + 1.X_{14} + 2.X_{21} + 1.X_{22} + 3.X_{23} + 1.X_{24} + 1.X_{31} + 2.X_{32} + 3.X_{33} + 1.X_{34}$$

$$\min f$$

Sunt 12 variabile și 19 restricții care se introduc în programul Qsb.

Tabelul nr. 4.19. Soluția optimă

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1		3	2	1	1	140
		20	10	60	85	
		0	0	60	80	
A_2		2	1	3	1	180
		70	110	50	50	
		70	90	20	0	
A_3		1	2	3	1	80
		20	30	60	30	
		20	20	35	5	
Cererea b_j		90	110	115	85	S = 400

Se lansează programul Qsb, modulul linear programming.
 Se prezintă ecranele programului Qsb pentru rezolvarea acestei probleme.
 Se obține soluția optimă din tabelul nr.4.19 în 15 iterații,

min $f = 600$,
 $X_{11} = 0, X_{12} = 0, X_{13} = 60, X_{14} = 80,$
 $X_{21} = 70, X_{22} = 90, X_{23} = 20, X_{24} = 0,$
 $X_{31} = 20, X_{32} = 20, X_{33} = 35, X_{34} = 5.$

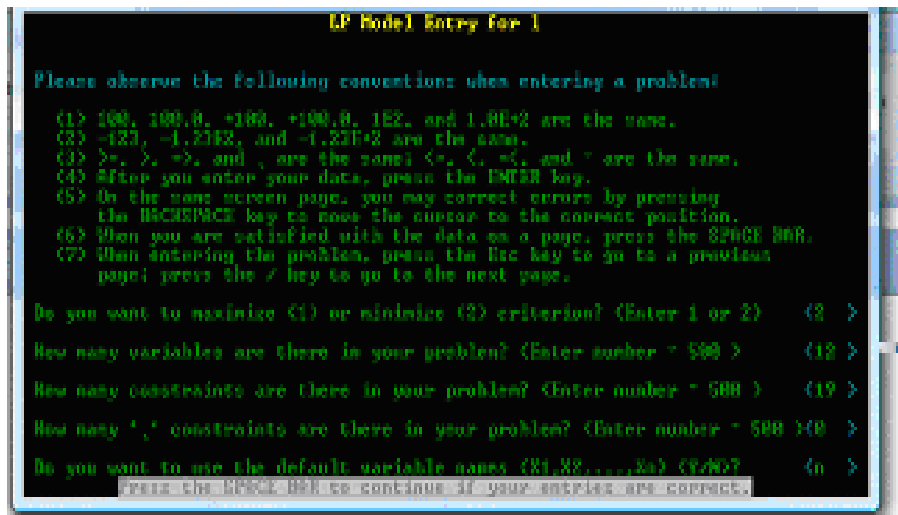


Fig.4.1.

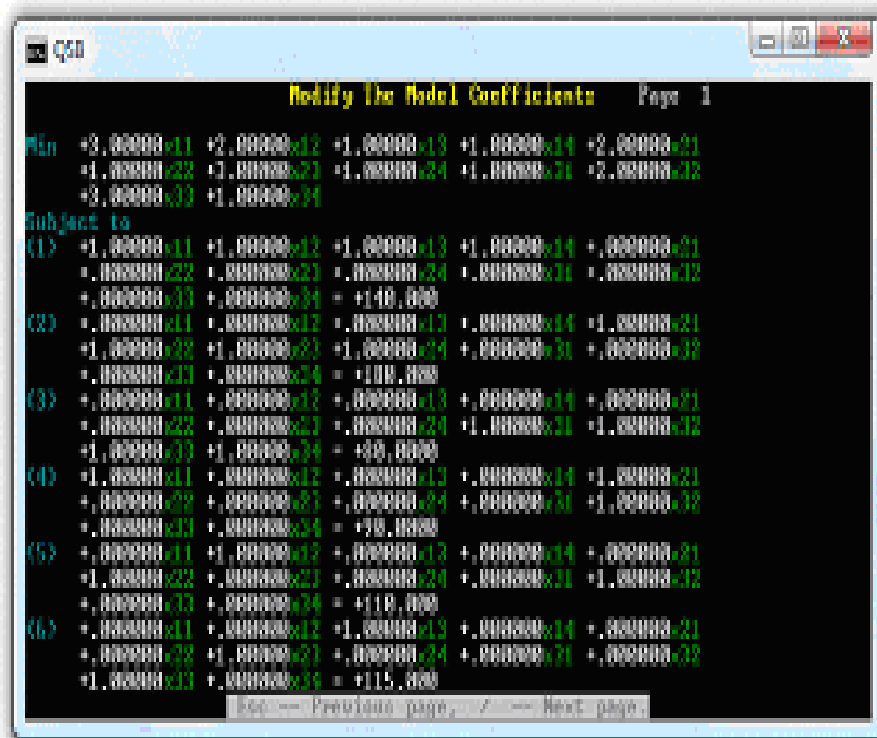




Fig.4.4.

QSB

Summarized Results for 11 Page : 1

Variable No.	Name	Solution	Opportunity Cost	Variable No.	Name	Solution	Opportunity Cost
1	x11	0	-1.0000000	16	x1	0	-1.0000000
2	x12	0	-1.0000000	17	x2	0	0
3	x13	+60.000000	0	18	x3	0	-2.0000000
4	x14	+10.000000	0	19	x4	0	0
5	x21	0	+20.000000	20	x5	+20.000000	0
6	x22	+70.000000	0	21	x6	+10.000000	0
7	x23	+19.999998	0	22	x7	0	+2.0000000
8	x24	0	0	23	x8	+5.0000019	0
9	x31	+19.999998	0	24	x9	0	0
10	x32	+20.000000	0	25	x10	+20.000000	0
11	x33	+35.000000	0	26	x11	+30.000000	0
12	x34	+5.0000019	0	27	x12	+50.000000	0
13	x1	0	-1.0000000	28	x13	+0.00000147	0
14	x2	0	-1.0000000	29	x14	+10.000000	0
15	x3	0	-1.0000000	30	x15	+25.000000	0

Minimum value of the OBJ = 600 (multiple solo.) Itero. = 15

Press any key to continue

Fig.4.5.

Rezolvarea 2

Dacă se înlocuiesc egalitățile cu egalități în sens fuzzy, deci cu inegalități duble, se elimină erorile de rotunjire. Se consideră:

$$a_i \in (a_i - 0.1, a_i + 0.1), b_j \in (b_j - 0.1, b_j + 0.1)$$

Se rezolvă cu programul Qsb modulul *integer linear programming*.

Sunt 12 variabile și 26 de restricții care se introduc în programul Qsb.

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 140.1$$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \geq 139.9$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 180.1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \geq 179.9$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 80.1$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \geq 79.9$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \leq 90.1$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 89.9$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \leq 110.1$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 109.9$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} \leq 115.1$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 114.9$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} \leq 85.1$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 84.9$$

$$0 \leq X_{11} \leq 20$$

$$0 \leq X_{12} \leq 10$$

$$0 \leq X_{13} \leq 60$$

$$0 \leq X_{14} \leq 85$$

$$0 \leq X_{21} \leq 70$$

$$0 \leq X_{22} \leq 110$$

$$0 \leq X_{23} \leq 50$$

$$0 \leq X_{24} \leq 50$$

$$0 \leq X_{31} \leq 20$$

$$0 \leq X_{32} \leq 30$$

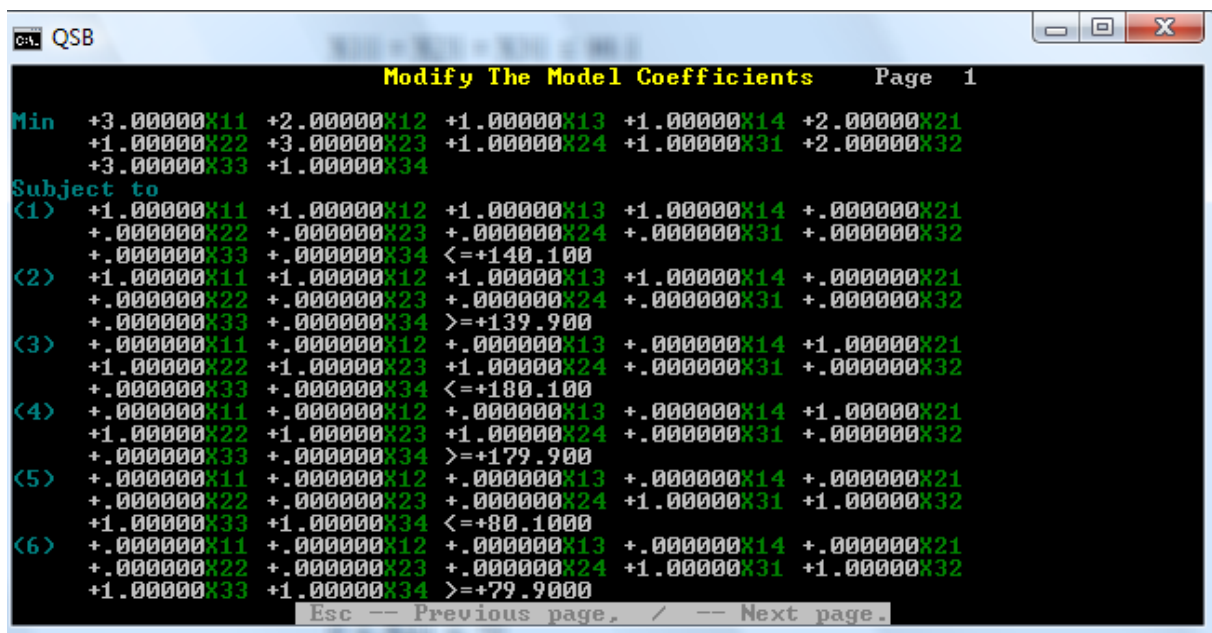
$$0 \leq X_{33} \leq 60$$

$$0 \leq X_{34} \leq 30$$

$$X_{IJ} \geq 0, X_{IJ} \in \mathbf{Z}, I = 1, 2, 3; J = 1, 2, 3, 4;$$

$$f = 3.X_{11} + 2.X_{12} + 1.X_{13} + 1.X_{14} + 2.X_{21} + 1.X_{22} + 3.X_{23} + 1.X_{24} + 1.X_{31} + 2.X_{32} + 3.X_{33} + 1.X_{34}$$

$$\min f$$



QSB

Enter the Coefficients of ILP Model Page 2

<7> 1 X11 X12 X13 X14 1 X21
 X22 X23 X24 1 X31 X32
 X33 X34 <=90.1

<8> 1 X11 X12 X13 X14 1 X21
 X22 X23 X24 1 X31 X32
 X33 X34 >=89.9

<9> 1 X11 1 X12 X13 X14 X21
 1 X22 X23 X24 X31 1 X32
 X33 X34 <=110.1

<10> 1 X11 1 X12 X13 X14 X21
 1 X22 X23 X24 X31 1 X32
 X33 X34 >=109.9

<11> 1 X11 X12 1 X13 X14 X21
 X22 1 X23 X24 X31 X32
 1 X33 X34 <=115.1

<12> 1 X11 X12 1 X13 X14 X21
 X22 1 X23 X24 X31 X32
 1 X33 X34 >=114.9

<13> 1 X11 X12 X13 1 X14 X21
 X22 X23 1 X24 X31 X32
 X33 X34 1 <=85.1

<14> 1 X11 X12 X13 1 X14 X21

Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.

QSB

Modify The Model Coefficients Page 3

<14> +.000000X22 +.000000X23 +1.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
 +.000000X33 +1.000000X34 >=+84.9000

<15> +1.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
 +.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
 +.000000X33 +.000000X34 <=+20.0000

<16> +.000000X11 +1.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
 +.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
 +.000000X33 +.000000X34 <=+10.0000

<17> +.000000X11 +.000000X12 +1.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
 +.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
 +.000000X33 +.000000X34 <=+60.0000

<18> +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +1.000000X14 +.000000X21
 +.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
 +.000000X33 +.000000X34 <=+85.0000

<19> +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +1.000000X21
 +.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
 +.000000X33 +.000000X34 <=+70.0000

<20> +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
 +1.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
 +.000000X33 +.000000X34 <=+110.0000

<21> +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
 +.000000X22 +1.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32

Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.

```

C:\ QSB

Modify The Model Coefficients      Page 4

<21> +.000000X33 +.000000X34 <=+50.0000
<22> +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
+.000000X22 +.000000X23 +1.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
+.000000X33 +.000000X34 <=+50.0000
<23> +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
+.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +1.000000X31 +.000000X32
+.000000X33 +.000000X34 <=+20.0000
<24> +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
+.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +1.000000X32
+.000000X33 +.000000X34 <=+30.0000
<25> +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
+.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
+1.000000X33 +.000000X34 <=+60.0000
<26> +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
+.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
+.000000X33 +1.000000X34 <=+30.0000

Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.

```

Soluția optimă:

$X_{11} = 0$; $X_{12} = 0$; $X_{13} = 60$; $X_{14} = 80$;
 $X_{21} = 70$; $X_{22} = 110$; $X_{23} = 0$; $X_{24} = 0$;
 $X_{31} = 20$; $X_{32} = 0$; $X_{33} = 55$; $X_{34} = 5$;
 $\text{Min } f = 580$

C:\ QSB

Summary of Results for tt						Page : 1
Variables No. Names		Solution	Obj. Fnctn. Coefficient	Variables No. Names		Obj. Fnctn. Coefficient
1	X11	0	+3.0000000	7	X23	0
2	X12	0	+2.0000000	8	X24	0
3	X13	+60.000000	+1.0000000	9	X31	+20.000000
4	X14	+80.000000	+1.0000000	10	X32	0
5	X21	+70.000000	+2.0000000	11	X33	+55.000000
6	X22	+110.000000	+1.0000000	12	X34	+5.0000000

Minimum value of the OBJ = 580 Total iterations = 19

Press any key to continue.

Tabelul nr. 4.19-ILP. Soluția optimă

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1		3	2	1	1	140
		20	10	60	85	
		0	0	60	80	
A_2		2	1	3	1	180
		70	110	50	50	
		70	110	0	0	
A_3		1	2	3	1	80

	20 20	30 0	60 55	30 5	
Cererea b_j	90	110	115	85	$S = 400$

Rezolvarea 3

Soluția optimă neîntreagă pentru modelul matematic din Rezolvarea 2 – cu Qsb modulul *linear programming*. Valorile variabilelor trebuie trunchiate la numere întregi .

Soluția optimă:

$X_{11} = 0$; $X_{12} = 0$; $X_{13} = 60$; $X_{14} = 80$;
 $X_{21} = 70$; $X_{22} = 110$; $X_{23} = 0$; $X_{24} = 0$;
 $X_{31} = 20$; $X_{32} = 0$; $X_{33} = 55$; $X_{34} = 5$;
 $\text{Min } f = 580$

Se observă că soluția optimă din Rezolvarea 2, cu valorile variabilelor numere întregi, este cea mai bună, dar și Rezolvarea 3 după trunchiere.

QSB

Summarized Results for t						Page : 1	
Variables No. Names		Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names		Solution	Opportunity Cost
1	X11	0	+1.00000000	16	S3	+.20000458	0
2	X12	0	+1.00000000	17	S4	0	+1.00000000
3	X13	+60.0999998	0	18	A4	0	-1.00000000
4	X14	+79.7999995	0	19	S5	+.19999695	0
5	X21	+69.8000003	0	20	S6	0	+1.00000000
6	X22	+109.999999	0	21	A6	0	-1.00000000
7	X23	+.10001029	0	22	S7	+.19999695	0
8	X24	0	0	23	S8	0	+1.00000000
9	X31	+20.1000000	0	24	A8	0	-1.00000000
10	X32	0	+1.00000000	25	S9	+.10001706	0
11	X33	+54.6999997	0	26	S10	+.09997799	0
12	X34	+5.1000042	0	27	A10	0	0
13	S1	+.20001411	0	28	S11	+.19999504	0
14	S2	0	+1.00000000	29	S12	0	+2.00000000
15	A2	0	-1.00000000	30	A12	0	-2.00000000

Minimum value of the OBJ = 579.0999 (multiple sols.) ITERS. = 13

Press any key to continue.

4.7.2.PROBLEMA DE TRANSPORT CU CAPACITĂȚI LIMITATE MULTI-OBIECTIV

Problema de transport cu capacități limitate poate fi și multiobiectiv, deci cu mai multe funcții obiectiv care pot fi contradictorii.

Un produs omogen este stocat în depozitele (localitățile) $A_1, A_2, \dots, A_m$ respectiv în cantitățile $a_1, a_2, \dots, a_m$ și trebuie transportat în centrele de consum (magazine, firme, localități) $B_1, B_2, \dots, B_n$ unde este cerut respectiv în cantitățile $b_1, b_2, \dots, b_n$. Costul transportului unei unități de produs din depozitul A_i la centrul de consum B_j este egal cu c_{ij} unități monetare, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Capacitatea maximă de transport din depozitul A_i în centrul de consum B_j este egală cu d_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Pentru fiecare rută A_i, B_j timpul de transport este egal cu t_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Se pune problema determinării cantităților de produs ce urmează să fie transportate de la depozite la centrele de consum, astfel încât să nu depășească disponibilul (oferta), cererea să fie satisfăcută, capacitatea rutei să nu fie depășită și să se optimizeze trei funcții obiectiv, astfel:

f_1 = costul total al transportului să fie minim;

f_2 = timpul total de transport să fie minim;
 f_3 = cantitatea care se transportă să se maximizeze.

Se presupune că: $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} > 0$, $d_{ij} > 0$, $t_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} \geq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

Se va presupune că cererea este egală cu oferta, deci problema de transport cu capacități limitate este echilibrată:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Se notează cu X_{ij} cantitatea de produs ce va fi transportată din A_i în B_j ,
 $X = (X_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Modelul matematic este cel din relațiile (4.46).

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$0 \leq X_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.46)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij}$$

$$f_2(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot X_{ij}$$

$$f_3(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

$$\min f_1(X)$$

$$\min f_2(X)$$

$$\max f_3(X)$$

$$X = (X_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Problema din relațiile (4.46) se poate rezolva prin metoda maximizării utilității globale.

4.7.3. REZOLVAREA PROBLEMEI DE TRANSPORT CU CAPACITĂȚI LIMITATE MULTIIOBIECTIV PRIN METODA MAXIMIZĂRII UTILITĂȚII GLOBALE

Se consideră modelul matematic al problemei de transport cu capacități limitate multiobiectiv din relațiile (4.47).

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n X_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
\sum_{i=1}^m X_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
0 \leq X_{ij} &\leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
f_1(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \\
f_2(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot X_{ij} \\
f_3(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \\
\min f_1(X) \\
\min f_2(X) \\
\max f_3(X)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

unde

$$X = (X_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

X_{ij} este cantitatea transportată din A_i în B_j ;

Etapa 1.

Pentru fiecare funcție obiectiv $f_k(X)$ se determină soluția optimă a problemei de transport cu capacități limitate cu o funcție obiectiv, $k = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n X_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
\sum_{i=1}^m X_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
0 \leq X_{ij} &\leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
f_1(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \\
\min f_1(X)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

cu soluția optimă X^{*1} ;

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n X_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
\sum_{i=1}^m X_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
0 \leq X_{ij} &\leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$f_2(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot X_{ij}$$

$$\min f_2(X)$$

cu soluția optimă X^{*2} ;

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$0 \leq X_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.50)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$f_3(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

$$\max f_3(X)$$

cu soluția optimă X^{*3} .

Pentru fiecare funcție obiectiv $f_k(X)$ se determină soluția pesimă (nonoptimă, opusă valorii optime, cea mai defavorabilă) X^k a problemei de transport cu o funcție obiectiv, $k = 1, 2, 3$.

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$0 \leq X_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.51)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij}$$

$$\max f_1(X)$$

cu soluția pesimă X^{-1} ;

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$0 \leq X_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.52)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$f_2(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot X_{ij}$$

$$\max f_2(X)$$

cu soluția pesimă X^{-2} ;

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$0 \leq X_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.53)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$f_3(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

$$\min f_3(X)$$

cu soluția pesimă X^{-3} .

Se notează: $O_k = \text{Optimum } f_k(X) = f_k(X^{*k})$

$P_k = \text{Pesim } f_k(X) = f_k(X^{-k})$

$k = 1, 2, 3.$

Deci: $O_1 = \min f_1(X) = f_1(X^{*1})$

$O_2 = \min f_2(X) = f_2(X^{*2})$

$O_3 = \max f_3(X) = f_3(X^{*3})$

$P_1 = \max f_1(X) = f_1(X^{-1})$

$P_2 = \max f_2(X) = f_2(X^{-2})$

$P_3 = \min f_3(X) = f_3(X^{-3})$

Etapa 2.

Pentru valorile optime și pesime ale funcțiilor obiectiv se dau utilitățile acestor valori de către decident în tabelul nr. 4.42.

Valoarea optimă O_k are utilitatea U_k , $k = 1, 2, 3.$

Valoarea pesimă P_k are utilitatea U_{3+k} , $k = 1, 2, 3.$

Tabelul nr. 4.42 Utilitățile valorilor optime și pesime

O_k / P_k	O_1	O_2	O_3	P_1	P_2	P_3
U_k	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6

Dacă o situație este mai convenabilă, utilitatea sa va fi mai mare și

$$U_k > U_{3+k}, k = 1, 2, 3;$$

deoarece valoarea optimă O_k este preferată valorii pesime P_k , $k = 1, 2, 3$.

Etapa 3.

Se transformă funcțiile obiectiv $f_1(X)$, $f_2(X)$, $f_3(X)$ în funcții utilitate $F_1(X)$, $F_2(X)$, $F_3(X)$, astfel:

$$F_k(X) = \alpha_k \cdot f_k(X) + \beta_k,$$

$$\text{se face: } X = X^{*k} \text{ si } X = X^{-k}$$

Se obțin și se rezolvă trei sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute α_k și β_k , $k = 1, 2, 3$.

$$\alpha_k \cdot O_k + \beta_k = U_k$$

$$\alpha_k \cdot P_k + \beta_k = U_{3+k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Se obțin α_k și β_k :

$$\alpha_k = \frac{U_k - U_{3+k}}{O_k - P_k}$$

$$\beta_k = \frac{U_{3+k} \cdot O_k - U_k \cdot P_k}{O_k - P_k}$$

Se calculează $F_k(X)$

$$F_k(X) = \alpha_k \cdot f_k(X) + \beta_k = \frac{U_k - U_{3+k}}{O_k - P_k} \cdot f_k(X) + \frac{U_{3+k} \cdot O_k - U_k \cdot P_k}{O_k - P_k}$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Etapa 4.

Se construiește funcția obiectiv sinteză $F(X)$,

$$F(X) = F_1(X) + F_2(X) + F_3(X) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{U_k - U_{3+k}}{O_k - P_k} \cdot f_k(X) + \frac{U_{3+k} \cdot O_k - U_k \cdot P_k}{O_k - P_k} \right) = \dots$$

Se rezolvă problema de transport monoobiectiv:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$0 \leq X_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.54)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$F(X) = \left(\frac{U_1 - U_4}{O_1 - P_1} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} + \frac{U_4 \cdot O_1 - U_1 \cdot P_1}{O_1 - P_1} \right) + \left(\frac{U_2 - U_5}{O_2 - P_2} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot X_{ij} + \frac{U_5 \cdot O_2 - U_2 \cdot P_2}{O_2 - P_2} \right) + \left(\frac{U_3 - U_6}{O_3 - P_3} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} + \frac{U_6 \cdot O_3 - U_3 \cdot P_3}{O_3 - P_3} \right)$$

$$\text{Max } F(X)$$

Se obține soluția optimă de maximă utilitate $X^* = (X^*_{ij})$.

Se calculează cele trei funcții obiectiv în soluția optimă obținută X^* : $f_1(X^*)$, $f_2(X^*)$, $f_3(X^*)$.

Observație.

Funcția obiectiv sinteză $F(X)$ poate fi obținută și altfel:

$$F(X) = k_1 \cdot F_1(X) + k_2 \cdot F_2(X) + k_3 \cdot F_3(X) = \dots$$

k_1, k_2, k_3 sunt coeficienți de importanță ale funcțiilor obiectiv f_i , $k_i > 0$, $i = 1, 2, 3$;

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

4. 9. PROBLEMA DE TRANSPORT CU CAPACITĂȚI LIMITATE ȘI RUTE INTERZISE (BLOCATE)

Există în practica economică probleme de transport cu limitări superioare ale capacităților de transport, iar anumite rute sunt interzise (blocate).

Un produs omogen este stocat în depozitele (localitățile) $A_1, A_2, \dots, A_m$ respectiv în cantitățile $a_1, a_2, \dots, a_m$ și trebuie transportat în centrele de consum (magazine, firme, localități) $B_1, B_2, \dots, B_n$ unde este cerut respectiv în cantitățile $b_1, b_2, \dots, b_n$. Capacitatea maximă de transport din depozitul A_i în centrul de consum B_j este egală cu d_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Există rute între o parte dintre furnizori și anumiți consumatori care nu pot fi folosite la un moment dat, numindu-le rute interzise sau blocate, iar acestea sunt date de limita de capacitate de transport pe ruta respectivă egală cu zero. Astfel, dacă ruta A_k, B_h este interzisă (blocată), atunci:

$$d_{kh} = 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Se pune problema determinării cantităților de produs ce urmează să fie transportate de la depozite la centrele de consum, astfel încât să nu depășească disponibilul (oferta), cererea să fie satisfăcută, capacitatea rutei să nu fie depășită, rutele interzise (blocate) să nu fie utilizate și cantitatea totală transportată să fie maximă.

Se presupune că:

$$a_i \geq 0, \quad b_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$d_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

Problema de transport cu limitări (superioare) ale capacităților de transport și cu anumite rute interzise (blocate) se poate modela și rezolva prin *programare liniară* și prin *teoria grafurilor* (algoritmul Ford – Furkenson pentru determinarea fluxului maxim într-o rețea de transport). Se va prezenta **modelarea și rezolvarea prin programare liniară**.

În funcție de relația dintre capacitatea rutelor, cerere și ofertă, problema poate fi echilibrată sau neechilibrată, fiind rezolvabilă în toate situațiile. Pentru ca oferta și cererea să fie satisfăcute, trebuie să fie echilibrată și să fie îndeplinite condițiile:

$$\sum_{i=1}^m d_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} \geq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

Problema de transport cu capacități limitate și cu anumite rute interzise (blocate) este echilibrată, deci cererea este egală cu oferta, dacă:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Se notează cu $K \times H$ mulțimea indicilor rutelor interzise (blocate):

$$K \times H = \{(k, h), d_{kh} = 0, k \in \{1, 2, \dots, m\}, h \in \{1, 2, \dots, n\}\};$$

Se notează cu X_{ij} cantitatea de produs ce va fi transportată din A_i în B_j , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $(i, j) \notin K \times H$;

$$X = (X_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; (i, j) \notin K \times H$$

Schematic transportul va fi reprezentat astfel:

$$A_i, a_i \xrightarrow[X_{ij}]{d_{ij}} B_j, b_j$$

Modelul matematic al problemei de transport cu capacități limitate și rute interzise (blocate) este o problemă de programare liniară, relațiile (4. 55).

$$\sum_{j=1, (i,j) \notin K \times H}^n X_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1, (i,j) \notin K \times H}^m X_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; j \notin H \quad (4.55)$$

$$0 \leq X_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; (i, j) \notin K \times H;$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; (i, j) \notin K \times H;$$

$$f(X) = \sum_{i=1, (i,j) \notin K \times H}^m \sum_{j=1, j \notin H}^n X_{ij}$$

$$\max f(X)$$

Problema de transport cu capacități limitate și rute interzise (blocate) (4.55) se poate rezolva prin algoritmul simplex din programarea liniară sau cu un program pe calculator, de exemplu Qsb, modulul *linear programming*, considerând că variabilele au un singur indice. La întrebarea programului Qsb:

Do you want to use default variable names (X1, X2, ..., Xn) (Y/N)?

Se va răspunde N, apoi când apare mesajul:

Enter the variable names using ...

Se vor introduce numele variabilelor: X11, X12, X13 etc., cele pentru care rutele sunt permise, deci $d_{ij} > 0$.

Deci, $X_{11} = X_{11}$, $X_{12} = X_{12}$ etc.

Problema de transport cu capacități limitate și rute interzise (blocate) se poate pune într-un tabel de transport ca la problema de transport de minimizare clasică, dar în aceeași celulă (i, j) a tabelului se pun d_{ij} , X_{ij} . De fapt, variabilele care ar corespunde rutelor blocate pot fi

considerate că au valoarea zero, dar nu se pun în modelul matematic (4.55) pentru a reduce numărul de variabile.

$$\begin{matrix} d_{ij} \\ x_{ij} \end{matrix}$$

Observație

1. Problema de transport cu capacități limitate și rute interzise (blocate) poate avea altă funcție obiectiv în varianta monoobiectiv, de exemplu f_2 – costul total al transportului, care trebuie să fie minim, iar în acest caz trebuie să se cunoască costurile unitare de transport c_{ij} pentru rutele permise A_i, B_j . Rezolvarea sa în acest caz este tot prin programare liniară, dar este problemă de minim sau printr-un program pe calculator (Qsb sau alt program).

2. Problema de transport cu capacități limitate și rute interzise (blocate) poate fi și multiobiectiv, de exemplu funcțiile obiectiv pot fi:

f_1 - cantitatea totală transportată, trebuie să fie maximă;

f_2 – costul total al transportului, trebuie să fie minim.

Rezolvarea problemei multiobiectiv se poate face prin maximizarea utilității globale.

Exemplul nr. 4.8. Problema de transport cu rute de transport cu capacități limitate și rute interzise (blocate).

Tabelul nr.4.43

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Disponibil (Oferta) a_i
A_1		20	-	20	-	-	30
A_2		15	15	-	-	15	30
A_3		-	-	10	30	15	25
A_4		-	20	10	-	10	35
Necesar (Cererea) b_j		30	15	10	20	35	$S_1 = 120$ $S_2 = 110$

Un produs trebuie transportat de la $m = 4$ depozite A_1, A_2, A_3, A_4 la $n = 5$ centre de consum B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 folosind anumite rute de transport cu capacități limitate, iar alte rute sunt interzise (blocate). Cantitățile disponibile (oferta) în depozite, cantitățile necesare (cererea), limitările de capacitate ale rutelor de transport și rutele interzise (blocate) sunt în tabelul nr. 4.43. Acolo unde nu există rută de transport între două localități, căsuța respectivă a tabelului este liberă (sau -). Să se determine un plan de transport de la cele patru depozite la cele cinci centre de consum astfel încât cantitatea transportată să fie maximă.

Pentru căsuțele din tabel ce corespund rutelor blocate nu se consideră variabile x_{ij} , fiind considerate variabile cu un singur indice, sunt 11 variabile și 20 de restricții.

Modelul matematic:

$$x_{11} + x_{13} \leq 30$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{25} \leq 30$$

$$x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 25$$

$$x_{42} + x_{43} + x_{45} \leq 35$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 30$$

$$x_{22} + x_{42} \leq 15$$

$$x_{13} + x_{33} + x_{43} \leq 10$$

$$x_{34} \leq 20$$

$$x_{25} + x_{35} + x_{45} \leq 35$$

$$\begin{aligned}
&0 \leq X_{11} \leq 20 \\
&0 \leq X_{13} \leq 20 \\
&0 \leq X_{21} \leq 15 \\
&0 \leq X_{22} \leq 15 \\
&0 \leq X_{25} \leq 15 \\
&0 \leq X_{33} \leq 10 \\
&0 \leq X_{34} \leq 30 \\
&0 \leq X_{35} \leq 15 \\
&0 \leq X_{42} \leq 20 \\
&0 \leq X_{43} \leq 10 \\
&0 \leq X_{45} \leq 10 \\
&X_{11}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{25}, X_{33}, X_{34}, X_{35}, X_{42}, X_{43}, X_{45} \geq 0 \\
&f = X_{11} + X_{13} + X_{21} + X_{22} + X_{25} + X_{33} + X_{34} + X_{35} + X_{42} + X_{43} + X_{45} \\
&\max f
\end{aligned}$$

Se va rezolva cu programul Qsb, modulul *linear programming*, iar soluția optimă este cea din tabelul nr.4.44 (11 iterații).

Se obține **soluția optimă**:

$\max f = 105$,

$X_{11} = 20, X_{13} = 10, X_{21} = 10, X_{22} = 5, X_{25} = 15, X_{33} = 0, X_{34} = 20, X_{35} = 5, X_{42} = 10,$
 $X_{43} = 0, X_{45} = 10.$

Tabelul nr.4.44

A_i	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Disponibil (Oferta) a_i
A_1		20 20	-	20 10	-	-	30
A_2		15 10	15 5	-	-	15 15	30
A_3		-	-	10 0	30 20	15 5	25
A_4		-	20 10	10 0	-	10 10	35
Necesar (Cererea) b_j		30	15	10	20	35	$S_1 = 120$ $S_2 = 110$

Se prezintă ecranele programului Qsb pentru rezolvarea acestei probleme.

QSB

Summarized Results for h Page : 1

Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost
1 X11	+20.000000	0	16 S5	0	+1.000000
2 X13	+10.000000	0	17 S6	0	+1.000000
3 X21	+10.000000	0	18 S7	0	+1.000000
4 X22	+5.000000	0	19 S8	0	0
5 X25	+15.000000	0	20 S9	+5.000000	0
6 X33	0	+1.000000	21 S10	0	0
7 X34	+20.000000	0	22 S11	+10.000000	0
8 X35	+5.000000	0	23 S12	+5.000000	0
9 X42	+10.000000	0	24 S13	+10.000000	0
10 X43	0	0	25 S14	0	+1.000000
11 X45	+10.000000	0	26 S15	+10.000000	0
12 S1	0	0	27 S16	+10.000000	0
13 S2	0	0	28 S17	+10.000000	0
14 S3	0	+1.000000	29 S18	+10.000000	0
15 S4	+15.000000	0	30 S19	+10.000000	0

Maximum value of the OBJ = 105 (multiple sols.) Iters. = 11

Press any key to continue.

QSB

LP Model Entry for L

Please observe the following conventions when entering a problem:

- (1) 100, 100.0, +100, +100.0, 1E2, and 1.0E+2 are the same.
- (2) -123, -1.23E2, and -1.23E+2 are the same.
- (3) >=, >, =, and . are the same; <=, <, =<, and ~ are the same.
- (4) After you enter your data, press the ENTER key.
- (5) On the same screen page, you may correct errors by pressing the BACKSPACE key to move the cursor to the correct position.
- (6) When you are satisfied with the data on a page, press the SPACE BAR.
- (7) When entering the problem, press the Esc key to go to a previous page; press the / key to go to the next page.

Do you want to maximize (1) or minimize (2) criterion? (Enter 1 or 2) <1 >

How many variables are there in your problem? (Enter number ~ 500) <11 >

How many constraints are there in your problem? (Enter number ~ 500) <20 >

How many ' ' constraints are there in your problem? (Enter number ~ 500) <0 >

Do you want to use the default variable names (X1,X2,...,Xn) (Y/N)? <N >

Press the SPACE BAR to continue if your entries are correct.

QSB

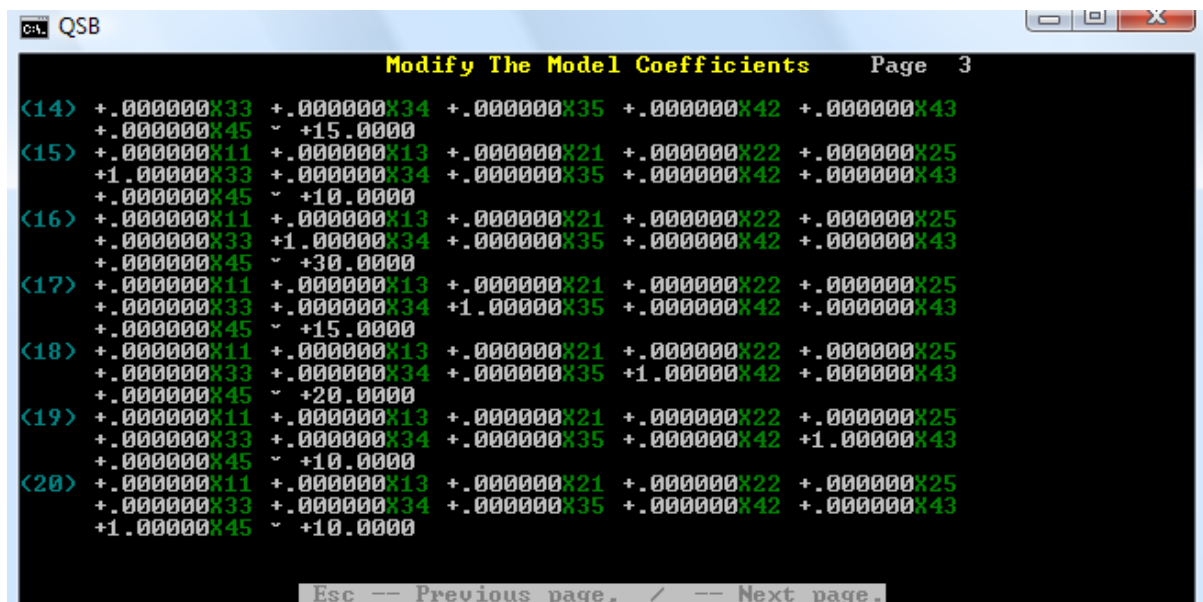
Enter the variable names using at most 4 characters Page 1

(To use default names, i.e., X1,X2,...,Xn, press the ENTER key)

1 : <X11 > 2 : <X13 > 3 : <X21 > 4 : <X22 > 5 : <X25 >
 6 : <X33 > 7 : <X34 > 8 : <X35 > 9 : <X42 > 10 : <X43 >
 11 : <X45 >

Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.

QSB		Modify The Model Coefficients					Page 1
Max	1.000000X11	+1.000000X13	+1.000000X21	+1.000000X22	+1.000000X25		
	+1.000000X33	+1.000000X34	+1.000000X35	+1.000000X42	+1.000000X43		
	+1.000000X45						
Subject to							
(1)	+1.000000X11	+1.000000X13	+0.000000X21	+0.000000X22	+0.000000X25		
	+0.000000X33	+0.000000X34	+0.000000X35	+0.000000X42	+0.000000X43		
	+0.000000X45	~ +30.0000					
(2)	+0.000000X11	+0.000000X13	+1.000000X21	+1.000000X22	+1.000000X25		
	+0.000000X33	+0.000000X34	+0.000000X35	+0.000000X42	+0.000000X43		
	+0.000000X45	~ +30.0000					
(3)	+0.000000X11	+0.000000X13	+0.000000X21	+0.000000X22	+0.000000X25		
	+1.000000X33	+1.000000X34	+1.000000X35	+0.000000X42	+0.000000X43		
	+0.000000X45	~ +25.0000					
(4)	+0.000000X11	+0.000000X13	+0.000000X21	+0.000000X22	+0.000000X25		
	+0.000000X33	+0.000000X34	+0.000000X35	+1.000000X42	+1.000000X43		
	+1.000000X45	~ +35.0000					
(5)	+1.000000X11	+0.000000X13	+1.000000X21	+0.000000X22	+0.000000X25		
	+0.000000X33	+0.000000X34	+0.000000X35	+0.000000X42	+0.000000X43		
	+0.000000X45	~ +30.0000					
(6)	+0.000000X11	+0.000000X13	+0.000000X21	+1.000000X22	+0.000000X25		
	+0.000000X33	+0.000000X34	+0.000000X35	+1.000000X42	+0.000000X43		
	+0.000000X45	~ +15.0000					
Esc -- Previous page, / -- Next page.							
QSB		Modify The Model Coefficients					Page 2
(7)	+0.000000X11	+1.000000X13	+0.000000X21	+0.000000X22	+0.000000X25		
	+1.000000X33	+0.000000X34	+0.000000X35	+0.000000X42	+1.000000X43		
	+0.000000X45	~ +10.0000					
(8)	+0.000000X11	+0.000000X13	+0.000000X21	+0.000000X22	+0.000000X25		
	+0.000000X33	+1.000000X34	+0.000000X35	+0.000000X42	+0.000000X43		
	+0.000000X45	~ +20.0000					
(9)	+0.000000X11	+0.000000X13	+0.000000X21	+0.000000X22	+1.000000X25		
	+0.000000X33	+0.000000X34	+1.000000X35	+0.000000X42	+0.000000X43		
	+1.000000X45	~ +35.0000					
(10)	+1.000000X11	+0.000000X13	+0.000000X21	+0.000000X22	+0.000000X25		
	+0.000000X33	+0.000000X34	+0.000000X35	+0.000000X42	+0.000000X43		
	+0.000000X45	~ +20.0000					
(11)	+0.000000X11	+1.000000X13	+0.000000X21	+0.000000X22	+0.000000X25		
	+0.000000X33	+0.000000X34	+0.000000X35	+0.000000X42	+0.000000X43		
	+0.000000X45	~ +20.0000					
(12)	+0.000000X11	+0.000000X13	+1.000000X21	+0.000000X22	+0.000000X25		
	+0.000000X33	+0.000000X34	+0.000000X35	+0.000000X42	+0.000000X43		
	+0.000000X45	~ +15.0000					
(13)	+0.000000X11	+0.000000X13	+0.000000X21	+1.000000X22	+0.000000X25		
	+0.000000X33	+0.000000X34	+0.000000X35	+0.000000X42	+0.000000X43		
	+0.000000X45	~ +15.0000					
(14)	+0.000000X11	+0.000000X13	+0.000000X21	+0.000000X22	+1.000000X25		
Esc -- Previous page, / -- Next page.							



MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C9

4. 10. ALOCAREA OPTIMĂ A MAȘINILOR PRIN PROBLEMA DE TRANSPORT

Se consideră că într-o secție există m mașini cu performanțe tehnico-economice diferite pe care se prelucreză piesele / reperatele $P_1, P_2, \dots, P_n$ și se cunosc elementele:

- cantitatea cerută pe piață pentru fiecare piesă / reper P_j pe zi (săptămână, lună etc.) b_j , $j = 1, 2, \dots, n$;
- numărul mașinilor M_i disponibile (oferta de prelucrare) a_i , $i = 1, 2, \dots, m$;
- costurile unitare de producție ale prelucrării pe mașina M_i a piesei / reperului P_j egal cu c_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;
- prețul unitar de vânzare a produsului P_j egal cu p_j , $j = 1, 2, \dots, n$;
- timpul necesar prelucrării produsului P_j egal cu h_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

Se dorește repartizarea pieselor / reperelor pe mașini astfel încât profitul să fie maxim. Aceste elemente sunt sintetizate în tabelul nr.4.33.

Problema se va transforma într-o problemă de transport de maximizare care se poate rezolva cu algoritmul de transport de maximizare (manual, pentru dimensiuni mici ale problemei) sau prin utilizarea programului Qsb.

Tabelul nr. 4.33.

	P_j	P_1	P_2	$\dots$	P_j	$\dots$	P_n	NUMAR MASINI
M_i								a_i
M_1		c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1j}	$\dots$	c_{1n}	a_1
M_2		c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2j}	$\dots$	c_{2n}	a_2
$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_i		c_{i1}	c_{i2}	$\dots$	c_{ij}	$\dots$	c_{in}	a_i
$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
M_m		c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mj}	$\dots$	c_{mn}	a_m
b_j Cerere produse pe zi		b_1	b_2	$\dots$	b_j	$\dots$	b_n	

h_j Număr Ore (min) necesar prel./prod	h₁	h₂	...	h_j	...	h_n	
P_j preț unitar produs	p₁	p₂	...	p_j	...	p_n	

Se calculează profitul pe oră obținut prin utilizarea mașinii M_i la prelucrarea produsului P_j utilizând relația (4.29).

$$q_{ij} = \frac{p_j - c_{ij}}{h_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.29)$$

Dacă se presupune că se lucrează un schimb de T = 8 ore, atunci utilizând relația (4.29) și

$$a'_i = T \cdot a_i = 8 \cdot a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$b'_j = b_j \cdot h_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

tabelul nr.4.33 se transformă într-un tabel al unei probleme de transport de maximizare, tabelul nr. 4.34.

Cu aceste notații b'_j reprezintă cererea de ore-mașină necesare pentru prelucrare, iar a'_i este oferta exprimată în ore-mașină disponibile pentru fiecare tip de mașină.

Se notează cu X_{ij} cantitatea de produse P_j ce se prelucreează pe masina M_i, i = 1, 2, .. . ,m; j = 1, 2, .. . , n.

Modelul matematic corespunzător problemei date de tabelul nr. 4.33. și tabelul nr. 4.34 este tip problemă de transport de maximizare, dat de relațiile (4.30).

Tabelul nr. 4.34.

P_j	P₁	P₂	...	P_n	Timp masina disponibil (Oferta)
M_i					a_i
M₁	q₁₁	q₁₂	...	q_{1n}	a₁
M₂	q₂₁	q₂₂	...	q_{2n}	a₂
...	...	...	...	...	...
M_m	q_{m1}	q_{m2}	...	q_{mn}	a_m
b_j Timp masina necesar (Cererea)	b₁	b₂	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a'_i$ $\sum_{j=1}^n b'_j$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a'_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b'_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.30)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot X_{ij}$$

$$\max f$$

Rezolvarea modelului matematic (4.30) se face prin algoritmul de transport de maximizare, respectiv prin utilizarea programului Qsb.

Dacă se consideră problema din tabelul nr. 4.33 și tabelul nr. 4.34, dar criteriul de optimizare să fie de minimizare, deci $\min f$, se obține modelul problemei de transport de minimizare, (4.31), care va minimiza profitul, determinându-se situația cea mai nefavorabilă, nedorită, nonoptimă, pesimă.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n X_{ij} &= a'_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^m X_{ij} &= b'_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\ f &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot X_{ij} \\ \min f \end{aligned} \quad (4.31)$$

În acest fel se poate obține intervalul de încadrare a profitului f :

$$f \in [f_{\min}, f_{\max}].$$

Profitul minim $f_{\min}$ nu este de dorit, dar este obținut cu aceleași resurse ca și profitul maxim $f_{\max}$, posibil din cauze organizatorice.

Problema se poate dezvolta prin înlocuirea vectorului $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ cu matricea

$$h = (h_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

și a relației (4.29) cu relația (4.32).

$$q_{ij} = \frac{P_j - c_{ij}}{h_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.32)$$

unde: h_{ij} - reprezintă timpul necesar prelucrării pe mașina M_i a produsului P_j , $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$; și se obține modelul unei probleme de transport de maximizare similar celui din relațiile (4.30).

Exemplul nr. 4.8. Aplicarea modelului elaborat pentru alocarea optimă a mașinilor

Într-un atelier piesele / reperele P_1, P_2, P_3, P_4 pot fi prelucrate pe trei mașini M_1, M_2, M_3 cu rentabilitate diferită, iar ordinea de prelucrare nu contează. În tabelul nr. 4.35 se dau datele problemei. Se presupune că se lucrează $T = 16$ ore și costurile și prețurile se exprimă în mii lei.

Utilizând relația (4.29) și ținând cont că $T = 16$ ore, tabelul nr.4.35 se transformă în tabelul nr.4.36, care este tabelul unei probleme de transport.

Tabelul nr.4.35.

P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	NUMĂR MAȘINI a_i
M_i					
M_1	200	129	80	55	30
M_2	280	120	70	55	25
M_3	180	141	65	65	40
b_j	100	200	250	20	
Cerere produse / zi					

h_j Număr ore necesar prel./ prod.	4	3	2	1	
p_j preț unitar produs	300	150	100	70	

Tabelul nr.4.36

P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	a_i Timp mașină disponibil (Oferta)
M_i					
M_1	25	7	10	15	480
M_2	5	10	15	15	400
M_3	30	3	17.5	5	640
b_j Timp mașină necesar (Cererea)	400	600	500	20	1520

De exemplu,

$$a_1' = T \cdot a_1 = 16 \cdot 30 = 480 \text{ ore.mașină}$$

$$b_1' = b_1 \cdot h_1 = 100 \cdot 4 = 400 \text{ ore.produs de prelucrat (ore.mașină)}$$

$$q_{11} = \frac{p_1 - c_{11}}{h_1} = \frac{300 - 200}{4} = \frac{100}{4} = 25 \text{ mii lei/oră (} q_{ij} \text{ se calculează pe coloană)}$$

$$q_{21} = \frac{p_1 - c_{21}}{h_1} = \frac{300 - 280}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ mii lei/oră}$$

$$q_{31} = \frac{p_1 - c_{31}}{h_1} = \frac{300 - 180}{4} = \frac{120}{4} = 30 \text{ mii lei/oră}$$

$$q_{12} = \frac{p_2 - c_{12}}{h_2} = \frac{150 - 129}{3} = \frac{21}{3} = 7 \text{ mii lei/oră}$$

Se calculează analog celelalte elemente din tabelul nr. 4.36.

Se utilizează programul Qsb, modulul Transshipment Problem pentru maxim, obținându-se soluția optimă din tabelul nr. 4.37.

Se obține (teoretic):

$$\max f = 25150 \text{ mii lei} = 25\,150\,000 = f_{\max}$$

Practic (din cauza rotunjirilor la partea întregă a lui $[X_{ij}/h_j]$): $\max f = 25\,126\,000 \text{ lei} = 25\,126\,000 = 65 \cdot 100 + 66 \cdot 21 + 20 \cdot 15 + 133 \cdot 30 + 35 \cdot 120 + 250 \cdot 35 \text{ mii lei}$ (s-a utilizat profitul unitar exprimat în lei/bucată de produs, de exemplu : $100 \text{ lei/produs } P_1 = 300 - 200$)

Deci, în tabelele nr.4.37 și nr.4.37a :

- din piesa / reperul P_1 se prelucerează cantitatea de 260 ore.mașină, adică $260/4 = 65$ bucăți pe mașina M_1 și cantitatea de 140 ore.mașină , adică $140/4 = 35$ bucăți pe mașina M_3 ;
- din piesa / reperul P_2 se prelucerează cantitatea de 200 ore.mașină, adică $[200/3] = 66$ bucăți pe mașina M_1 și cantitatea de 400 ore.mașină, adică $[400/3] = 133$ bucăți pe mașina M_2 ;
- piesa / reperul P_3 se prelucerează cantitatea de 500 ore.mașină, adică $500/2 = 250$ bucăți pe mașina M_3 ;
- piesa / reperul P_4 se prelucerează cantitatea de 20 ore.mașină, adică $20/1 = 20$ bucăți pe mașina M_1 .

Tabelul nr.4.37

P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	a_i [ore.mașină] Timp mașină disponibil (Oferta)
M_i					
M_1	25 260	7 200	10 0	15 20	480
M_2	5 0	10 400	15 0	15 0	400
M_3	30 140	3 0	17.5 500	5 0	640
b_j [ore.produș] Timp mașină necesar (Cererea)	400	600	500	20	1520

Tabelul nr.4.37a. Soluția optimă exprimată în bucăți

P_j	P_1	P_2	P_3	P_4
M_i				
M_1	100 65	21 66	20 0	15 20
M_2	20 0	30 133	30 0	15 0
M_3	120 35	9 0	35 250	5 0

Dacă se consideră aceeași problemă dată de tabelul nr.4.35 și tabelul nr.4.36 , dar criteriul de optimizare să fie cel de minimum, deci $\min f$, se obține soluția cea mai nefavorabilă și nedorită în tabelul nr. 4.38 și în tabelul nr. 4.38a.

Tabelul nr 4.38. Soluția defavorabilă, non-optimală

P_j	P_1	P_2	P_3	P_4	a_i [ore.mașină] Timp masina disponibil (Oferta)
M_i					
M_1	25 0	7 0	10 480	15 0	480
M_2	5 400	10 0	15 0	15 0	400
M_3	30 0	3 600	17.5 20	5 20	640
b_j [ore.produș] Timp masina necesar (Cererea)	400	600	500	20	1520

Tabelul nr.4.38a. Soluția defavorabilă, non-optimală, exprimată în bucăți

P_j	P_1	P_2	P_3	P_4
M_i				
M_1	100 0	21 0	20 240	15 0
M_2	20 100	30 0	30 0	15 0
M_3	120 0	9 300	35 10	5 20

Teoretic, $\min f = 9050$ mii lei = 9 050 000 lei = $f_{\min}$.

Practic, din tabelul nr.4.38a rezultă $\min f = 9\,950$ mii lei = 9 950 000 lei = $100 \cdot 20 + 300 \cdot 9 + 240 \cdot 20 + 10 \cdot 35 + 20 \cdot 5$ mii lei

Se obține intervalul teoretic în care se poate încadra profitul, deci:

$$f \in [f_{\min}, f_{\max}]$$

sau în cazul concret al aplicației considerate (teoretic) :

$$f \in [9\,050\,000; 25\,150\,000].$$

Practic, $f \in [9\,950\,000; 25\,126\,000]$.

4. 11. Problema de transport în programarea și planificarea producției

Într - un sistem de producție (atelier, secție, întreprindere) un anumit produs are cererea asigurată pe un an de zile, defalcată pe cele 4 trimestre, b_j , $b_j > 0$, $j = 1, 2, 3, 4$. Capacitatea de producție în condiții normale este de a_i unități de produs pe trimestru, $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, produsele au ciclul de fabricație mai mic de o lună, iar costul unitar pe produs este c unități monetare,

$$c > 0,$$

deci cererea este mai mare decât oferta.

Dacă într - un trimestru se depășește planul de fabricație, fabricându-se mai mult decât se cere pe piață în trimestrul respectiv, se poate vinde trimestrul următor, dar apar cheltuieli de stocaj în plus egale cu α unități monetare pe unitatea de produs și trimestru.

Dacă se lucrează în zilele libere sau în alte condiții, se poate fabrica peste plan în fiecare trimestru câte d_i unități de produs, dar cu costurile unitare mărite și egale cu $c + \beta$ pe produs, $c > 0$, $\beta > 0$. Se cere să se determine un plan de producție pe cele 4 trimestre (1 an), care să satisfacă cererea și costurile totale de producție (costuri de producție și costuri de stocaj) să fie minime.

Pentru rezolvarea problemei, se va transforma într-o problemă de transport bidimensională de minimizare. Se vor nota cu A_1, A_2, A_3, A_4 stările sistemului de producție în cele 4 trimestre când capacitatea sa este a_i , $i = 1, 2, 3, 4$ și costurile unitare pe produs sunt c , iar cu A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 stările sistemului de producție în cele 4 trimestre când produce peste plan d_i unități de produs pe trimestru, $i = 1, 2, 3, 4$, cu costurile unitare pe produs egale cu $c + \beta$. Se vor considera $A_1, A_2, A_3, A_4, A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$ ca și depozite (oferta), iar cele 4 trimestre T_1, T_2, T_3, T_4 ca și centre de consum (cererea). Se sintetizează aceste elemente în tabelul 4.40.

Tabelul nr.4.40.

A_i	T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	Disponibil (Oferta) a_i
A_1		c	$c + \alpha$	$c + 2\alpha$	$c + 3\alpha$	a_1
A_2			c	$c + \alpha$	$c + 2\alpha$	a_2
A_3				c	$c + \alpha$	a_3
A_4					c	a_4
$A_5 = A'_1$	$c + \beta$	$c + \beta + \alpha$	$c + \beta + 2\alpha$	$c + \beta + 3\alpha$		d_1
$A_6 = A'_2$		$c + \beta$	$c + \beta + \alpha$	$c + \beta + 2\alpha$		d_2
$A_7 = A'_3$			$c + \beta$	$c + \beta + \alpha$		d_3
$A_8 = A'_4$				$c + \beta$		d_4
Necesar (Cererea) b_j	b_1	b_2	b_3	b_4		S_1 S_2

$$S_1 = \sum_{j=1}^4 a_j + \sum_{j=1}^4 d_j \quad (4.35)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^4 b_j$$

S-a notat costul unitar egal cu ∞ (infinit) când este imposibilă folosirea situației respective, iar pentru rezolvarea pe calculator pentru înlocuirea lui ∞ se alege o valoare mai mare decât celelalte elemente ale tabelului 4.40.

Modelul matematic este dat de relațiile (4.36).

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.36)$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij}$$

$$\min f(X)$$

unde: X_{ij} reprezintă cantitatea livrată din A_i în T_j cu costul unitar c_{ij} ,

și

$$X = (X_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Costurile c_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, sunt date în tabelul nr. 4.40.

Aceasta este o problemă de transport bidimensională de minimizare ce se rezolva cu algoritmul de transport (algoritmul potențialelor) de minimizare sau prin utilizarea unui program calculator, obținându-se soluția optimă ($m = 8$, $n = 4$ în exemplul considerat).

Problema se rezolvă analog și în cazul când livrările către piață sunt lunare, modelul matematic este (4.36), dar se modifică m și n , $m = 24$, $n = 12$, produsele au ciclul de fabricație mai mic de o lună, iar costurile unitare, oferta și cererea se referă la o lună și sunt cele din tabelul nr. 4.41.

Se pot considera și alte orizonturi de timp: săptămâna, decada etc. pentru modelul (4.36), cu valori specifice ale lui m , n , c_{ij} , a_i , b_j , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Tabelul nr.4.41.

L_j A_i	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	Disponibil a_i
A_1	c	$c+\alpha$	$c+2\alpha$	$c+3\alpha$	$c+4\alpha$	$c+5\alpha$	$c+6\alpha$	$c+7\alpha$	$c+8\alpha$	$c+9\alpha$	$c+10\alpha$	$c+11\alpha$	a_1
A_2		c	$c+\alpha$	$c+2\alpha$	$c+3\alpha$	$c+4\alpha$	$c+5\alpha$	$c+6\alpha$	$c+7\alpha$	$c+8\alpha$	$c+9\alpha$	$c+10\alpha$	a_2
A_3			c	$c+\alpha$	$c+2\alpha$	$c+3\alpha$	$c+4\alpha$	$c+5\alpha$	$c+6\alpha$	$c+7\alpha$	$c+8\alpha$	$c+9\alpha$	a_3
A_4				c	$c+\alpha$	$c+2\alpha$	$c+3\alpha$	$c+4\alpha$	$c+5\alpha$	$c+6\alpha$	$c+7\alpha$	$c+8\alpha$	a_4
A_5					c	$c+\alpha$	$c+2\alpha$	$c+3\alpha$	$c+4\alpha$	$c+5\alpha$	$c+6\alpha$	$c+7\alpha$	a_5
A_6						c	$c+\alpha$	$c+2\alpha$	$c+3\alpha$	$c+4\alpha$	$c+5\alpha$	$c+6\alpha$	a_6
A_7							c	$c+\alpha$	$c+2\alpha$	$c+3\alpha$	$c+4\alpha$	$c+5\alpha$	a_7
A_8								c	$c+\alpha$	$c+2\alpha$	$c+3\alpha$	$c+4\alpha$	a_8
A_9									c	$c+\alpha$	$c+2\alpha$	$c+3\alpha$	a_9
A_{10}										c	$c+\alpha$	$c+2\alpha$	a_{10}
A_{11}											c	$c+\alpha$	a_{11}
A_{12}												c	a_{12}
A_{13}	$c+\beta$	$c+\beta + \alpha$	$c+\beta + 2\alpha$	$c+\beta + 3\alpha$									d_1
A_{14}		$c+\beta$	$c+\beta + \alpha$	$c+\beta + 2\alpha$									d_2
A_{15}			$c+\beta$	$c+\beta + \alpha$	$c+\beta + 2\alpha$								d_3
A_{16}				$c+\beta$	$c+\beta + \alpha$	$c+\beta + 2\alpha$							d_4

A_{17}					$c+\beta$	$c+\beta+\alpha$	$c+\beta+2\alpha$						d_5
A_{18}						$c+\beta$	$c+\beta+\alpha$	$c+\beta+2\alpha$					d_6
A_{19}							$c+\beta$	$c+\beta+\alpha$	$c+\beta+2\alpha$				d_7
A_{20}								$c+\beta$					d_8
A_{21}									$c+\beta$				d_9
A_{22}										$c+\beta$			d_{10}
A_{23}											$c+\beta$		d_{11}
A_{24}												$c+\beta$	d_{12}
b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	S_1
													S_2

Exemplul nr. 4.9. Problema de transport în programarea producției

O firmă care fabrică un anumit produs are cererea asigurată pe un an de zile (sau alt orizont de timp), defalcată pe cele 4 trimestre, b_j , $b_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, 4$. astfel:

$$b_1 = 150, b_2 = 180, b_3 = 200, b_4 = 210.$$

Tabelul nr.4.42.

A_i	T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	Disponibil (Oferta) a_i
A_1		40 (c)	$40 + 10 = 50$ (c + α)	$40 + 2 \cdot 10 = 60$ (c + 2α)	$40 + 3 \cdot 10 = 70$ (c + 3α)	$a_1 = 90$
A_2		9999 (0)	40 c	$40 + 10 = 50$ (c + α)	$40 + 2 \cdot 10 = 60$ (c + 2α)	$a_2 = 100$
A_3		9999 (0)	9999 (0)	40 (c)	$40 + 10 = 50$ (c + α)	$a_3 = 105$
A_4		9999 (0)	9999 (0)	9999 (0)	40 (c)	$a_4 = 112$
$A_5 = A'_1$		$40 + 25 = 65$ (c + β)	$40 + 25 + 10 = 75$ (c + $\beta + \alpha$)	$40 + 25 + 2 \cdot 10 = 85$ (c + $\beta + 2\alpha$)	$40 + 25 + 3 \cdot 10 = 95$ (c + $\beta + 3\alpha$)	$d_1 = 50$
$A_6 = A'_2$		9999 (0)	$40 + 25 = 65$ (c + β)	$40 + 25 + 10 = 75$ (c + $\beta + \alpha$)	$40 + 25 + 2 \cdot 10 = 85$ (c + $\beta + 2\alpha$)	$d_2 = 55$
$A_7 = A'_3$		9999	9999	$40 + 25 = 65$	$40 + 25 + 10$	$d_3 = 60$

	0	0	$(c + \beta)$	$= 75$ $(c + \beta + \alpha)$	
$A_8 = A'_4$	9999 0	9999 0	9999 0	$40 + 25 = 65$ $(c + \beta)$	$d_4 = 63$
Necesar (Cererea) b_i	$b_1 = 150$	$b_2 = 180$	$b_3 = 200$	$b_4 = 210$	$S_1 = 635$ $S_2 = 740$

Capacitatea de producție în condiții normale este de a_i unități de produs pe trimestru, $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, produsele au ciclul de fabricație mai mic de o lună, iar costul unitar pe produs este c unități monetare,

$$c > 0, \quad ,$$

deci cererea este mai mare decât oferta. Valorile concrete sunt:

$$a_1 = 90, a_2 = 100, a_3 = 105, a_4 = 112, c = 40 \text{ u.m. (unități monetare)}$$

Dacă într-un trimestru se depășește planul de fabricație, fabricându-se mai mult decât se cere pe piață în trimestrul respectiv, se poate vinde trimestrul următor, dar apar cheltuieli de stocaj în plus egale cu α unități monetare pe unitatea de produs și trimestru, $\alpha = 10$ u.m. Dacă se lucrează în zilele libere sau în alte condiții, se poate fabrica peste plan în fiecare trimestru câte d_i unități de produs, $i = 1, 2, 3, 4$, dar cu costurile unitare mărite și egale cu $c + \beta$ pe produs, $c > 0, \beta > 0$, astfel: $d_1 = 50, d_2 = 55, d_3 = 60, d_4 = 63, \beta = 25$.

Se cere să se determine un plan de producție pe cele 4 trimestre (1 an), care să satisfacă cererea și costurile totale de producție (costuri de producție și costuri de stocaj) să fie minime.

Tabelul nr.4.43.

A_i	T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	Disponibil a_i
A_1		40 90	50 0	60 0	70 0	$a_1 = 90$
A_2		9999 0	40 100	50 0	60 0	$a_2 = 100$
A_3		9999 0	9999 0	40 105	50 0	$a_3 = 105$
A_4		9999 0	9999 0	9999 0	40 112	$a_4 = 112$
$A_5 = A'_1$		65 50	75 0	85 0	95 0	$d_1 = 50$
$A_6 = A'_2$		9999 0	65 55	75 0	85 0	$d_2 = 55$
$A_7 = A'_3$		9999 0	9999 0	65 60	75 0	$d_3 = 60$
$A_8 = A'_4$		9999	9999	9999	65	$d_4 = 63$

	0	0	0	63	
Necesar b_j	$b_1 = 150$	$b_2 = 180$	$b_3 = 200$	$b_4 = 210$	$S_1 = 635$ $S_2 = 740$

$$S_1 = \sum_{i=1}^4 a_i + \sum_{i=1}^4 d_i = 407 + 228 = 635 \text{ unități de produs}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^4 b_j = 150 + 180 + 200 + 210 = 740 \text{ unități de produs}$$

Pentru costul egal cu (acest cost înseamnă că situația respectivă nu poate avea loc) se alege o valoare mai mare decât toate costurile din tabelul nr. 4.42, de exemplu 9999.

Se va rezolva problema de transport de minimizare din tabelul nr. 4.42 cu programul Qsb, iar soluția optimă este în tabelul nr. 4.43 și $\min f = 31100$ u.m.

Din tabelul nr. 4.43 care conține soluția optimă de fabricație, $\min f = 31100$ u.m., rezultă că fabricația se va desfășura astfel:

- se vor fabrica $S_1 = 635$ unități de produs, din care 407 unități de produs cu costul $c = 40$ u.m, iar 228 unități de produs cu costul unitar de fabricație mai mare, egal cu $c + \beta = 40 + 25 = 65$ u.m. ;

- în primul trimestru se vor fabrica $X_{11} = 90$ unități de produs cu costul unitar de fabricație $c = 40$ u.m, iar $X_{51} = 50$ unități de produs cu costul unitar de fabricație mai mare, egal cu $c + \beta = 40 + 25 = 65$ u.m.

- în al doilea trimestru se vor fabrica $X_{22} = 100$ unități de produs cu costul unitar de fabricație $c = 40$ u.m, iar $X_{62} = 55$ unități de produs cu costul unitar de fabricație mai mare, egal cu $c + \beta = 40 + 25 = 65$ u.m.

- în al treilea trimestru se vor fabrica $X_{33} = 105$ unități de produs cu costul unitar de fabricație $c = 40$ u.m, iar $X_{73} = 60$ unități de produs cu costul unitar de fabricație mai mare, egal cu $c + \beta = 40 + 25 = 65$ u.m.

- în al patrulea trimestru se vor fabrica $X_{44} = 112$ unități de produs cu costul unitar de fabricație $c = 40$ u.m, iar $X_{84} = 63$ unități de produs cu costul unitar de fabricație mai mare, egal cu $c + \beta = 40 + 25 = 65$ u.m.

4. 12. Modele liniare de repartizare și transfer de fonduri

O întreprindere are nevoie pentru o investiție de o sumă de bani S_1 eşalonată în n perioade de timp, cu necesarul fiecărei perioade B_j egal cu b_j , $j = 1, 2, \dots, n$ și

$$S_1 = \dots$$

Întreprinderea va solicita creditarea investiției la m bănci A_i (sau aceeași bancă care la momentele respective este în starea A_i) care dispun pentru această investiție a întreprinderii de sumele a_i , iar costul unitar (dobânda) al sumelor de la banca A_i în perioada B_j este c_{ij} unități monetare, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Se observă că este vorba despre o problemă de transport, iar elementele sale sunt similare celor din tabelul 4.39.

Tabelul nr.4.39

B_j	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil a_i
A_i					
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Necesar b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i$ $\sum_{j=1}^n b_j$

Întreprinderea dorește să obțină banii necesari cu un cost total minim, deci din punctul de vedere al întreprinderii se poate utiliza problema de tip transport de minimizare, cu modelul matematic dat de relațiile (4.33), soluția optimă $X^{\min} = (X_{ij}^{\min})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ și valoarea minimă a funcției obiectiv este $f_{\min}$.

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.33)$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij}$$

$$\min f(X)$$

unde: $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$, $X = (X_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

deci oferta este egală cu cererea, problema de transport este echilibrată și se rezolvă cu algoritmul potențialelor pentru problema de minimizare sau pe calculator cu programul Qsb.

În același timp, băncile doresc să obțină un câștig maxim posibil din această afacere (funcția f reprezintă prețul, dobânda), deci pentru bănci elementele problemei sunt sintetizate tot în tabelul 4.39, dar modelul matematic este o problemă de transport de maximizare dată de relațiile (4.34) cu soluția optimă $X^{\max}$ și valoarea maximă a funcției obiectiv $f_{\max}$.

$$X^{\max} = (X_{ij}^{\max}), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n X_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
\sum_{i=1}^m X_{ij} &= b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
f(X) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \\
\max f(X)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Intervalul de încadrare a costului capitalului este

$$f \in [f_{\min}, f_{\max}]$$

și în urma negocierii dintre întreprindere și bănci va rezulta o combinație convexă a soluției minime și maxime,

$$f = \lambda \cdot f_{\min} + (1 - \lambda) \cdot f_{\max}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

care va fi costul total al capitalului.

Exemplul nr. 4.10.

Se consideră $m = 3$ bănci B_i , $i = 1, 2, 3$ și $n = 4$ clienți, C_j , $j = 1, 2, 3, 4$, cu oferta de bani, cererea de bani și costurile date în tabelul nr.4.45.

Tabelul nr.4.45

B_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	Oferta a_i (Lei)
B_1		5%	3%	6%	7%	100
B_2		2%	4%	7%	3%	80
B_3		4%	6%	5%	8%	120
Cererea b_j (Lei)		75	55	40	130	$S = 300$

Trebuie determinată ce sumă va fi luată de la fiecare bancă astfel încât costul total al creditării să fie minim. Se va utiliza modelul problemei de transport de minimizare și se va rezolva cu programul Qsb - modulul Transshipment problem, iar soluția optimă este în tabelul nr.4.46.

Tabelul nr.4.46

B_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	Oferta a_i (Lei)
B_1	5%	0	55	0	45	100
B_2	2%	0	0	0	80	80
B_3	4%	75	0	40	5	120
Cererea b_j (Lei)	75	55	40	130		$S = 300$

Min $f = 1260/100$ lei = 12.6 lei.

Soluția defavorabilă, nedorită de firmă, este în tabelul nr.4.47, max $f = 1920/100$ lei = 19.2 lei.

Tabelul nr.4.47

B_i	C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	Oferta a_i
B_1	5%	75	0	0	25	100
B_2	2%	0	40	40	0	80
B_3	4%	0	15	0	105	120
Cererea b_j	75	55	40	130		$S = 300$

Rezultă $f \in [12.60, 19.20]$.

Se vor modifica costurile c_{ij} (se va analiza oferta concretă a unor bănci) și se va determina soluția optimă.

4.13. PROBLEMA DE AFECTARE (REPARTIZARE, ASIGNARE) A RESURSELOR

A afecta înseamnă a aloca, a repartiza, a atribui, cu respectarea unor condiții.

Într-o problemă de alocare de tip afectare (repartizare, asignare) sunt n resurse (tabelul nr. 4.48): $R_1, R_2, \dots, R_n$, care trebuie repartizate la n activități: $A_1, A_2, \dots, A_n$, astfel încât fiecare resursă să fie repartizată la câte o singură activitate și fiecărei activități să i se repartizeze câte o singură resursă. O astfel de repartizare se poate face în mai multe moduri, dar alegerea trebuie să se facă după un criteriu. Repartizarea resursei R_i pe activitatea A_j implică costul (profitul, beneficiul) $c_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$.

Valoarea c_{ij} poate avea semnificația concretă de cost, consum de timp, procentaj de rebuturi etc. și în acest caz este vorba de o problemă de afectare de minim.

Dacă c_{ij} are semnificația de beneficiu (profit) unitar, preț, randament etc., atunci problema de afectare este de maxim. Într-o problemă de repartizare cu n resurse și n activități există $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ posibilități de a asocia cele n resurse cu cele n activități, dar numai una sau câteva satisfac un anumit criteriu de optim (minim sau maxim). Să se repartizeze resursele pe activități, astfel încât costul total să fie minim. (în cazul problemei de repartizare de maxim se cere max f și c_{ij} au semnificația de profit, preț etc., deci profitul trebuie să fie maxim)

Legătura dintre resursa R_i și activitatea A_j este data de variabila X_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, atașată acestora, care poate lua valorile zero sau unu.

Tabelul nr. 4.48

R_i	A_j	A_1	A_2	$\dots$	A_n
R_1		C_{11}	C_{12}	$\dots$	C_{1n}
R_2		C_{21}	C_{22}	$\dots$	C_{2n}
$\dots$					
R_n		C_{n1}	C_{n2}	$\dots$	C_{nn}

Variabila X_{ij} se definește astfel:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{daca resursa } R_i \text{ este repartizata activitatii } A_j \\ 0, & \text{daca resursa } R \text{ nu este repartizata activitatii } A_j \end{cases}$$

Tabelul nr.4.49

R_i	A_j	A_1	A_2	$\dots$	A_n
R_1		X_{11}	X_{12}	$\dots$	X_{1n}
R_2		X_{21}	X_{22}	$\dots$	X_{2n}
$\dots$					
R_n		X_{n1}	X_{n2}	$\dots$	X_{nn}

Problema de repartizare (4.47) poate avea semnificația concretă a repartizării a n muncitori cu calificări diferite pe n mașini sau n lucrări, astfel încât costul sau timpul total al prelucrării să fie minim sau rebuturile să fie minime, când se cunosc costurile unitare c_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$. Modelul matematic al **problemei de afectare** (repartizare, asignare) de **minim** este dat de relațiile (4.47).

În mod similar cu relațiile (4.47) este cazul problemei de repartizare de maxim, doar că se cere max f și c_{ij} au semnificația de profit, preț etc. Modelul matematic al **problemei de afectare** (repartizare, asignare) de **maxim** este dat de relațiile (4.48).

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n X_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\
\sum_{i=1}^n X_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; \\
X_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; \\
f &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \\
\min f
\end{aligned}
\tag{4.47}$$

Problema de afectare (repartizare, asignare) de **maxim** este (4.48).

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n X_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\
\sum_{i=1}^n X_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; \\
X_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; \\
f &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \\
\max f
\end{aligned}
\tag{4.48}$$

Problema din relațiile (4.47) este o problemă de transport degenerată, se poate rezolva cu algoritmul de transport sau cu algoritmul ungar (Kuhn-Egervahry), respectiv prin utilizarea programelor calculator Qsb - modulul assignment problem, Dsspom - modulul assignment method sau alte programe.

Exemplul nr. 4.11.

Să se repartizeze șase muncitori $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ pe șase mașini (lucrări) $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ astfel încât costul total al repartizării să fie minim. Costurile sunt în tabelul nr. 4.50., iar în matricea costurilor C , c_{ij} reprezintă costul (exprimat în unități monetare) repartizării muncitorului M_i pe mașina T_j , $i, j = 1, 2, \dots, 6$. Trebuie să se determine soluția optimă și soluția cea mai defavorabilă, precum și intervalul de încadrare al costurilor.

Tabelul nr. 4.50

M_i	T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
M_1		5	3	8	6	10	4
M_2		11	7	9	4	5	2
M_3		13	10	5	7	8	9
M_4		7	12	4	3	6	5
M_5		9	5	10	12	13	11
M_6		4	9	7	5	4	3

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 6 & 10 & 4 \\ 11 & 7 & 9 & 4 & 5 & 2 \\ 13 & 10 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 9 & 5 & 10 & 12 & 13 & 11 \\ 4 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Modelul matematic al problemei de afectare de minim:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 X_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, 6; \\ \sum_{i=1}^6 X_{ij} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, 6; \\ X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6; \quad j = 1, 2, \dots, 6; \\ X_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6; \quad j = 1, 2, \dots, 6; \end{aligned}$$

$$\min f$$

Se rezolvă cu programul Qsb, modulul *assignment problem* pentru problemă de minim, iar soluția optimă este:

Min $f = 24$ u. m. $= 5 + 2 + 5 + 3 + 5 + 4$,
și este dată de repartizarea din tabelul nr.4.51.

Tabelul nr.4. 51. Repartizarea optimă a muncitorilor pe mașini

M_i	T_j	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
M_1		1	0	0	0	0	0
M_2		0	0	0	0	0	1
M_3		0	0	1	0	0	0
M_4		0	0	0	1	0	0
M_5		0	1	0	0	0	0
M_6		0	0	0	0	1	0

Deci, din tabelul nr.4.51, rezultă soluția optimă:

- muncitorul M_1 pe mașina T_1 ;
- muncitorul M_2 pe mașina T_6 ;
- muncitorul M_3 pe mașina T_3 ;
- muncitorul M_4 pe mașina T_4 ;
- muncitorul M_5 pe mașina T_2 ;
- muncitorul M_6 pe mașina T_5 .

Se vor presenta ecrane Qsb.

```

QSB

Welcome to QSB <Quantitative Systems for Business>!
You may choose from following management science decision support systems:

Code      Program
No.       Program

1 -- Linear programming
2 -- Integer linear programming
3 -- Transshipment problem
=>4 -- Assignment problem
5 -- Network modeling
6 -- Project scheduling -- CPM
7 -- Project scheduling -- PERT
8 -- Dynamic programming

9 -- Inventory theory
A -- Queuing theory
B -- Queuing system simulation
C -- Decision/probability theory
D -- Markov process
E -- Time series forecasting
F -- Specify printer/display adapter
G -- Exit from QSB

** QSB<I>: Programs 1 to 5, QSB<II>: Programs 6 to E **

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.

```

```

QSB

Welcome to your Assignment Problem <ASMP> Decision Support System!
The options available for ASMP are as follows.
If you are a first-time user, you might benefit from option 1.

Option      Function

1 ---- Overview of ASMP Decision Support System
=>2 ---- Enter new problem
3 ---- Read existing problem from disk(ette)
4 ---- Show input data
5 ---- Solve problem
6 ---- Save problem on disk(ette)
7 ---- Modify problem
8 ---- Show final solution
9 ---- Return to the program menu
0 ---- Exit from QSB

Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.

```

QSB

ASMP Entry for pa

Please observe the following conventions when entering a problem:

- <1> Respond to the questions which seek general information about the problem.
- <2> Then enter object and task names if you don't use default names.
- <3> Then enter cost/profit coefficients for each potential assignment. A very large +/- value or +M/-M could be entered for an impossible assignment.
- <4> After you enter your data, press the ENTER key.
- <5> On the same screen page, you may correct errors by pressing the BACKSPACE key to move the cursor to the correct position when fixed format is used.
- <6> When you are satisfied with the data on a page, press the SPACE BAR.
- <7> When entering the problem, press the Esc key to go to a previous page; press the / key to go to the next page.

Do you want to maximize <1> or minimize <2> criterion? <Enter 1 or 2><2> >

How many objects are there in your problem? <Enter number ~ 500> <6> >

How many tasks are there in your problem? <Enter number ~ 500> <6> >

Do you want to use the default names <01,...,0n; T1,...,Tn><Y/N>? <y> >

Press the SPACE BAR to continue if your entries are correct.

QSB

Enter the Cost/Profit Coefficients Page 1

Objects	Tasks									
01	T1:	5	T2:	3	T3:	8	T4:	6	T5:	10
	T6:	4								
02	T1:	11	T2:	7	T3:	9	T4:	4	T5:	5
	T6:	2								
03	T1:	13	T2:	10	T3:	5	T4:	7	T5:	8
	T6:	9								
04	T1:	7	T2:	12	T3:	4	T4:	3	T5:	6
	T6:	5								
05	T1:	9	T2:	5	T3:	10	T4:	12	T5:	13
	T6:	11								
06	T1:	4	T2:	9	T3:	7	T4:	5	T5:	4
	T6:	3								

Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.

QSB

Summary of Assignments for pa Page : 1

Object	Task	Cost/Prof.	Object	Task	Cost/Prof.
01	T1	5.000	04	T4	3.000
02	T6	2.000	05	T2	5.000
03	T3	5.000	06	T5	4.000

Minimum value of OBJ = 24 Total iterations = 2

Press any key to continue.

Se va determina soluția defavorabilă, nedorită, deci problemă de maxim. Modelul matematic al problemei de afectare de maxim:

$$\sum_{j=1}^6 X_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, 6;$$

$$\sum_{i=1}^6 X_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, 6;$$

$$X_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 6;$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, 6;$$

$$\max f$$

Soluția defavorabilă, care nu este dorită, se determină punând condiția ca repartizarea muncitorilor pe mașini să se facă astfel încât să avem max f, rezolvând cu Qsb, modulul *assignment problem* pentru problemă de maxim, :

Max f = 61 u. m. = 10 + 11 + 9 + 12 + 12 + 7

, este dată de repartizarea din tabelul nr.4.52.

Tabelul nr. 4.52. Repartizarea defavorabilă a muncitorilor pe mașini

T _j	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆
M _i						
M ₁	0	0	0	0	1	0
M ₂	1	0	0	0	0	0
M ₃	0	0	0	0	0	1
M ₄	0	1	0	0	0	0
M ₅	0	0	0	1	0	0
M ₆	0	0	1	0	0	0

Deci, din tabelul nr.4.52, rezultă repartizarea cea mai defavorabilă, nedorită:

- muncitorul M₁ pe mașina T₅ ;
- muncitorul M₂ pe mașina T₁ ;
- muncitorul M₃ pe mașina T₆ ;

- muncitorul M_4 pe mașina T_2 ;
- muncitorul M_5 pe mașina T_4 ;
- muncitorul M_6 pe mașina T_3 .

Intervalul de încadrare a costului repartizării muncitorilor pe mașini este: $f \in [24, 61]$.
Evident, este dorită soluția optimă, deci cea pentru care $\min f = 24$ u.m.

Observații

1. Problema de afectare are sens și dacă sunt m resurse și n activități, $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Problema se echilibrează prin introducerea a $n - m$ resurse fictive pentru cazul $m < n$ (se completează matricea C cu $n - m$ linii nule), respectiv a $m - n$ activități fictive pentru cazul $m > n$ (se completează matricea C cu $m - n$ coloane nule), iar costul (profitul) unitar este zero în ambele cazuri. Pe calculator programul Qsb o echilibrează și apoi o rezolvă. Se va exemplifica prin modificarea exemplului nr.4.10. (cinci muncitori pe șase mașini sau șase muncitori pe cinci mașini).

Modelul matematic este (4.49).

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n X_{ij} &\leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\
 \sum_{i=1}^m X_{ij} &\leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} &= \min\{m, n\} \\
 X_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
 X_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; \\
 f &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot X_{ij} \\
 \min f
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Problema din relațiile (4.49), se poate rezolva cu algoritmul ungar (Kuhn-Egervahry), respectiv prin utilizarea programelor calculator Qsb - modulul assignment problem, Dsspom - modulul assignment method sau alte programe.

2. Se poate ca unele repartizări să nu fie posibile, sunt **interzise**. Dacă repartizarea resursei R_i pe activitatea A_j nu este posibilă, se atribuie variabilei X_{ij} valoarea ∞ , iar unde este posibil se poate lua $X_{ij} = 1$. Se va determina repartizarea care realizează $\min f$. Dacă la rezolvarea cu programul Qsb sau altfel apare o repartizare a unei resurse la o activitate cu valoarea ∞ (practic o valoare foarte mare), acea repartizare a resursei nu se acceptă, fiind acceptate doar repartizările cu valori finite. Pot rămâne resurse care nu sunt repartizate și activități fără resurse. Pentru problema de afectare de maxim, dacă repartizarea resursei R_i pe activitatea A_j nu este posibilă, se atribuie variabilei X_{ij} valoarea $-\infty$.

Exemplul nr. 4.12.

Într-o secție a unei întreprinderi se cumpără șapte mașini noi, notate $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7$ pe care trebuie să lucreze șapte muncitori care trebuie selectați dintre muncitorii firmei, dacă se poate. În tabelul nr.4.53 se prezintă posibilitățile de repartizare a muncitorilor X_i pe mașinile Y_j , funcție de calificarea lor, dacă este posibilă repartizarea se pune 1 în căsuța (i,j) , $i, j = 1, 2, \dots, 7$, iar unde nu este posibil se notează cu ∞ . Să se realizeze repartizarea muncitorilor firmei pe mașini, iar unde nu este posibil firma va trebui să angajeze.

Pe calculator se înlocuiește ∞ cu o valoare mai mare decât datele problemei, de exemplu 999. Dacă la rezolvarea cu programul Qsb apare o repartizare cu valoarea ∞ , acea repartizare nu se acceptă, fiind acceptate doar repartizările cu valori finite. Soluția optimă se obține cu programul Qsb.

Tabelul nr.4. 53

$X_i \backslash Y_j$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
X_1	1	∞	∞	1	∞	∞	∞
X_2	∞	1	1	∞	∞	∞	1
X_3	∞	1	∞	∞	1	∞	1
X_4	1	∞	∞	1	∞	1	∞
X_5	1	∞	∞	∞	∞	1	∞
X_6	∞	∞	∞	1	∞	1	∞
X_7	∞	1	∞	∞	1	∞	∞

Soluția optimă:

Object	Task	Cost/Prof.	Object	Task	Cost/Prof.
01	T1	1.000	05	T6	1.000
02	T3	1.000	06	T4	1.000
03	T7	1.000	07	T2	1.000
04	T5	999.0			

Minimum value of OBJ = 1005 Total iterations = 2

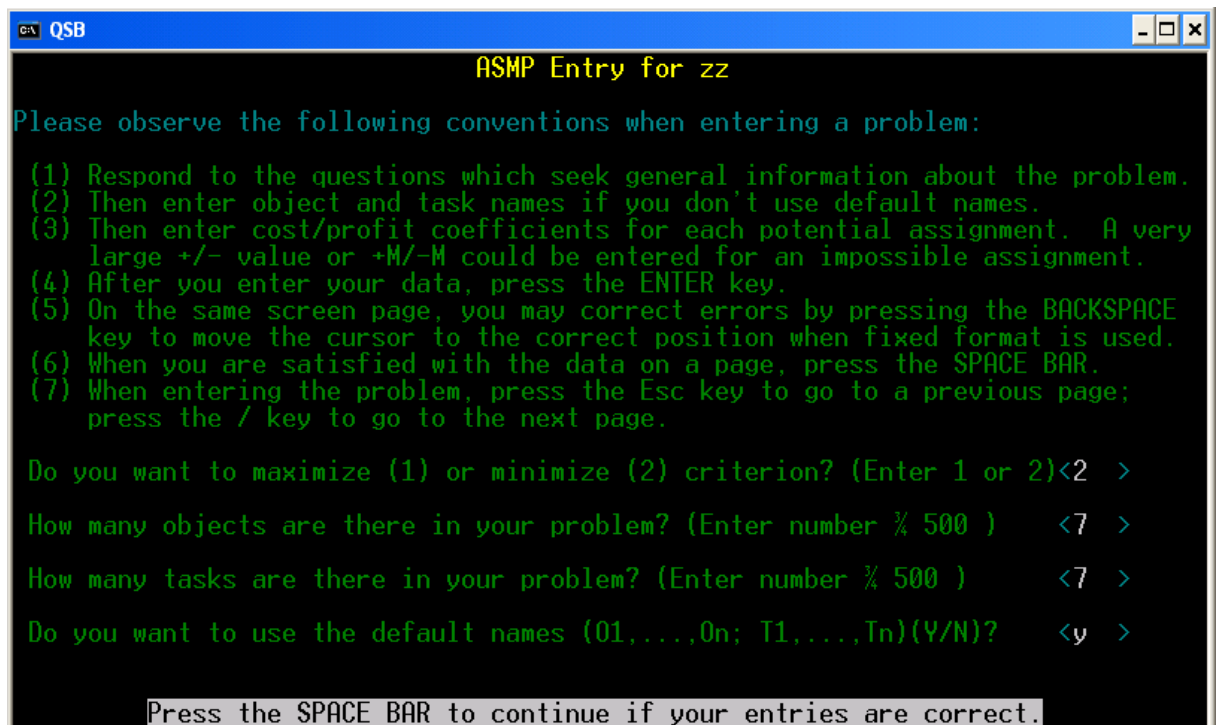
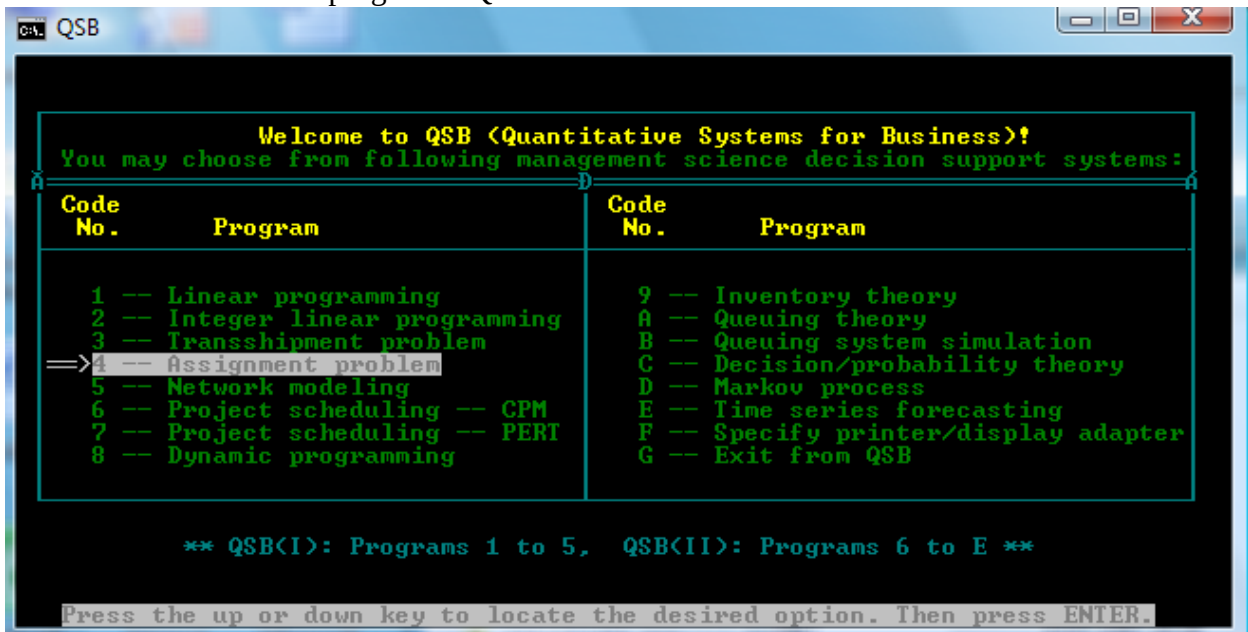
Press any key to continue.

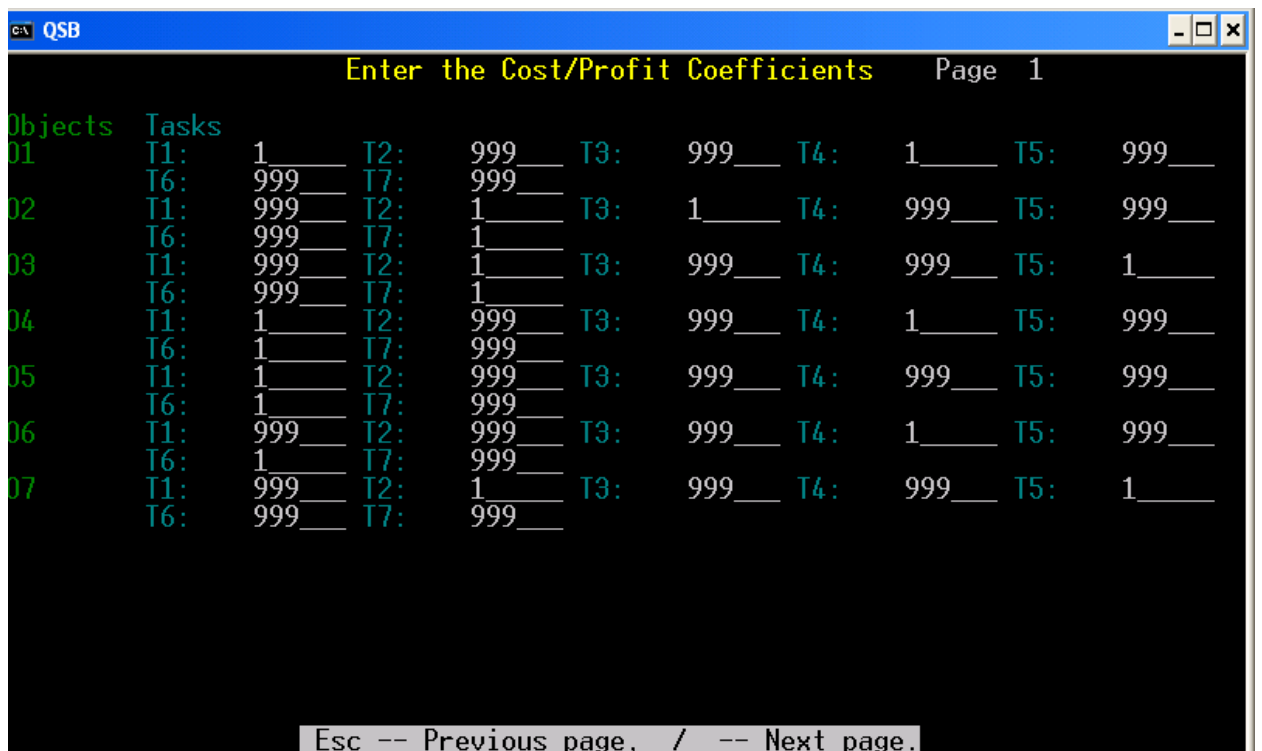
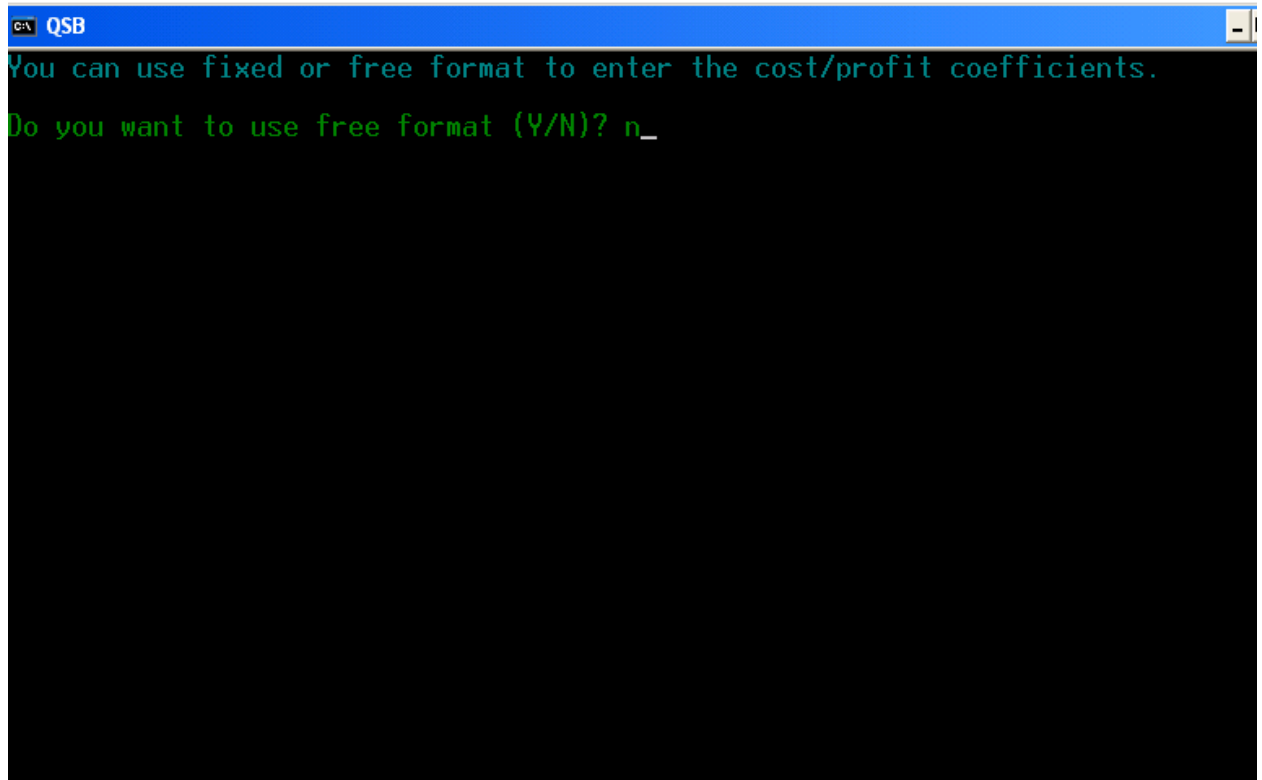
Deci, repartizarea va fi:

- muncitorul 1 se repartizează pe mașina 1;
- muncitorul 2 se repartizează pe mașina 3;
- muncitorul 3 se repartizează pe mașina 7;
- muncitorul 5 se repartizează pe mașina 6;
- muncitorul 6 se repartizează pe mașina 4;
- muncitorul 7 se repartizează pe mașina 2;

- muncitorul 4 nu se poate repartiza pe mașina 5 și își va păstra vechiul loc de muncă din firma respectivă, iar firma va trebui să angajeze un muncitor.

Ecranele de rezolvare cu programul Qsb:





Ordonanțarea fabricației

Ordonanțarea fabricației se încadrează în programarea operativă a producției care este o componentă importantă a managementului producției.

Ordonanțarea fabricației înseamnă determinarea ordinii optime de prelucrare (minimizarea timpului total de prelucrare, minimizarea timpului total al reglajelor, minimizarea timpului de stagnare a utilajelor etc.) a n produse pe m mașini, $m, n \in \mathbf{N}^*$.

Problema ordonanțării fabricației a apărut în literatura de specialitate în 1954 datorită lucrărilor lui S. M. Johnson care propune și rezolvă problema prelucrării a n produse, $n \in \mathbf{N}$, pe $m = 2$ mașini, deci ordonanțarea fabricației în sensul de minimizare a timpului total de prelucrare a celor n piese, elaborând un algoritm care îi poartă numele.

Principalele obiective ale ordonanțării fabricației sunt:

1. realizarea unei succesiuni tehnologice prescrise și logice a operațiilor pentru fiecare produs pus în fabricație;
2. încărcarea eficientă a capacităților de producție;
3. minimizarea duratei totale a ciclului de producție;
4. respectarea maximă a termenelor de livrare a produselor;
5. facilitarea alegerii variantei eficiente de program prin procesul decizional;
6. controlul, urmărirea și actualizarea programului de producție;
7. utilizarea forței de muncă minime în activitatea de programare și urmărire a producției.

A.) Ordonanțarea a n piese pe două mașini.

Pe două mașini A și B trebuie prelucrate n piese diferite, $n \in \mathbf{N}$, fluxul de lucru este în ordinea A, B. Fiecare piesă P_i are timpii de prelucrare pe cele două mașini dați de vectorul (a_i, b_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Se consideră că timpul de pregătire dintre lucrări este zero sau dacă există este același pentru fiecare piesă P_i , indiferent de lucrarea precedentă și de aceea se poate include în timpul de prelucrare, deci în (a_i, b_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Timpul de transport de la mașina A la mașina B se consideră zero. Trebuie realizată ordonanțarea fabricației în sensul de minimizare a timpului total de prelucrare a celor n piese.

Algoritmul lui Johnson

- Se determină:

$$\min (a_i, b_i) \\ 1 \leq i \leq n$$

Dacă minimul este a_k , se va planifica mai întâi piesa P_k .

- Dacă minimul este b_k , lucrarea P_k se va planifica ultima.

Se scoate piesa P_k din coada de așteptare la prelucrare, rămânând $n - 1$ piese de prelucrat și se repetă cei patru pași ai algoritmului.

Exemplul nr.2. 1.

Să se determine ordonanțarea a $n = 6$ piese pe $m = 2$ mașini A și B, dacă timpii de prelucrare pe fiecare mașină, exprimați în minute, sunt în tabelul nr. 1 și timpii de transport de la mașina A la B sunt zero. Se va face și graficul Gantt corespunzător.

Tabelul nr. 1

Piesa P_i	a_i	b_i	Sucesiunea
P_1	8	7	4
P_2	4	1	6
P_3	9	5	5
P_4	6	10	3
P_5	2	11	1
P_6	3	13	2

Sucesiunea de prelucrare este: $P_5, P_6, P_4, P_1, P_3, P_2$.

Timpul total de prelucrare rezultă din graficul Gantt, $T = 49$ minute.

B.) Ordonanțarea fabricației a n produse pe $m = 2$ mașini cu timpul de transport $t_i > 0$

Ordonanțarea fabricației a n produse pe $m = 2$ mașini A și B, când timpul de transport al produsului P_i de la mașina A la mașina B este t_i , $t_i > 0$, timpii de prelucrare sunt a_i , b_i , $i = 1, 2, \dots, n$, se face utilizând algoritmul Johnson pentru timpii a_i , b_i ,

$$a'_i = a_i + t_i \quad (1)$$

$$b'_i = b_i + t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Exemplul nr. 2.2.

Să se determine ordonanțarea a $n = 6$ piese pe $m = 2$ mașini A și B, dacă timpii de prelucrare pe fiecare mașină sunt în tabelul nr. 2 și timpii de transport de la mașina A la B sunt diferiți de zero, exprimați în minute. Se va face și graficul Gantt corespunzător.

Tabelul nr. 2

Piesa P_i	a_i	b_i	t_i	Sucesiunea
P_1	8	7	3	4
P_2	4	1	1	6
P_3	9	5	4	5
P_4	6	10	2	2
P_5	2	11	5	1
P_6	3	13	7	3

Tabelul nr.2 se transformă cu relațiile (1) în tabelul nr.3 căruia i se aplică algoritmul lui Johnson, rezultând succesiunea de prelucrare, care se notează apoi și în tabelul nr.2.

Tabelul nr. 3

Piesa P_i	a'_i	b'_i	Sucesiunea
P_1	11	10	4
P_2	5	2	6
P_3	13	9	5
P_4	8	12	2
P_5	7	16	1

P_6	10	20	3
-------	----	----	---

Succesiunea de prelucrare este: $P_5, P_4, P_6, P_1, P_3, P_2$. Se va face graficul Gantt.

C.) Ordonanțarea fabricației a n produse pe m = 3 mașini

La modul general ordonanțarea fabricației a n produse pe m = 3 mașini este suficient de complicată. Ordonanțarea fabricației a n produse pe m = 3 mașini A, B, C, în ordinea A, B, C, cu timpii de prelucrare dați prin vectorul: (a_i, b_i, c_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, dacă este verificată una din următoarele două condiții, (2) sau (3) este relativ simplă:

$$\min_{1 \leq i \leq n} a_i \geq \max_{1 \leq i \leq n} b_i \quad (2)$$

sau

$$\min_{1 \leq i \leq n} c_i \geq \max_{1 \leq i \leq n} b_i \quad (3)$$

Problema se reduce la ordonanțarea a n piese pe două mașini. Se calculează:

$$a'_i = a_i + b_i \quad (4)$$

$$b'_i = c_i + b_i, i = 1, 2, \dots, n;$$

și se aplică algoritmul lui Johnson considerând n piese pe două mașini A' și B' cu timpii (a'_i, b'_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, rezultând succesiunea optimă de prelucrare.

Exemplul nr. 2.3.

Să se determine ordonanțarea a n = 6 piese pe m = 3 mașini A, B și C dacă timpii de prelucrare pe fiecare mașină sunt în tabelul nr. 4 și timpii de transport de la mașina A la B, respectiv B la C sunt zero. Se va face și graficul Gantt corespunzător.

Tabelul nr. 4

Piesa P_i	a_i	b_i	c_i	Succesiunea
P_1	8	3	6	4
P_2	11	1	5	6
P_3	9	5	4	1
P_4	12	6	2	5
P_5	10	2	7	3
P_6	13	7	9	2

Tabelul nr. 5

Piesa P_i	a'_i	b'_i	Succesiunea
P_1	11	9	4
P_2	12	6	6
P_3	14	9	1
P_4	18	8	5

P ₅	12	9	3
P ₆	20	16	2

Sunt verificate relațiile (2), deci tabelul nr.4 se transformă cu relațiile (4) în tabelul nr.5 căruia i se aplică algoritmul lui Johnson, rezultând succesiunea de prelucrare, care se notează apoi și în tabelul nr.4.

Succesiunea de prelucrare este: P₃ , P₆ , P₅ , P₁ , P₄ , P₂ . Se va face graficul Gantt.

D.) Ordonanțarea fabricației a n piese pe m mașini, m > 3

Modelele matematice exacte de rezolvare a ordonanțării producției a n produse pe m mașini (m > 3) sunt dificil de aplicat din cauza complexității și timpului de calcul foarte mare, dar există algoritmi euristici care nu dau soluția optimă, ci o soluție suboptimală, deci apropiată de soluția optimă și acceptabilă.

Ordonanțarea fabricației a n produse pe m mașini, m3, se poate face teoretic prin rezolvarea unei probleme de programare liniară disjunctivă, care are forma :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \geq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad m, n \in \mathbb{N} \\
 &\sum_{j=1}^n b_{kj} \cdot X_j \geq b_k \quad \text{sau} \quad \sum_{j=1}^n c_{kj} \cdot X_j \geq c_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad p \in \mathbb{N} \\
 &X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\
 &f = \sum_{j=1}^n d_j \cdot X_j \\
 &\min f
 \end{aligned} \tag{5}$$

Rezolvarea problemei date de relațiile (5) se reduce la rezolvarea a 2^p probleme de programare liniară și alegerea dintre ele a aceleia pentru care funcția obiectiv f are valoarea cea mai mică. Se pot utiliza programe calculator: Qsb, Dsspom, Lindo etc. pentru rezolvarea celor 2^p probleme de programare liniară, dar timpul de calcul este mare.

De exemplu, pentru o întreprindere este posibil să existe în modelul (5) p = 10 condiții disjunctive, deci în acest caz ar trebui rezolvate 2¹⁰ = 1024 probleme de programare liniară. Din cauza cantității mari de calcule, în practică, în funcție de valorile concrete ale lui n și m, precum și a condițiilor concrete ale întreprinderii, se utilizează algoritmi euristici, cu care se obține în general o soluție suboptimală din vecinătatea soluției optime.

E.) Ordonanțarea fabricației a n piese pe o mașină

Ordonanțarea fabricației a n piese pe o mașină (*minimizarea timpului necesar efectuării tuturor reglajelor*) se poate face utilizând algoritmi NB (Next Best) și NB cu origine variabilă. În cazul unui utilaj complex care necesită o durată mare de reglaj pentru trecerea de la prelucrarea unui tip de produs (piesă) la altul, se pune problema determinării succesiunii optime a celor n produse (piese) programate să fie prelucrate pe acel utilaj. Optimizarea o înțelegem în sensul de minimizare a timpului necesar efectuării tuturor reglajelor. Se notează cu t_{ij} timpul total de reglare a utilajului după terminarea prelucrării piesei P_i pentru a începe prelucrarea piesei P_j. Cu cât produsul precedent P_i este mai asemănător cu produsul următor P_j, cu atât timpul t_{ij} va fi mai mic. Valorile t_{ii} nu au sens, deoarece ar urma același produs după el însuși. Sunt posibile n! = 1.2. ... n succesiuni de prelucrare a celor n piese și nu este rentabil din punct de vedere al timpului de calcul să se ia toate permutările posibile ale celor n piese. Se reduce timpul de calcul

prin utilizarea algoritmilor euristici care nu furnizează în general soluțiile optime, ci soluții suboptimale, suficient de bune, din vecinătatea soluției optime.

Algoritmul NB - Next **B**est. (în engleză: Next = următorul, Best = cel mai bun)

Este un algoritm euristic. Produsul (piesa) următor P_j se alege cel care prezintă cel mai mic timp de reglare a utilajului după executarea produsului precedent P_i . Se presupune că primul produs ce se prelucerează este P_1 , iar t_{ii} nu are sens. Cele n produse (piese) se pun în tabel, iar pe fiecare linie se trec timpii de reglare a utilajului la trecerea de la prelucrarea produsului din căsuța stângă a fiecărei linii la celelalte piese, iar diagonala principală nu se ia în calcul și nici coloana lui P_1 .

Tabelul nr.6

P_j	P_1	P_2	P_3	...	P_n
P_i					
P_1	-	t_{12}	t_{13}	...	t_{1n}
P_2	-	-	t_{23}	...	t_{2n}
...	...	...	...	...	...
P_n	-	t_{n2}	t_{n3}	...	-

Se determină

$$t_{1k} = \min \{ t_{1i}, i = 2, 3, \dots, n \},$$

deci după P_1 se prelucerează P_k . Pe linia lui P_k , deci linia k , se determină din nou valoarea minimă pentru piesele neprelucrate,

$$t_{kl} = \min \{ t_{kj}, j = 2, 3, \dots, n \},$$

rezultând a treia piesă de prelucrat piesa P_l , iar procedeul se repetă. Timpul total de reglaj va fi:
 $T = t_{1k} + t_{kl} + \dots$

Algoritmul NB (Next Best) cu origine variabilă.

Alegerea succesiunii de prelucrare este asemănătoare cu cea din algoritmul NB, dar se vor considera $n-1$ succesiuni în loc de una.

1) $P_1, P_2, P_k, \dots$

După piesa P_1 se prelucerează piesa P_2 , apoi de pe linia 2 se determină timpul minim pentru a obține a treia piesă de prelucrat P_k .

$$t_{2k} = \min \{ t_{2j}, j = 3, 4, \dots, n \}, \text{ apoi se continuă cu algoritmul NB}$$

și timpul total de reglaj va fi: $T_1 = t_{12} + t_{2k} + \dots$

2) $P_1, P_3, P_h, \dots$

După piesa P_1 se prelucerează piesa P_3 , apoi de pe linia 3 se determină timpul minim pentru a obține a treia piesă de prelucrat P_h .

$$t_{3h} = \min \{ t_{3j}, j = 2, 4, 5, \dots, n \}, \text{ apoi se continuă cu algoritmul NB}$$

și timpul total de reglaj va fi: $T_2 = t_{13} + t_{3h} + \dots$

3) $P_1, P_4, P_1, \dots$

După piesa P_1 se prelucurează piesa P_4 , apoi de pe linia 4 se determină timpul minim pentru a obține a treia piesă de prelucrat P_1 .

$$t_{41} = \min \{ t_{4j}, j = 2, 4, 5, \dots, n \},$$

$$T_3 = t_{14} + t_{41} + \dots$$

...

n-1) $P_1, P_n, P_r, \dots$

$$T_{n-1} = t_{1,n} + t_{nr} + \dots$$

Se determină: $T_0 = \min \{ T_k, k = 1, 2, \dots, n-1 \}$

care va da succesiunea de prelucrare cea mai bună și se va alege.

Exemplul nr.2.4.

Să se determine ordonanțarea a $n = 7$ piese pe un utilaj cu timpii de reglaj exprimați în aceleași unități de timp (u.t.) și dați în tabelul nr. 7.

Tabelul nr.7

P_j P_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1	-	7	5	9	4	10	12
P_2	-	-	8	3	11	5	17
P_3	-	2	-	7	18	13	9
P_4	-	6	9	-	1	3	8
P_5	-	11	4	5	-	16	7
P_6	-	4	7	2	8	-	5
P_7	-	5	6	15	3	19	-

1.) Rezolvare prin **algoritmul NB**.

Minimul de pe linia lui P_1 este $t_{15} = 4$, deci după piesa P_1 se va prelucra piesa P_5 . Valoarea minimă pe linia lui P_5 este $t_{53} = 4$, deci după piesa P_5 se va prelucra piesa P_3 , iar minimul de pe linia lui P_3 este $t_{32} = 2$, deci urmează la prelucrare după piesa P_3 piesa P_2 . Valoarea minimă pe linia lui P_2 pentru piesele neprelucrate este $t_{24} = 3$, deci urmează la prelucrare P_4 . Valoarea minimă pe linia lui P_4 pentru piesele neprelucrate este $t_{46} = 3$, urmând la prelucrare P_6 . Ultima piesă de prelucrat rămâne P_7 și $t_{67} = 5$.

Succesiunea de prelucrare este: $P_1, P_5, P_3, P_2, P_4, P_6, P_7$.

Timpul total de reglaj a utilajului este:

$$T = t_{15} + t_{53} + t_{32} + t_{24} + t_{46} + t_{67} = 4 + 4 + 2 + 3 + 3 + 5 = 21 \text{ u.t.}$$

2.) Rezolvare prin **algoritmul NB cu origine variabilă**.

1. $P_1, P_2, \dots$

Minimul pe linia lui P_2 este $t_{24} = 3$, deci după piesa P_2 urmează la prelucrare P_4 . Valoarea minimă pe linia lui P_4 pentru piesele neprelucrate este $t_{45} = 1$, urmând la prelucrare P_5 . Valoarea minimă pe linia lui P_5 pentru piesele neprelucrate este $t_{53} = 4$, deci după piesa P_5 se va

pelucra piesa P_3 , iar minimul de pe linia lui P_3 este $t_{37} = 9$, deci urmează la prelucrare după piesa P_3 piesa P_7 . Ultima piesă de prelucrat rămâne P_6 și $t_{76} = 5$. Succesiunea de prelucrare este: $P_1, P_2, P_4, P_5, P_3, P_7, P_6$. Timpul total de reglaj a utilajului este: $T_1 = t_{12} + t_{24} + t_{45} + t_{53} + t_{37} + t_{76} = 7 + 3 + 1 + 4 + 9 + 5 = 29$ u.t.

2. $P_1, P_3, \dots$

Minimul pe linia lui P_3 este $t_{32} = 2$, deci după piesa P_3 urmează la prelucrare P_2 . Se determină în mod analog succesiunea de prelucrare: $P_1, P_3, P_2, P_4, P_5, P_7, P_6$ și timpul total de reglaj a utilajului este: $T_2 = t_{13} + t_{32} + t_{24} + t_{45} + t_{57} + t_{76} = 5 + 2 + 3 + 1 + 7 + 5 = 23$ u.t.

3. $P_1, P_4, \dots$

Se obține succesiunea: $P_1, P_4, P_5, P_3, P_2, P_6, P_7$ și timpul total de reglaj a utilajului este: $T_3 = t_{14} + t_{45} + t_{53} + t_{32} + t_{26} + t_{67} = 9 + 1 + 4 + 2 + 5 + 5 = 26$ u.t.

4. $P_1, P_5, \dots$

Se obține succesiunea: $P_1, P_5, P_3, P_2, P_4, P_6, P_7$ și timpul total de reglaj a utilajului este: $T_4 = t_{15} + t_{53} + t_{32} + t_{24} + t_{46} + t_{67} = 4 + 4 + 2 + 3 + 3 + 5 = 21$ u.t.

5. $P_1, P_6, \dots$

Se obține succesiunea: $P_1, P_6, P_4, P_5, P_3, P_2, P_7$ și timpul total de reglaj a utilajului este: $T_5 = t_{16} + t_{64} + t_{45} + t_{53} + t_{32} + t_{27} = 10 + 2 + 1 + 4 + 2 + 17 = 36$ u.t.

6. $P_1, P_7, \dots$

Se obține succesiunea: $P_1, P_7, P_5, P_3, P_2, P_4, P_6$ și timpul total de reglaj a utilajului este: $T_6 = t_{17} + t_{75} + t_{53} + t_{32} + t_{24} + t_{46} = 12 + 3 + 4 + 2 + 3 + 3 = 27$ u.t.

$\min \{T_i, i = 1, 2, \dots, 6\} = \min \{43, 37, 26, 21, 36, 27\} = 21 = T_4$

Succesiunea cea mai bună: $P_1, P_5, P_3, P_2, P_4, P_6, P_7$.

Succesiunea cea mai defavorabilă.

Dacă se ia ca și *criteriu de alegere timpul maxim* în algoritmul NB sau în algoritmul NB cu origine variabilă, se obține succesiunea de prelucrare cea mai defavorabilă, nedorită.

Maximul de pe linia lui P_1 este $t_{17} = 12$, deci după piesa P_1 se va pelucra piesa P_7 . Valoarea maximă pe linia lui P_7 este $t_{76} = 19$, deci după piesa P_7 se va pelucra piesa P_6 , iar maximul de pe linia lui P_6 este $t_{65} = 8$, deci urmează la prelucrare după piesa P_6 piesa P_5 . Valoarea maximă pe linia lui P_5 pentru piesele neprelucrate este $t_{52} = 11$, deci urmează la prelucrare P_2 . Valoarea maximă pe linia lui P_2 pentru piesele neprelucrate este $t_{23} = 8$, urmând la prelucrare P_3 . Ultima piesă de prelucrat rămâne P_4 și $t_{34} = 7$.

a) Succesiunea de prelucrare cea mai defavorabilă, nedorită, obținută prin NB este: $P_1, P_7, P_6, P_5, P_2, P_3, P_4$. Timpul total de reglaj a utilajului este:

$$T_{d1} = t_{17} + t_{76} + t_{65} + t_{52} + t_{23} + t_{34} = 12 + 19 + 8 + 11 + 8 + 7 = 65 \text{ u.t.}$$

, rezultând un interval de încadrare a timpului de reglaj al utilajului $f \in [21, 65]$ u.t.

b) Dacă se consideră succesiunea: $P_1, P_6, P_5, P_2, P_7, P_4, P_3$, iar timpul total de reglaj a utilajului este: $T_{d2} = t_{16} + t_{65} + t_{52} + t_{27} + t_{74} + t_{43} = 10 + 8 + 11 + 17 + 15 + 9 = 70$ u.t., rezultând un interval de încadrare a timpului de reglaj al utilajului mai mare $f \in [21, 70]$ u.t.

c) Dacă se consideră succesiunea: $P_1, P_6, P_3, P_5, P_2, P_7, P_4$, iar timpul total de reglaj a utilajului este: $T_{d3} = t_{16} + t_{63} + t_{35} + t_{52} + t_{27} + t_{74} = 10 + 7 + 18 + 11 + 17 + 15 = 78$ u.t., și rezultă un interval de încadrare a timpului de reglaj al utilajului mult mai mare $f \in [21, 78]$ u.t.

F.) Ordonanțarea fabricației a n piese pe m mașini, $m > 2$

La modul general ordonanțarea fabricației a n piese pe m mașini, $m > 2$, este complexă, are nevoie de calcule multe. Din cauza cantității mari de calcule, în practică, în funcție de valorile concrete ale lui n și m, $m > 2$, precum și a condițiilor concrete ale firmei, se utilizează algoritmi euristici, cu care se obține în general o soluție suboptimală din vecinătatea soluției optime.

Exemplul nr. 2. 6

Se consideră ordonanțarea fabricației a n = 5 piese pe m = 4 mașini A, B, C, D, cu timpii de prelucrare (minute) a_i, b_i, c_i, d_i din tabelul nr. 2.9. Ordinea de prelucrare pe mașini este A, B,

C, D. Trebuie determinată succesiunea de prelucrare optimă în sensul minimizării timpului total de prelucrare. Sunt $5! = 1.2.3.4.5 = 120$ succesiuni de prelucrare, este dificil de determinat ordinea de prelucrare optimă. Se poate determina euristic o succesiune astfel:

1. $\text{Min}(a_i - b_i, i = 1, 2, \dots, 5)$

$\text{Min } M = \text{Min}(a_i - b_i, i = 1, 2, \dots, 5) = \min(3, -1, -7, -1, 2) = -7 = a_3 - b_3$, se ordonează crescător M. Succesiunea de prelucrare: P_3, P_4, P_2, P_5, P_1 este o soluție suboptimală, se face graficul Gantt, se obține $T_1 = 36$ minute, $T < 83$. Total așteptări (din $T = 36$) = $0 + 1 + 16 + 11 = 28$ minute.

Tabelul nr. 2. 9

P_i	a_i	b_i	c_i	d_i	$a_i + b_i + c_i + d_i$
P_1	5	2	4	3	14
P_2	6	7	1	4	18
P_3	1	8	2	6	17
P_4	4	5	3	7	19
P_5	3	1	6	5	15
Total	19	23	16	25	83

$T_1 = 36 < 83$

2. $\text{Min}(c_i - d_i, i = 1, 2, \dots, 5)$

$\text{Min } M = \text{Min}(c_i - d_i, i = 1, 2, \dots, 5) = \min(1, -3, -4, -4, 1) = -4 = c_3 - d_3 = c_4 - d_4$, se ordonează crescător M. Succesiuni de prelucrare:

P_3, P_4, P_2, P_5, P_1 ; $T_2 = 36$ minute;

P_3, P_4, P_2, P_1, P_5 ; $T_3 = 38$ minute;

P_4, P_3, P_2, P_5, P_1 ; $T_4 = 38$ minute;

P_4, P_3, P_2, P_1, P_5 ; $T_5 = 41$ minute;

Sunt soluții suboptimale, se face graficul Gantt, se obțin $T_i = \dots$

3. $\text{Min } M = \text{Min}(b_i - c_i, i = 1, 2, \dots, 5) = \min(-2, 6, 6, 2, -5) = -5 = b_5 - c_5$, se ordonează crescător M. Succesiuni de prelucrare:

P_5, P_1, P_4, P_2, P_3 ; $T_6 = 41$ minute;

P_5, P_1, P_4, P_3, P_2 ; $T_7 = 35$ minute;

Sunt soluții suboptimale, se face graficul **Gantt**, se obține $T_i = \dots$

4. $\text{Min } M = \text{Min}(a_i + b_i + c_i + d_i, i = 1, 2, \dots, 5) = \min(14, 18, 17, 19, 15) = 14 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$,

Se ordonează crescător M. Succesiunea de prelucrare: P_1, P_5, P_3, P_2, P_4 ; $T_8 = 39$ minute;

Se alege succesiunea: P_5, P_1, P_4, P_3, P_2 , cu timpul total cel mai mic dintre cele 8 considerate, $T_7 = 35$ minute.

G) Ordonanțarea fabricației a n piese utilizând prioritățile

Prioritatea este utilizată pentru a determina ordinea în care comenzile clienților ar trebui procesate. Prioritățile trebuie să reflecte necesitățile curente ale clienților pentru comenzile din aceeași linie de fabricație sau grup de utilaje. Selectarea unor metode de ordonanțare depinde de obiectivele programării producției și de criteriile de apreciere a rezultatelor.

Se pot utiliza diverse reguli de fabricație pe baza de prioritati, cum ar fi: FIFO - First In First Out (Primul Venit Primul Servit), LIFO - Last In First Out (Ultimul Venit Primul Servit), SPT - Shortest Processing Time (SOT - Shortest Operation Time) (Cel mai scurt timp de fabricație), RANDOM - ordine aleatoare, EDD – Earliest Due Date (Cel mai mic termen de finalizare, de livrare) etc.

1. FIFO - First In First Out, deci Primul Venit Primul Servit, se ordonează comenzile în ordinea în care au ajuns la firmă.

2. LIFO - Last In First Out, deci Ultimul Venit Primul Servit, regula este inversa lui FIFO, adică ordonează comenzile în *ordinea inversă în care au sosit*.
3. SPT - Shortest Processing Time sau SOT - Shortest Operation Time, deci se ordonează comenzile în *ordinea: Cel mai scurt (mic) timp de fabricație*.
4. RANDOM - aleator, deci se ordonează comenzile în *ordine aleatoare*.
5. EDD - Earliest Due Date, deci Cel mai mic termen de finalizare, de livrare.

Exemplul nr. 5.

Dacă comenzile pentru fabricare sunt primite în ordinea: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, cu datele din tabelul nr.8, atunci ordinea de ordonare, deci și de fabricare, va fi (diferită de la o metodă la alta):

1. FIFO: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$;
2. LIFO: $P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1$;
3. SPT : $P_5, P_6, P_2, P_4, P_1, P_3$;
4. RANDOM: (se generează 6 numere aleatoare, care dau ordinea de fabricație, de exemplu: 4,1,6,5,3,2): $P_4, P_1, P_6, P_5, P_3, P_2$;
5. EDD: $P_2, P_4, P_5, P_3, P_6, P_1$.

Tabelul nr. 8

P_i	Timpul de fabricare [ore]	Termenul de livrare [zile]	Sucesiunea (depinde de metodă)
P_1	8	7	
P_2	4	1	
P_3	9	5	
P_4	6	2	
P_5	2	4	
P_6	3	6	

9. ELEMENTE DE TEORIA AȘTEPTĂRII

Sisteme de așteptare

În cele mai diverse domenii apar fenomene de așteptare. Oamenii și firmele se confruntă zilnic cu procese de așteptare. Se va considera un sistem de producție, de servire sau comercializare în care se execută o anumită activitate sau se efectuează un anumit serviciu. Obiectele asupra cărora se execută activitatea sau serviciul respectiv se numesc clienți, iar sistemul respectiv este numit sistem de servire. O coadă de așteptare este formată din oameni, mașini, piese, produse etc. care așteaptă un serviciu. Cozile de așteptare pot să apară fie când serviciile pe care le oferă o firmă sunt supuse unei cereri stocastice sau când comportarea firmei însăși este de natură probabilistică. Cozile de așteptare se întâlnesc în cele mai diverse domenii: cozi la cumpărarea ziarului, cozi la bilete de tren sau tramvai, cozi la intrarea sau ieșirea din supermarket, cozi de automobile la o stație de benzină sau pe șosea, cozi de piese la o mașină unealtă, cozi de produse nevândute în stocul unui magazin sau al unei firme etc.

Serviciul este o activitate ce se prestează pentru un client. Această activitate are o utilitate pentru client, îi satisface o nevoie, în schimbul serviciului plătindu-se un preț.

În orice firmă există cozi sub forma de: comenzi, stocuri de materii prime, semifabricate sau produse finite, iar dacă firma folosește conceptul “just in time” dimensiunea cozii este minimă.

Într-o firmă problema care se pune nu este de a elimina cozile de așteptare, ci de a le controla și comanda pentru a îndeplini anumite obiective economice. Cozile de așteptare se studiază pentru a optimiza comportarea firmei, a sistemului de servire în ansamblu.

Un sistem de așteptare este complet descris prin specificarea elementelor de bază : *fluxul de intrare, mecanismul de servire, disciplina de servire și numărul stațiilor de servire.*

Într-un sistem de așteptare, *fluxul de intrare* este format din obiecte sau persoane numite clienți care vor solicita efectuarea unui serviciu. Sosirile clienților pot fi programate sau aleatoare. Se va considera că intrările în sistemul de așteptare sunt aleatoare, definite de densitatea de probabilitate $f(x)$. Cel mai studiat sistem de așteptare este cel cu intrările de tip Poisson cu densitatea de probabilitate (9.1).

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots \quad (9.1)$$

Notățile în (1) sunt:

x – este numărul de intrări în unitatea de timp;

λ - este numărul mediu de intrări în unitatea de timp, $\lambda > 0$, iar media și dispersia sunt egale cu λ . Probabilitatea de a avea x sosiri în unitatea de timp este egală cu $f(x)$.

Un client va fi servit de către o *stație de servire*. Timpul necesar pentru servirea unui client se numește *timp de servire*. Suma dintre timpul de așteptare al clientului și timpul de servire reprezintă timpul total de așteptare. În general, se consideră că timpul de servire este o variabilă aleatoare cu o densitate de probabilitate $g(t)$. În multe sisteme de așteptare se utilizează pentru timpul de servire repartitia exponențială care are media $1/\mu$, dispersia $1/\mu^2$ și densitatea de probabilitate (9.2).

$$g(t) = \mu \cdot e^{-\mu t} \quad (9.2)$$

$$t > 0, \mu > 0$$

Se pot utiliza și alte legi de repartitie pentru sosiri și serviri.

Pentru sosiri și serviri, trebuie să fie îndeplinită condiția din relația (9.3), factorul de serviciu (intensitatea de trafic) ρ să fie subunitar.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad (9.3)$$

Dacă $s > 1$, s = numărul stațiilor de servire, atunci trebuie: $\rho^* = \frac{\rho}{s} < 1$

Ordinea în care clienții sunt selectați pentru a fi serviți constituie disciplina firului de așteptare.

Disciplina de servire poate fi :

- FIFO (First In, First Out), adică “primul sosit, primul servit”;
- LIFO (Last In, First Out), adică “ultimul sosit, primul servit”
- servirea în ordinea aleatoare ;
- servirea după priorități.

Pentru servirea clienților sistemului de așteptare poate avea o stație de servire sau mai multe stații.

Lungimea unei cozi de așteptare poate fi finită sau infinită.

Dacă clienții sosesc prea des ei vor trebui să aștepte până devine liberă o stație de servire sau să renunțe la serviciul respectiv. Dacă clienții sosesc prea rar, stațiile de servire vor fi nefolosite și vor aștepta.

$$S/m/\sigma/s : (N,d) \quad (9.4)$$

Un sistem de așteptare se va nota sub forma dată de relația (9.4) în care notațiile sunt :

S - este legea de repartiție a numărului de sosiri în unitatea de timp ;

m - este numărul de elemente ale sursei care poate fi finit dacă clienții sosesc dintr-o sursă limitată sau este infinit dacă clienții provin dintr-o populație, foarte mare, infinită ;

σ - este legea de repartiție a timpului de servire a unui client de către o stație de servire ;

s - este numărul stațiilor de servire ;

N - este numărul de locuri din firul de așteptare, care poate fi finit sau infinit ;

d - este disciplina de servire .

Sistemele de așteptare se pot clasifica astfel:

- *sisteme de așteptare cu cereri refuzate* în care dacă apare o cerere când toate stațiile (canalele) sunt ocupate, este imediat refuzată, ea părăsește sistemul și nu mai este socotită în calcul;

- *sisteme de așteptare cu cozi de așteptare.*

Aplicarea teoriei așteptării în proiectarea sistemelor de producție, de servire sau comercializare duce la dimensionarea rațională a spațiilor de așteptare și de servire, precum și la stabilirea numărului de stații de servire, astfel încât să se minimizeze costurile generate de așteptarea clienților și de existența stațiilor de servire neocupate.

Costurile de așteptare cuprind pierderi directe generate de așteptare (cheltuieli de staționare ale mașinilor, ale vagoanelor, vapoarelor etc., deprecierea mărfurilor nedescărcate, salariile personalului care așteaptă etc.) și pierderi indirecte (scăderea cifrei de afaceri, deoarece clienții vor prefera să meargă la alte firme concurente unde așteaptă mai puțin). Pierderile indirecte sunt dificil de calculat sau de estimat.

Se vor analiza câteva modele de așteptare utilizabile în proiectarea și managementul sistemelor de producție, servire și comercializare.

1. Modelul de așteptare cu cereri refuzate.

Acest sistem de așteptare este dat în relația (9.5), iar notațiile sunt:

S - este legea de repartiție a numărului de sosiri în unitatea de timp ;

m - este numărul de elemente ale sursei care poate fi finit dacă clienții sosesc dintr-o sursă limitată sau este infinit dacă clienții provin dintr-o populație infinită ;

σ - este legea de repartiție a timpului de servire a unui client de către o stație de servire;

s - este numărul stațiilor de servire ;

N = 0 - este numărul de locuri din firul de așteptare, care este zero ;

d - este disciplina de servire .

Dacă apare o cerere la un moment când toate stațiile de servire (canalele) sunt ocupate, aceasta este refuzată, ea va părăsi sistemul de așteptare și nu va mai fi luată în calcul. Acest sistem de așteptare este utilizat în telefonie.

Se va considera că intrările în sistemul de așteptare cu cereri refuzate din relația (9.6) sunt Poisson de parametru λ , serviciile sunt exponențiale de parametru μ și sunt n stații (canale) de servire. Se poate determina probabilitatea p_n a unui refuz, deci probabilitatea ca o cerere sosită să găsească toate stațiile (canalele) ocupate, fiind dată de relația (9.7). Formulele din relațiile (9.7) și (9.8) sunt numite formulele lui Erlang.

Probabilitatea ca toate stațiile (canalele) să fie libere este dată în relația (9.8).

Dacă sistemul de așteptare are o singură stație (canal) de servire, probabilitatea ca singura stație de servire să fie ocupată, deci probabilitatea de refuz este (9.9).

$$S/m/\sigma/s : (0,d) \quad (9.5)$$

$$\text{POISS } (\lambda)/\infty/\text{EXP } (\mu)/n: (0, \text{FIFO}) \quad (9.6)$$

$$p_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}} \quad (9.7)$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}} \quad (9.8)$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1 + \rho} \quad (9.9)$$

$\mu = 1/m_{\text{timp servire}} = \text{invers proporțională cu timpul mediu de servirea unei cereri} = m_{\text{tserv}}$

Exemplul nr. 9.1.

O stație telefonică automată are 4 linii de comunicație. Apelurile formează un flux simplu de densitate $\lambda = 3$ apeluri pe minut. Orice apel sosit când toate liniile sunt ocupate este refuzat. Durata medie de conversație este de 2 minute.

Să se determine:

- probabilitatea unui refuz p_{refuz}
- probabilitatea p_0 pentru ca stația telefonică să fie liberă

a) $m_{\text{tserv}} = 2$ minute

$\mu = 1/m_{\text{timp servire}} = 1/2 = 0.5$ convorbiri/ minut

Se utilizează relația (9.7)

$n = 4$ stații de servire

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{0.5} = 6$$

$$p_{\text{refuz}} = p_4 = \frac{\frac{\rho^4}{4!}}{1 + \frac{\rho}{1} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!}} = \approx 0.47$$

b) Se utilizează relația (9.8)

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^4 \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!}} = \approx 0.0087$$

2. Modelul de așteptare POISS $(\lambda)/\infty/\text{EXP } (\mu)/1: (\infty, \text{FIFO})$

Acest model de așteptare are sursa nelimitată, foarte mare, teoretic ∞ , și o capacitate suficient de mare a firului de așteptare, teoretic ∞ , disciplina de servire este FIFO – primul sosit, primul servit, dar o singură stație de servire, sosirile sunt Poisson cu media λ și servirile sunt exponențiale de parametru μ .

Factorul de serviciu (intensitatea de trafic) ρ trebuie să fie subunitar.

Probabilitatea ca în sistemul de așteptare să existe n unități (clienți), $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, este p_n din (9.10).

Numărul mediu de unități (clienți) ce se găsesc la un moment dat în sistemul de așteptare este $\bar{n}$ din (9.11).

Numărul mediu de unități (clienți) ce se găsesc la un moment dat în firul (coada) de așteptare este $\bar{n}_f$ din (9.12).

Numărul mediu de unități (clienți) ce se găsesc la un moment dat în curs de servire este $\bar{n}_s$ din (9.13).

Între $\bar{n}$, $\bar{n}_f$ și $\bar{n}_s$ există relația (9.14).

Timpul mediu de așteptare al unei unități (client) în coadă t_f se determină cu relația (9.15).

Timpul mediu de așteptare al unei unități (client) în sistemul de așteptare t_s se determină cu relația (9.16).

Probabilitatea ca numărul unităților (clienților) din sistemul de așteptare, la un moment dat, să depășească numărul natural k se calculează cu relația (9.17).

Probabilitatea ca numărul unităților (clienților) din sistemul de așteptare, la un moment dat, să nu depășească numărul natural k este (9.18).

$$p_n = \rho^n \cdot (1 - \rho) \quad (9.10)$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (9.11)$$

$$\bar{n}_f = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (9.12)$$

$$\bar{n}_s = \rho \quad (9.13)$$

$$\bar{n} = \bar{n}_f + \bar{n}_s \quad (9.14)$$

$$t_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (9.15)$$

$$t_s = t_f + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (9.16)$$

$$P(n > k) = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{k+1} = \rho^{k+1} \quad (9.17)$$

$$P(n \leq k) = 1 - \rho^{k+1} \quad (9.18)$$

$$P(t_f > t) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot e^{-(\mu - \lambda)t} \quad (9.19)$$

Exemplul nr. 9.2.

La un ghișeu public sosirile solicitanților sunt aleatoare, iar legea de repartiție a sosirilor este Poisson, cu media de 12 persoane pe oră. Timpul de servire a unei persoane de către persoana de la ghișeu este o variabilă aleatoare ce urmează o lege de repartiție exponențială cu media de 4 minute.

Să se determine:

- Probabilitatea ca o persoană care sosește la un moment dat la ghișeu să intre imediat la servire.
- Probabilitatea ca, la un moment dat, să existe 3 persoane în sistemul de așteptare format.
- Probabilitatea ca, la un moment dat, să existe cel mult 2 persoane care să aștepte să intre la servire.
- Numărul mediu de persoane aflate la un moment dat în sistem, respectiv în curs de servire și în firul de așteptare, precum și timpul mediu de așteptare în fir și în sistem, al unei persoane.
- Probabilitatea ca timpul de așteptare a unei persoane, în fața ghișeului, pentru a intra la servire, să depășească 20 minute.

a) Numărul de persoane ce sosesc la ghișeu este o variabilă aleatoare cu legea Poisson și $\lambda = 12$ persoane /oră.

Timpul de servire a unei persoane are o repartiție exponențială de parametru

$\mu = 1/4$ personae /minut = 15 persoane / oră.

Se va considera ca unitate de măsură pentru timp ora, factorul de serviciu este

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Evenimentul ca o persoană care sosește la un moment dat la ghișeu să intre imediat la servire este echivalent cu evenimentul că la acel moment nu există nici o persoană în sistemul de așteptare respectiv , deci nici la rând, nici la servire și probabilitatea este p_0 .

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$b) \quad p_3 = (1 - \rho) \cdot \rho^3 = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{625} = 0.1024$$

- c) Evenimentul, ce constă în faptul că în firul de așteptare există cel mult 2 persoane este echivalent cu evenimentul că în sistemul de așteptare există cel mult $3 = 2 + 1$ persoane. Se va utiliza relația (9.18).

$$P(n \leq 3) = 1 - P(n > 3) = 1 - \rho^4 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{369}{625} \approx 0.59$$

- d) Se utilizează relațiile (9.11), (9.13), (9.14), (9.15), (9.16).

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{12}{15 - 12} = \frac{12}{3} = 4 \text{ persoane}$$

$$\bar{n}_s = \rho = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\bar{n}_f = \bar{n} - \bar{n}_s = 4 - 0.8 = 3.2 \text{ persoane}$$

$$t_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{12}{15(15 - 12)} = \frac{4}{15} \text{ ore} = 16 \text{ minute}$$

$$t_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{15 - 12} = \frac{1}{3} \text{ ore} = 20 \text{ minute}$$

$$e) t = 20 \text{ minute} = \frac{1}{3} \text{ ore}$$

$$P(t_f > \frac{1}{3}) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot e^{-(\mu-\lambda)t} = \frac{4}{5} \cdot e^{-3 \cdot 1/3} = \frac{4}{5} \cdot e^{-1} \approx 0.294$$

3. Modelul de așteptare POISS (λ)/ ∞ /EXP (μ)/s: (N,FIFO)

Acest model de sistem de așteptare este caracterizat prin:

- intrările în sistemul de așteptare sunt Poisson de parametru λ ;
- numărul de elemente ale sursei este foarte mare, infinit, deci ∞ ;
- procesările (prelucrările) sunt după legea exponențială de parametru μ ;
- sunt s stații de servire;
- disciplina de servire este FIFO ;
- sunt N locuri în firul de așteptare.

În acest sistem de așteptare pot fi maximum s + N clienți, s clienți în curs de servire și N clienți în firul (coada) de așteptare, deci în această perioadă noii clienți care ar vrea să intre în sistemul de așteptare vor fi refuzați și probabil se vor duce la concurența sistemului considerat. Creșterea numărului de locuri din coada de așteptare, deci a lui N implică sume de investiție mai mari, deci un capital mai mare.

4. Modelul de așteptare POISS (λ)/ ∞ /EXP (μ)/s: (∞ , FIFO)

Dacă se dispune de capital suficient de mare, se poate utiliza acest model de așteptare.

Acest model de așteptare nu pierde clienții din cauza lipsei locurilor în coada de așteptare ca în modelele precedente, deoarece sunt teoretic o infinitate de locuri de așteptare, practic foarte multe.

Creșterea lui s , deci a numărului stațiilor de servire implică de asemenea o creștere a capitalului investit, dar va duce la creșterea nivelului de servire, a capacității de servire și a capacității concurențiale.

5. Modelul de așteptare POISS (λ)/ ∞ /EXP (μ)/1: (N,FIFO)

Acest model de așteptare are sursa nelimitată, foarte mare, teoretic ∞ , și o capacitate a firului de așteptare de N unități, disciplina de servire este FIFO – primul sosit, primul servit, dar o singură stație de servire, sosirile sunt Poisson cu media λ și servirile sunt exponențiale de parametru μ

(cu media $\frac{1}{\mu}$). Unitățile care vor să intre în sistem când coada (firul) de așteptare conține N

unități, părăsesc sistemul, fiind refuzate. În sistemul de așteptare pot intra cel mult N + 1 unități, N în firul de așteptare și una în stația de servire. Probabilitatea p_n ca în sistemul de așteptare să existe n unități este dată de relația (9.20).

$$p_n = \begin{cases} \rho^n \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} & , \text{ pentru } n = 0,1,2,\dots,N, N+1 \\ 0 & , \text{ pentru } n = N+2, N+3, \dots \end{cases} \quad (9.20)$$

Probabilitatea p_0 ca în sistemul de așteptare să existe zero unități, deci nici un client, este dată de relația (9.21).

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} \quad (9.21)$$

Numărul mediu de unități (clienți) ce se găsesc la un moment dat în sistemul de așteptare este $\bar{n}$ din (9.22).

$$\bar{n} = \rho \cdot \frac{(N+1)\rho^{N+2} - (N+2)\rho^{N+1} + 1}{(1-\rho)(1-\rho^{N+2})} \quad (9.22)$$

Numărul mediu de unități (clienți) ce se găsesc la un moment dat în curs de servire este $\bar{n}_s$ din (9.23).

$$\bar{n}_s = 1 - p_0 = \frac{\rho(1-\rho^{N+1})}{1-\rho^{N+2}} \quad (9.23)$$

Numărul mediu de unități (clienți) ce se găsesc la un moment dat în firul (coada) de așteptare este $\bar{n}_f$ din (9.24).

$$\bar{n}_f = \bar{n} - \bar{n}_s \quad (9.24)$$

Timpul mediu de așteptare al unei unități (client) în coadă t_f se determină cu relația (9.25).

$$t_f = \frac{\bar{n}_f}{\mu \cdot \bar{n}_s} = \frac{\rho}{\mu \cdot (1-\rho)(1-\rho^{N+1})} \cdot [1 - (N+1)\rho^N + N \cdot \rho^{N+1}] \quad (9.25)$$

Timpul mediu de așteptare al unei unități (client) în sistemul de așteptare t_s se determină cu relația (9.26).

$$t_s = t_f + \frac{1}{\mu} \quad (9.26)$$

Probabilitatea să fie refuzate unitățile ce vor să intre în sistemul de așteptare deoarece nu mai există locuri în coada de așteptare este dată de relația (9.27).

$$p_{N+1} = \rho^{N+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} \quad (9.27)$$

Probabilitatea ca timpul de așteptare a unei unități în coada de așteptare să depășească o valoare dată t este dată de relația (9.28).

$$P(t_f > t) = e^{-\mu t} \cdot \frac{\rho}{1-\rho^{N+2}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\mu t)^k}{k!} \cdot (\rho^k - \rho^N) \quad (9.28)$$

Exemplul nr. 9.3.

La o benzinărie există 5 locuri de așteptare a mașinilor, sosirile sunt aleatoare, de natură poissoniană, cu media de 0.753 mașini pe minut. Există o singură pompă de servire cu un angajat, timpul de servire este aleatoriu, de natură exponențială, cu timpul mediu de servire egal cu 67.5 secunde. Mașinile care sosesc la benzinărie și găsesc toate locurile de așteptare ocupate, pleacă la altă benzinărie concurentă. Să se determine:

- probabilitatea ca o mașină sosită la benzinărie la un moment dat, să nu aștepte, ci să intre imediat la alimentare;
- probabilitatea ca o mașină, sosită la un moment dat, să nu găsească loc de așteptare, deci să plece fără a fi servită;
- probabilitatea ca timpul de așteptare a unei mașini, până să intre la servire, să depășească 5 minute;

Sosirile la benzinărie sunt aleatoare de tip Poisson cu parametrul $\lambda = 0.753$ mașini/minut, unitatea de timp este minutul.

Timpul mediu de servire a unei mașini este

$$t_{\text{servire}} = 67.5 \text{ secunde} = 1.125 \text{ minute} = 9/8 \text{ minute}$$

$$\mu = 1/t_{\text{servire}} = 1/1.125 = 8/9 \approx 0.888 \text{ mașini/minut}$$

$$\text{Factorul de serviciu: } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \approx 0.753 / 0.888 \approx 0.848$$

$N = 5$ locuri de așteptare

a) O mașină sosită la benzinărie nu așteaptă, dacă în sistemul de așteptare nu se găsește nici o mașină la acel moment, se va utiliza (9.21) pentru calculul probabilității p_0 .

$$P_0 = (1 - 0.848)/(1 - 0.848^7) \approx 0.152/0.684 \approx 0.222$$

b) O mașină pleacă fără a fi servită, dacă la sosire nu are loc în coada de așteptare, deci în sistemul de așteptare sunt $6 = 5 + 1$ mașini, 5 așteaptă și una este la servire. Se va utiliza (9.27).

$$P_6 = 0.848^6 \cdot (1 - 0.848)/(1 - 0.848^7) \approx 0.372 \cdot 0.222 \approx 0.083$$

c) Probabilitatea ca timpul de așteptare al unei mașini în coada de așteptare să depășească valoarea dată de $t = 5$ minute este dată de relația (9.28).

$$\mu \cdot t = 0.888 \cdot 5 \approx 4.44$$

$$P(t_f > 5) = e^{-0.888 \cdot 5} (0.848/(1 - 0.848^7)) \cdot [1/0! (1 - 0.848^5) + 4.44^1/1! \cdot (0.848^1 - 0.848^5) + 4.44^2/2! \cdot (0.848^2 - 0.848^5) + 4.44^3/3! \cdot (0.848^3 - 0.848^5) + 4.44^4/4! \cdot (0.848^4 - 0.848^5)] \approx 0.124$$

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C11 -2019

10. ELEMENTE DE TEORIA JOCURILOR

Teoria jocurilor este modelarea matematică a situațiilor de conflict, de competiție.

O *situație de conflict* se caracterizează prin :

- interesele jucătorilor (adversarilor) , deci a părților aflate în conflict nu coincid, fiind chiar opuse;
- fiecare jucător poate să influențeze într-o anumită măsură mersul evenimentelor;
- nici un participant nu are controlul absolut asupra rezultatului jocului;
- rezultatul final al jocului depinde de strategiile jucătorilor, dar și de șansă.

Prin situații de *conflict* se înțeleg situațiile în care se întâlnesc două sau mai multe părți (firme, indivizi etc.) a căror activitate urmărește un scop bine determinat și în care interesele părților sunt contrarii.

Situațiile conflictuale cuprind următoarele tipuri de conflict:

- lupte, în care obiectivul este distrugerea inamicului;
- jocuri, în care obiectivul constă în depășirea partenerilor;
- controverse, în care obiectivul este convingerea oponentului.

Competiția poate implica atât conflictul, cât și cooperarea. Situațiile competitive sunt acele situații în care mai multe persoane, (n persoane, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) folosesc astfel de strategii în atingerea obiectivelor lor încât, cu cât cresc șansele unei persoane de a-și realiza obiectivul propus, cu atât scad șansele celorlalte persoane de a-și atinge obiectivele lor.

Prin *joc* se înțelege situații în care două sau mai multe persoane, numite jucători, aleg fiecare o decizie și în care rezultatul este determinat de întreg ansamblul deciziilor alese.

Un joc este caracterizat de următoarele elemente:

- există n persoane care iau decizii, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$; dacă $n = 2$, se spune că este un joc de două persoane, iar dacă $n > 2$, este un joc de n persoane;
- există un ansamblu de reguli care sunt cunoscute de jucători și care precizează ce moduri de acțiune pot fi alese, deci ce partide pot fi realizate;
- este precizată o mulțime de stări finale în care jocul se termină (de exemplu: câștig, egalitate sau pierdere);

- înainte de începerea jocului sunt specificate și sunt cunoscute de către fiecare jucător câștigurile asociate fiecărei stări finale posibile.

Se spune că a avut loc o *partidă* atunci când fiecare jucător s-a fixat asupra deciziei sale. O *strategie* a unui jucător este un ansamblu de reguli care precizează alegerea sa în fiecare partidă dată.

Un *joc* comportă două elemente fundamentale:

a) un proces constituit dintr-o succesiune de acțiuni (mutări) executate, rând pe rând, de un număr finit de persoane, numite jucători, după anumite reguli care constituie caracteristicile jocului. Un asemenea proces efectiv realizat se numește partidă. Sistemul de reguli care determină în mod unic comportamentul jucătorului la fiecare acțiune în funcție de situația definită de mersul jocului, se numește strategia jocului. Fiecare din strategiile determinate pe care le poate alege un jucător la un moment din desfășurarea jocului se numește strategie pură. Alegerea de către un jucător la un moment din desfășurarea jocului a unei strategii în concordanță cu o anumită distribuție de probabilitate a căilor de acțiune se numește strategie mixtă.

b) o regulă de repartitie de valori între jucători, care permite fiecărui jucător să își fixeze ca scop realizarea unei valori cât mai mari.

Clasificări ale jocurilor

1. După *numărul partenerilor de joc* (jucătorilor) jocurile se clasifică în :

- jocuri cu doi jucători;
- jocuri cu n jucători, $n > 2$.

2. După *valoarea sumei câștigurilor* jocurile se clasifică în :

- jocuri cu sumă nulă, în care câștigul unui jucător reprezintă pierderea celorlalți jucători;
- jocuri cu sumă constantă.

3. După *posibilitățile de cooperare*. Trebuie stabilit dacă regulile jocului permit sau nu următoarele cooperări:

(C1) încheierea de acorduri ferme (acestea devin obligatorii) între jucători pentru alegerea în comun a strategiilor; comunicarea între jucători poate fi interzisă prin regulile jocului;

(C2) plățile laterale, deci transferul de câștiguri (utilități) între jucători, în scopul cointereseării lor la o anumită acțiune comună.

Dacă regulile jocului permit sau nu cele două cooperări (C1), (C2), jocurile se clasifică astfel:

- *jocul cooperativ* este jocul ale cărui reguli permit cele două tipuri de cooperări (C1) și (C2);

- *jocul fără plăți laterale* este jocul ale cărui reguli permit încheierea de acorduri ferme (C1), dar exclud transferul câștigurilor (plățile laterale (C2));

- *jocul necooperativ* este jocul ale cărui reguli interzic acordurile ferme și plățile laterale, deci sunt interzise (C1) și (C2)).

4. După numărul strategiilor:

- jocuri finite, sunt jocuri în care fiecare dintre jucători are la dispoziție o mulțime finită de strategii;

- jocuri infinite, sunt jocuri în care fiecare dintre jucători are la dispoziție o mulțime infinită (numărabilă, deci $1, 2, \dots, n, \dots$) de strategii;

- jocuri continue, sunt jocuri în care fiecare jucător are la dispoziție un infinit continuu de strategii pure, reprezentate în general ca puncte din intervalul $[0, 1]$.

Jocuri de două persoane cu sumă nulă

Jocul de două persoane cu sumă nulă este un sistem închis, în care câștigul unui jucător reprezintă o pierdere egală pentru celălalt jucător.

Un joc de două persoane finit și cu sumă nulă se numește joc matriceal.

Fie jocul matriceal $\Gamma = (X, Y, f)$.

Se notează cu:

- X mulțimea strategiilor pure ale primului jucător, notat cu I;

$$X = \{1, 2, \dots, m\}$$

Se spune că jucătorul I folosește o *strategie pură* i , dacă în vectorul x al strategiilor ale primului jucător:

$$x_i = 1 \text{ și } x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_m = 0$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Se spune că jucătorul I folosește o *strategie mixtă*, dacă jucătorul I folosește cel puțin două strategii pure, fiecare cu o probabilitate mai mică decât 1.

Deci, vectorul x al strategiilor mixte ale primului jucător, I ,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

x_i este probabilitatea ca primul jucător I să aleagă strategia pură i , $x_i \in [0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, m$;

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

- în mod analog, Y este mulțimea strategiilor pure ale celui de al doilea jucător, notat cu II;

$$Y = \{1, 2, \dots, n\}$$

Se spune că jucătorul II folosește o *strategie mixtă*, dacă jucătorul II folosește cel puțin două strategii pure, fiecare cu o probabilitate mai mică decât 1.

Deci, vectorul y al strategiilor mixte ale celui de al doilea jucător, II;

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

y_j este probabilitatea ca al doilea jucător II să aleagă strategia pură j , $y_j \in [0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, n$;

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1$$

- f funcția de câștig a jocului, A matricea jocului.

$$A = (a_{ij}) , i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$a_{ij} = f(i, j)$ = câștigul jucătorului I, dacă jucătorul I a ales strategia $i \in X$ și jucătorul II a ales strategia $j \in Y$, iar jucătorul II câștigă $-a_{ij}$, nici unul dintre cei doi jucători nu cunoaște alegerea făcută de celălalt.

Se consideră un joc de două persoane cu suma nulă, *primul jucător* este jucătorul maximizant.

Al *doilea jucător* este jucătorul minimizant. Se rezolvă jocul considerat, trebuie determinată strategia optimă, fie determinând *un punct șa* sau *punct de echilibru*, adică un punct care verifică relația (10.1):

$$V_I = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} C_{ij} = V_{II} = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} C_{ij} \quad (10.1)$$

dacă există punct șa, fie se determină strategiile mixte cu programare liniară.

Punctul șa are proprietatea că strategiile corespunzătoare lui sunt cele mai bune pentru ambii jucători, în sensul că fiecare dintre ei știe că, în cel mai rău caz, strategia aleasă îi oferă cea mai bună posibilitate. Dacă unul dintre parteneri renunță la strategia optimă, celălalt este avantajat.

În general, $V_I \leq V_{II}$.

Pentru determinarea strategiilor mixte prin programare liniară, se notează cu x vectorul strategiilor mixte ale primului jucător, jucătorul I, dat de relația (10.2), respectiv cu y vectorul strategiilor mixte ale celui de al doilea jucător, II, dat de relația (10.3):

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m), \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \in [0, 1]; \quad (10.2)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \sum_{j=1}^n y_j = 1, y_j \in [0, 1]. \quad (10.3)$$

Se notează cu v valoarea jocului pentru jucătorul I, care este jucătorul maximizant și dorește să câștige cât mai mult, deci acesta urmărește $\max v$. Se notează cu u valoarea jocului pentru jucătorul II, jucătorul minimizant și acesta urmărește să piardă cât mai puțin, deci urmărește $\min u$.

Exemplul nr. 10.1.

Se va determina punctul $\bar{x}$ și $\bar{y}$ pentru jocul matricial cu matricea câștigurilor A .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru primul jucător:

$$v_I = \max_{1 \leq i \leq 3} \min_{1 \leq j \leq 3} a_{ij} = \max[\min(5, 1, 3), \min(3, 2, 4), \min(-4, 0, 1)] = \max(1, 2, -4) = 2 = a_{22}$$

Pentru al doilea jucător:

$$v_{II} = \min_{1 \leq j \leq 3} \max_{1 \leq i \leq 3} a_{ij} = \min[\max(5, 3, -4), \max(1, 2, 0), \max(3, 4, 1)] = \min(5, 2, 4) = 2 = a_{22}$$

deci, $v_I = v_{II} = a_{22} = 2$ este punct $\bar{x}$ și $\bar{y}$ (punct de echilibru).

Exemplul nr. 10.2.

Pentru jocul matricial cu matricea câștigurilor A , nu există punct $\bar{x}$ și $\bar{y}$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Pentru primul jucător:

$$v_I = \max_{1 \leq i \leq 2} \min_{1 \leq j \leq 2} a_{ij} = \max[\min(-3, 3), \min(3, -3)] = \max(-3, -3) = -3$$

Pentru al doilea jucător:

$$v_{II} = \min_{1 \leq j \leq 2} \max_{1 \leq i \leq 2} a_{ij} = \min[\max(-3, 3), \max(3, -3)] = \min(3, 3) = 3$$

$$v_I = -3 < v_{II} = 3$$

Deci, nu există punct $\bar{x}$ și $\bar{y}$ (punct de echilibru).

Determinarea strategiilor mixte prin programare liniară

Se notează:

$$\frac{x_i}{v} = X_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (10.4)$$

$$\frac{y_j}{u} = Y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

Pentru jucătorul I, primul, valoarea jocului este v , pentru determinarea strategiilor optime mixte, trebuie rezolvată problema de programare liniară (10.5).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot X_i &\geq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ X_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ \min (X_1 + X_2 + \dots + X_m) &= \min 1/v \end{aligned} \quad (10.5)$$

Pentru al doilea jucător, jucătorul II, valoarea jocului este u , determinarea strategiilor optime mixte se reduce la rezolvarea problemei de programare liniară (10.6), duala problemei (10.5).

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot Y_j &\leq 1 \\ Y_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \max(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) &= \max 1/u \end{aligned} \quad (10.6)$$

unde:

* a_{ij} este câștigul jucătorului I (primul jucător, jucătorul maximizant), dacă jucătorul I a ales strategia i și jucătorul II (al doilea jucător, jucătorul minimizant) a ales strategia j , $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$;

* v este câștigul jucătorului I, iar u este câștigul jucătorului II, $u = v$.

Strategiile mixte optime se determină rezolvând problemele de programare liniară (10.5) și (10.6) cu algoritmul simplex primal sau dual, respectiv utilizând programul Qsb, Dsspom, Lindo sau altul, obținându-se u, v, X_i, Y_j , apoi relațiile (10.4) dau componentele x_i și y_j , $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$; ale strategiilor mixte x , respectiv y ale celor doi jucători.

Exemplul nr. 10.3.

Se va demonstra că nu există punct $\bar{x}$ pentru jocul matricial cu matricea câștigurilor A . Se vor determina strategiile optime mixte prin programare liniară.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_I = \max_{1 \leq i \leq 3} \min_{1 \leq j \leq 3} a_{ij} = \max[\min(5, 2, 4), \min(6, 7, 3), \min(4, 5, 1)] = \max(2, 3, 1) = 3$$

$$v_{II} = \min_{1 \leq j \leq 3} \max_{1 \leq i \leq 3} a_{ij} = \min[\max(5, 6, 4), \max(2, 7, 5), \max(4, 3, 1)] = \min(6, 7, 4) = 4$$

Deci : $v_I = 3 < v_{II} = 4$
Nu există punct $\bar{x}$.

Strategiile optime mixte ale jucătorului I se determină rezolvând problema de programare liniară (se iau coloanele matricii A):

$$\begin{aligned} 5 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 &\geq 1 \\ 2 \cdot X_1 + 7 \cdot X_2 + 5 \cdot X_3 &\geq 1 \\ 4 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 &\geq 1 \\ X_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \\ \text{Min}(X_1 + X_2 + X_3) &= \min 1/v \end{aligned}$$

Se rezolvă cu programul Qsb, modulul Linear Programming.

$$X_1 = 2/11, \quad X_2 = 1/11, \quad X_3 = 0$$

$$1/v = X_1 + X_2 + X_3 = 2/11 + 1/11 + 0 = 3/11$$

$$v = 11/3$$

$$\frac{X_i}{v} = X_i, \text{ deci: } x_i = v \cdot X_i, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$x_1 = 2/11 \cdot 11/3 = 2/3$$

$$x_2 = 1/11 \cdot 11/3 = 1/3$$

$$x_3 = 0$$

Strategia mixtă optimă a jucătorului I este x:

$$x = (2/3, 1/3, 0)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2/3 + 1/3 + 0 = 1$$

Strategiile mixte ale jucătorului II se determină rezolvând problema de programare liniară duală celei a jucătorului I:

$$\begin{aligned} 5 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2 + 4 \cdot Y_3 &\leq 1 \\ 6 \cdot Y_1 + 7 \cdot Y_2 + 3 \cdot Y_3 &\leq 1 \\ 4 \cdot Y_1 + 5 \cdot Y_2 + 1 \cdot Y_3 &\leq 1 \\ Y_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \\ \text{Max}(Y_1 + Y_2 + Y_3) &= \max 1/u \end{aligned}$$

Se rezolvă cu programul Qsb, modulul Linear Programming.

$$Y_1 = 0, \quad Y_2 = 1/22, \quad Y_3 = 5/22$$

$$1/u = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0 + 1/22 + 5/22 = 6/22 = 3/11 = 1/v$$

$$u = 11/3 = v$$

$$\frac{Y_j}{u} = Y_j, \text{ deci } y_j = u \cdot Y_j, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 1/22 \cdot 11/3 = 1/6$$

$$y_3 = 5/22 \cdot 11/3 = 5/6$$

Strategia mixtă optimă a jucătorului II este y

$$y = (0, 1/6, 5/6)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 + 1/6 + 5/6 = 1$$

Jocuri bimatriceale

Un joc finit de două persoane cu sumă arbitrară (generală, constantă), numit joc bimatriceal, este definit de mulțimea $\Gamma = (X, Y, A, B)$, unde:

$$X = \{1, 2, \dots, m\};$$

$$Y = \{1, 2, \dots, n\};$$

reprezintă mulțimile strategiilor pure ale celor doi jucători;

$$A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

este matricea câștigului jucătorului I;

$$B = (b_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

este matricea câștigului jucătorului II;

a_{ij} – câștigul jucătorului I când jucătorul I folosește strategia pură i și jucătorul II folosește strategia pură j ;

b_{ij} - câștigul jucătorului II când jucătorul I folosește strategia pură i și jucătorul II folosește strategia pură j ;

$$a_{ij} + b_{ij} \neq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

Un *joc bimatriceal* mai poate fi reprezentat printr-o matrice de perechi (a_{ij}, b_{ij}) ,

$$(A, B) = ((a_{ij}, b_{ij})), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

Exemplul nr. 10.6.

Se consideră un joc celebru, numit bătălia sexelor. Acest joc constă în următoarele: într-o familie, soțul și soția trebuie să decidă unde vor merge într-o seară pentru a se distra, având de ales între a merge la un meci de fotbal și a merge la teatru. Dintre aceste variante, soțul preferă să meargă la fotbal, iar soția la teatru. Dacă unul dintre ei cedează, atunci cel care cedează va avea câștigul 1, iar cel care nu cedează, va câștiga 4. În cazul în care nici unul nu cedează, atunci vor rămâne acasă, iar câștigul fiecăruia va fi 0.

Să se determine punctele de echilibru ale jocului bimatriceal definit de matricea (A, B) .

Tabelul nr. 10.1.

Soț	Soție	F = Fotbal	T = Teatru
F = Fotbal		(4, 1)	(0, 0)
T = Teatru		(0, 0)	(1, 4)

Se consideră că soțul este jucătorul I și soția jucătorul II. Matricea câștigurilor este (A, B) .

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{pmatrix}$$

Strategiile pure $x^* = (1, 0)$ și $y^* = (0, 1)$ formează un punct de echilibru, dar și strategiile pure: $x^{*1} = (0, 1)$ și $y^{*1} = (1, 0)$ formează un punct de echilibru. Se verifică că strategiile (x, y^{*1}) și (x^{*1}, y) nu sunt puncte de echilibru.

Matricile de câștig ale celor doi jucători sunt:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Fie strategiile mixte x și y ale celor doi jucători:

$$x = (x_1, x_2), x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$$

$$y = (y_1, y_2), y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$$

Se înlocuiesc aceste valori în relațiile (10.7), deci :

$$x.A.y^{*t} \leq x^*.A.y^{*t}$$

Deci :

$$(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4.x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq (4, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4.x_1 \leq 4,$$

$$x_1 \leq 1,$$

adevărat , $x_1 \in [0, 1]$, fiind o probabilitate

$$x^*.B.y^t \leq x^*.B.y^{*t}$$

$$(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 \leq 1,$$

adevărat , $y_1 \in [0, 1]$, fiind o probabilitate

În mod analog se face verificarea că strategiile :

$x^{*1} = (0, 1)$ și $y^{*1} = (0, 1)$ formează un punct de echilibru.

Se verifică în mod analog că strategiile (x, y^{*1}) și (x^{*1}, y) nu sunt puncte de echilibru.

Punctul de echilibru (x^*, y^*) aduce primului jucător câștigul $a_{11} = 4$ și celui de al doilea jucător câștigul $b_{11} = 1$, iar al doilea punct de echilibru (x^{*1}, y^{*1}) aduce primului jucător câștigul $a_{22} = 1$ și celui de al doilea jucător câștigul $b_{22} = 4$, deci câștigurile corespunzătoare celor două puncte de echilibru sunt diferite, fiecare jucător va prefera un anumit punct de echilibru, rezultând că cele două puncte de echilibru nu sunt stabile. Jucătorul I va dori folosirea strategiilor pure $x^* = (1, 0)$ și $y^* = (1, 0)$, iar jucătorul II va dori folosirea strategiile pure $x^{*1} = (0, 1)$ și $y^{*1} = (0, 1)$. Rezultă că jucătorul I va folosi strategia pură $i = 1$, iar jucătorul II $j = 2$, jocul fiind necooperativ, nu sunt posibile negocieri, rezultă câștigurile celor doi jucători vor fi minime, $a_{12} = 0$, $b_{12} = 0$, deci pierde amândoi. Dacă jucătorii sunt raționali vor trece de la lipsa cooperării la cooperare, la negociere pentru a câștiga amândoi mai mult. Dacă jocul este cooperativ, deci sunt permise negocieri, unul dintre jucători va ceda propunerilor celuilalt, amândoi vor câștiga mai mult de zero, adică un jucător câștigă 4 și celălalt 1.

11. ELEMENTE DE TEORIA DECIZIEI

11.1. PROCESUL DECIZIONAL

Managementul firmei este în strânsă legătură cu procesul de luare a deciziilor, decizia fiind una din funcțiile managementului. Managementul se exercită prin decizii. Toți autorii care abordează problematica optimizării deciziilor urmăresc asigurarea raționalității procesului decizional.

Decizia este hotărârea de a alege o anumită variantă de acțiune, din mai multe posibile, atașate unui anumit proces sau fenomen. Decizia se adoptă pentru ca procesul sau fenomenul studiat să evolueze în sensul stabilit dinainte de o persoană denumită decident (sau mai multe persoane denumite decidenți). Decizia reprezintă momentul esențial al conducerii, finalitatea oricărui proces de management.

Procesul de luare a deciziilor (procesul decizional) este mulțimea acțiunilor întreprinse de decident (decidenți) în vederea stabilirii deciziei.

Progresul unei firmei este determinat de calitatea deciziilor luate. Funcționalitatea și viabilitatea oricărei organizații, firme se asigură prin deciziile luate.

Decizia managerială este acea decizie care are urmări nemijlocite asupra acțiunilor și deciziilor a cel puțin unei alte persoane. Luarea unei decizii manageriale implică o responsabilitate mare datorită consecințelor de natură economică, socială și umană.

În practică decizia managerială are două forme: actul decizional și procesul decizional.

O decizie are forma unui **act decizional**, în sensul desfășurării sale, într-o perioadă relativ scurtă de timp, care poate fi de câteva secunde sau minute, se referă la situații decizionale de complexitate relativ redusă, repetitive, bazându-se pe intuiția și experiența managerilor.

Procesul decizional constă în mulțimea fazelor prin intermediul cărora se pregătește, adoptă, aplică și evaluează decizia managerială. Procesul decizional este specific deciziilor complexe, consumă un timp relativ mare, de ordinul orelor, zilelor sau săptămânilor și în acest timp se culeg, selectează, analizează informații, se consultă anumite persoane, pentru luarea deciziei. Factorii primari ai deciziei manageriale sunt decidentul și mediul ambiant decizional.

Decidentul este reprezentat de un manager sau un organism managerial care, în virtutea obiectivelor, sarcinilor, componentelor și responsabilităților circumscrise, adoptă decizia în situația respectivă.

Mediul ambiant decizional constă în mulțimea elementelor endogene și exogene firmei, care alcătuiesc situația decizională, caracterizate prin manifestarea unor influențe directe și indirecte semnificative asupra conținutului și rezultatelor deciziei manageriale. Mediul ambiant decizional are tendința să devină din ce în ce mai complex și cu un ritm de schimbare foarte rapid.

O situație de decizie, care generează un **proces decizional**, este caracterizată de următoarele elemente:

- *decidentul* este persoana care evaluează, analizează, conduce și aplică procesul care a generat situația de decizie;
- *mulțimea variantelor* sau alternativelor (V) este mulțimea posibilităților de acțiune la un moment dat, iar fiecare variantă este descrisă prin intermediul unor parametri atașați procesului (aceiași pentru toate variantele);
- *mulțimea criteriilor* (C) este mulțimea acelor parametri care caracterizează procesul și în funcție de care se urmărește compararea variantelor;
- *mulțimea obiectivelor* este mulțimea caracteristicilor (numerice sau nenumarice) atașate fiecărui criteriu în parte și care trebuie îndeplinite în urma aplicării deciziei;
- *mulțimea stărilor naturii* (condițiilor date, favorabile, nefavorabile etc.).

Prin **atribut** se înțelege un mijloc de evaluare a unei variante. Caracteristicile, factorii, proprietățile sunt sinonime cu atributele. Noțiunea de criteriu este echivalentă cu cea de atribut.

Importanța deciziilor determină nivelul de conducere la care acestea sunt luate.

Necesitatea adoptării unei decizii rezultă din apariția unor “probleme” în mersul normal al activităților firmei sau a unui aspect strategic important pentru viitorul său. Apariția unei probleme este determinată de factori interni firmei (cunoștințele, capacitatea, abilitatea salariaților și managerilor, condițiile de muncă, resurse insuficiente sau inadecvate, resursele

umane, motivația personalului etc.) și factori externi (restricții legislative, informațiile referitoare la mediul ambiant și la acțiunea unor factori care pot duce la perturbații etc).

Se poate vedea **cum se ia o decizie** atunci când a apărut o “problemă”, utilizând secvența de întrebări ce urmează mai jos.

1. A apărut o “problemă” ?
 - 1.1 De când a apărut “problema” ?
 - 1.2 Unde, când și cât de frecventă este “problema”?
 - 1.3 Când s-ar putea soluționa și în cât timp ?
2. Care este “problema”?
 - 2.1. Cine sunt cei în cauză ?
 - 2.2. Care este performanța dorită ?
 - 2.3. Care sunt aspectele specifice ale rezultatelor nedorite?
3. Cât de importantă este problema ? Care este impactul asupra producției, firmei, compartimentelor, salariaților ?
4. Ce factori au determinat / influențat apariția acestei probleme ?
5. Ce soluții / variante / linii de acțiune ar duce la redresarea situației ?
6. Ce avantaje prezintă soluțiile posibile ?
 - 6.1. Soluțiile vor duce la creșterea performanțelor ?
 - 6.2. Ce influențe au soluțiile / variantele / liniile de acțiune asupra obiectivelor pe termen lung ?
 - 6.3. Sunt condiții pentru implementarea cu succes a soluțiilor preconizate ?
 - 6.4. Soluțiile sunt avantajoase din punct de vedere al costurilor și profitabilității ?
 - 6.5. Rezultatele preconizate să fie obținute sunt compatibile între firmă în ansamblul ei și fiecare salariat, între nivelul strategic și nivelul operativ etc. ?
7. Ce soluție / variantă / linie de acțiune este mai avantajoasă ? Care este decizia optimă ?

Etape ale procesului decizional

Procesul de luare a deciziilor este de o mare complexitate și responsabilitate, deci este necesar să fie precedat de măsuri de clarificare a problemei, cum ar fi verificarea realității problemei respective, stabilirea gradului de prioritate pe care îl prezintă problema în cauză.

O structurare a procesului de luare a deciziilor este următoarea:

1. Precizarea și definitivarea obiectivului;
2. Adunarea, selectarea și ordonarea datelor;
3. Analiza informațiilor;
4. Construirea variantelor și stabilirea criteriilor;
5. Adoptarea deciziei;
6. Comunicarea deciziei;
7. Aplicarea deciziei;
8. Controlul și urmărirea aplicării deciziei.

Aceste etape pot fi structurate și altfel, în alt număr de etape și conținut, dar important este ca în finalul rezolvării problemei să se adopte decizia optimă / rațională.

Conceptul de proces decizional este abordat, în general, în două accepțiuni principale: conceptul de proces decizional în sens restrâns, care ia în considerare toate etapele premergătoare actului decizional, și conceptul de proces decizional în sens larg, care mai cuprinde în plus transmiterea deciziei la locul de aplicare și controlul modului de aplicare (cele opt etape prezentate mai sus).

O altă structurare a fazelor procesului decizional este datorată lui Lee, S.M. și Moore, J.M., cuprinde etapele:

1. Formularea problemei, adică: definirea problemei, orientarea asupra perioadei de analiză, stabilirea autorității inițiale și a autorității de control, stabilirea persoanelor care au dreptul de veto (dacă există) și a modului de adoptare a deciziilor (cu unanimitate sau cu majoritate de voturi), formularea obiectivelor, studierea mediului ambiant, stabilirea alternativelor de acțiune;

2. Dezvoltarea modelelor, deci se stabilește tipul modelelor (deterministe, stochastice, fuzzy; monoobiectiv / multiobiectiv), restricțiile, obiectivele, variabilele de decizie, criteriile de apreciere a variantelor;

3. Rezolvarea modelelor și optimizarea soluției, utilizând metode și tehnică de calcul corespunzătoare;

4. Implementarea soluției, deci transpunerea soluției optime în politici concrete de management.

Se impune a se face o demarcație între atribuțiile decizionale ale managerului (individual sau de grup) și competența profesională a analiștilor care în etapele 2 și 3 rezolvă sau contribuie la rezolvarea lor.

Procesul decizional poate fi structurat în faze.

Mintzberg a propus o structurare a procesului decizional în șapte faze: recunoașterea și diagnosticarea problemei, căutarea, proiectarea, selectarea alternativelor, alegerea deciziei, autorizarea deciziei.

H. Simon a propus un model al procesului decizional inițial cu trei faze (informarea, proiectarea, alegerea-implementarea), care a evoluat și a devenit structurat în patru faze în următoarea succesiune: informarea, proiectarea, alegerea, implementarea și evaluarea rezultatelor. Fiecare fază în sine poate fi un proces decizional complex, se poate descompune în subprobleme, care la rândul lor pot avea etape de informare, proiectare, alegere, implementare și evaluare a rezultatelor.

Informarea constă în culegerea de date referitoare la sistemul condus.

Faza de informare cuprinde activitățile:

- stabilirea obiectivelor: stabilirea listei de subiecte de interes dintre care unele vor fi criterii de evaluare a alternativelor, gruparea obiectivelor, realizarea diferențierii dintre obiectivele fundamentale și cele ajutătoare;
- culegerea datelor și sesizarea situației decizionale;
- stabilirea frontierelor problemelor (frontierele fizice, temporale și cele legate de unghiul din care este privită problema) și evaluarea calității datelor, informațiilor și cunoștințelor, rezultând clasa de decizii unde se încadrează: decizii deterministe, decizii în condiții de risc sau decizii condiții de incertitudine;
- descompunerea problemei decizionale, dacă problema decizională este complexă.

Proiectarea modelelor și alternativelor (variantelor) constă în inventarierea alternativelor sau generarea de noi alternative și evaluarea consecințelor acestora.

Faza de proiectare cuprinde activitățile:

- construirea unui model, dacă sistemul condus este complex, funcție de certitudinea informației, utilizând modelul deciziilor în condiții de certitudine, risc sau incertitudine;
- adoptarea demersului de modelare și rezolvare a problemei, alegerea criteriilor de apreciere a variantelor;
- stabilirea alternativelor.

Alegerea are ca scop selectarea unei variante decizionale (alternative). Alegerea unei alternative se poate face în mai multe moduri:

- la întâmplare;
- pe bază de rutină, de experiență;
- pe analogia cu deciziile de succes luate în condiții asemănătoare;
- decizia prin metode sistematice, prin formule matematice (de exemplu, pentru deciziile multiatribut se pot utiliza algoritmii: maxmin, Leader, Topsis, Onicescu, Electre etc.).

Implementarea și **evaluarea** rezultatelor se face după aplicarea efectivă a deciziei. *Implementarea* unei decizii înseamnă o schimbare a stării sistemului asupra căruia decidentul are autoritate, deși păstrarea stării actuale este o decizie posibilă, care nu poate fi ignorată. Implementarea depinde de decizia optimă sau rațională luată, dar și de persoanele care trebuie să execute cele stabilite de decizie. *Evaluarea* calității unei decizii se apreciază după rezultatul obținut în urma aplicării deciziei, dar și în funcție de informațiile disponibile, metodele matematice utilizate și abundența variantelor decizionale identificate sau proiectate, oportunitatea deciziei în sensul elaborării și adoptării ei la timp.

11.2. CLASIFICĂRI ALE PROCESELOR DECIZIONALE

Se pot face diverse clasificări ale proceselor decizionale după diverse criterii, cum ar fi: numărul criteriilor, numărul variantelor, stările naturii, numărul decidenților, logica matematică utilizată, orizontul de timp și implicațiile asupra organizației etc.

1. După numărul criteriilor luate în considerare:

- procese de decizie (decizii) cu un singur criteriu;
- procese de decizie (decizii) cu mai multe criterii, numite decizii multicriteriale sau decizii multidimensionale;

2. După numărul variantelor decizionale posibile:

- procese de decizie (decizii) cu un număr finit de variante;
- procese de decizie (decizii) cu număr infinit de variante;
- dacă modelele de decizie (deciziile) sunt multicriteriale și sunt un număr finit de variante, se vor numi decizii multiatribut;
- dacă modelele de decizii (deciziile) sunt multicriteriale și mulțimea variantelor este infinită se vor numi decizii multiobiectiv . (modelul cuprinde o mulțime de restricții și o funcție vectorială de mai multe variabile ale cărei componente trebuie maximizate sau minimizate);

3. După numărul de stări ale naturii și probabilitățile de realizare a acestora:

- procese de decizie (decizii) în condiții de certitudine, o singură stare a naturii, iar probabilitatea de realizare este $p = 1$ (evenimentul sigur);
- procese de decizie (decizii) în condiții de risc (incertitudine de gradul I), sunt mai multe stări ale naturii, r stări: $N_1, N_2, \dots, N_r$, cu probabilități de realizare p_k , $k = 1, 2, \dots, r$; cunoscute,

$$p_k \in [0, 1], k = 1, 2, \dots, r;$$

$$\sum_{k=1}^r p_k = 1$$

- procese de decizie (decizii) în condiții de incertitudine (incertitudine de gradul II, incertitudine propriu-zisă), sunt mai multe stări ale naturii, r stări: $N_1, N_2, \dots, N_r$, fără a se cunoaște probabilitățile corespunzătoare de realizare;
- procese de decizie (decizii) în condiții de ignoranță (incertitudine de gradul III), când nu se cunosc nici rezultatele (consecințele) posibile pentru diferite variante, nici probabilitățile de apariție a stărilor naturii. După unii autori această categorie de decizii nu există.

4. După numărul decidenților:

- procese decizionale (decizii) cu un singur decident, deci decizii cu decident individual;
- procese decizionale (decizii) cu mai mulți decidenți, numite decizii cu decident multiparticipant (de grup). În prezent, deciziile importante sunt luate de decidenți de grup. În funcție de gradul de autoritate și de răspundere a participanților la procesul decizional, decidentul multiparticipant poate fi:
 - decident de grup de omologi, când participanții au poziții de autoritate egale sau apropiate;
 - echipa decizională ierarhică, în care răspunderea deciziei o are conducătorul echipei;
 - decident de tip multiparticipant organizațional, dacă membrii echipei decizionale ocupă poziții și au puteri inegale în organizație;
 - echipe sau grupuri decizionale virtuale, compuse din persoane aflate în locuri diferite care sunt conectate prin internet.

5. După gradul de structurare (de programabilitate)

- decizii nestructurate, numite și decizii neprogramate, aparțin clasei de probleme nestructurate pentru care nu există o metodă pregătită de rezolvare deoarece fie că nu a apărut până atunci, fie că structura sa este deosebit de complexă sau este atât de importantă încât trebuie o rezolvare specială, pe măsură;
- decizii structurate, numite și decizii programate, sunt deciziile care pot fi descrise sau programate sub forma unui algoritm sau sub forma unor proceduri bine definite care pot fi realizate automate; deciziile structurate aparțin clasei de probleme structurate;
- decizii semiprogramate au elemente din deciziile nestructurate și deciziile structurate.

6. După numărul de procese decizionale considerate în succesiune (frecvența lor):

- proces decizional unic, desfășurat la momentul t ;
- succesiuni de procese decizionale desfășurate la momente de timp diferite.
- periodice, se adoptă la anumite intervale de timp, reflectând caracterul ciclic al proceselor manageriale și de producție;
- aleatorii, se adoptă la intervale de timp neregulate și sunt dificil de anticipat.

7. După logica matematică utilizată:

- decizii pe baza logicii discrete (clasice), care cuprind două subclase:
 - decizii care au la bază logica bivalentă, există două valori de adevăr ale variabilelor logice: adevăr și fals, notate cu 1 și 0, este valabil principiul terțiului exclus;
 - decizii care au la bază logica n -valentă, $n > 2$, de tip Lukasiewicz, există n valori de adevăr ale variabilelor logice, între fals notat cu 0 și adevăr notat cu 1, fiind posibile $n-2$ trepte de adevăr, notate cu $0, 1/(n-1), 2/(n-1), \dots, (n-2)/(n-1), 1$;
- decizii pe baza logicii continue: decizii fuzzy (vagi), există mai multe grade de apartenență a unui element la o mulțime și variabilele logice fuzzy iau valori în intervalul $[0, 1]$.

8. După nivelul decizional și orizontul decizional de timp:

- decizii strategice;
- decizii tactice;

- decizii curente (operaționale).

Deciziile strategice sunt deciziile care vizează orizonturi de timp mari, în general 3 - 5 ani, se referă la problemele de ansamblu ale organizației și pentru rezolvarea lor sunt necesare soluții originale. Deciziile strategice se adoptă în legătură cu strategia firmei, respectiv cu stabilirea obiectivelor strategice, a modalităților de realizare, cu stabilirea dimensiunii resurselor ce urmează să fie angajate pentru îndeplinirea obiectivelor și cu precizarea modalităților concrete de obținere de avantaj competitiv pe piața pe care este în competiție firma. Deciziile strategice se adoptă, în general, de managerii de grup, constituiți în Consiliul de administrație, Comitetul de direcție, adunarea generală a acționarilor.

Deciziile tactice urmăresc perioade cuprinse între 6 luni și 2 ani și activități, respectiv compartimente, ce influențează decisiv funcționalitatea și eficacitatea celorlalte componente procesuale și structurale sau ale firmei. Deciziile tactice sunt pregătite prin procedee reglementate sau logice și se iau pentru acțiuni concrete care au un oarecare caracter de repetitivitate, iar informațiile care condiționează alegerea unor astfel de decizii sunt în cea mai mare parte cunoscute. Deciziile tactice se adoptă fie de organismele participative de management, fie de managerii amplasați la nivelul superior al structurii organizatorice (director general, directori executivi).

Deciziile curente (operaționale) se referă la orizonturi mai mici de timp, de până la câteva luni, și se adoptă de managerii de nivel mediu și inferior.

9. După modul de efectuare a calculelor necesare pentru luarea deciziei:

- decizii bazate pe calcule efectuate manual;
- decizii mixte, cu folosirea parțială a calculatorului și a calculelor manuale, a intuiției, a experienței;
- decizii asistate de calculator. Există sisteme informatice, numite Sisteme Suport pentru Decizie, (*Decision Support Systems – DSS*), pentru ajutarea procesului decizional. O variantă a acestor sisteme informatice o reprezintă Sistemele Suport al Deciziilor de Grup (*Group Decision Support Systems – GDSS*).

10. După eșalonul managerial care le adoptă:

- decizii superioare, se adoptă de eșalonul superior al managementului participativ (adunarea generală a acționarilor, consiliul de administrație), manager general și directorii pe domenii (o parte sunt decizii strategice și tactice);
- decizii medii, se adoptă de eșalonul mediu al managementului, alcătuit din șefii de secții și ateliere (majoritatea sunt decizii curente și tactice);
- decizii inferioare, se adoptă de către eșalonul inferior al managementului, alcătuit din șefi de birou și de echipe (sunt numai decizii curente).

11. După posibilitatea anticipării:

- decizii anticipate, se cunosc cu mult timp înainte perioada adoptării și elementele implicate;
- decizii imprevizibile, perioada adoptării și principalele elemente implicate se cunosc cu puțin timp înainte de adoptare, depind de intuiția și capacitatea decizională a managerilor.

12. După amploarea sferei decizionale a decidentului:

- decizii integrale, se adoptă din inițiativa decidentului, fără a fi necesar avizul eșalonului ierarhic superior;
- decizii avizate, aplicarea lor este condiționată de avizarea la nivelul eșalonului ierarhic superior.

13. După sfera de cuprindere a decidentului:

- decizii participative, se adoptă de organismele de management participativ (consiliul de administrație, adunarea generală a acționarilor etc.)
- decizii individuale, se adoptă de către un cadru de conducere al firmei.

14. După modul de elaborare:

14.1. Decizii analitice (sistematice), utilizează analiza și metode logice, soluția se obține printr-un proces rațional de selecție, alegere rațională, pas cu pas, a celei mai bune variante ;

14.2. Decizii intuitive, utilizează intuiția, imaginația, experiența, flerul, se bazează pe concepția că decizia este artă și nu știință.

Relația dintre tipul deciziei și nivelul de management la care este luată decizia este dată în tabelul nr 11. 1.

Relația dintre tipul deciziei și nivelul de management . Tabelul nr 11.1.

Nivelul de management	Tipuri de decizii			
Management de vârf	Decizii neprogramate	Decizii strategice	Decizii în condiții de incertitudine	Decizii analitice
Management mediu	Decizii semiprogramate	Decizii Tactice	Decizii în condiții de risc	Decizii intuitive
Management inferior	Decizii programate	Decizii operative	Decizii în condiții de certitudine	Decizii intuitive

11. 3. DECIZII DETERMINISTE

11. 3. 1. DECIZII MONOCRITERIALE

Deciziile monocriteriale sunt apreciate după un singur criteriu C și cuprind următoarele elemente :

- o mulțime de variante: $V = \{ V_1, V_2, \dots, V_m \}$;
- un singur criteriu C;
- fiecare variantă V_i este caracterizată în raport cu criteriul C , iar rezultatul evaluării este egal cu a_i , $i = 1, 2, \dots, m$;
- rezultatele evaluării celor m variante în raport cu criteriul C este un vector al consecințelor A:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$$

Trebuie determinată varianta optimă (cea mai bună) din punctul de vedere al criteriului C sau clasamentul descrescător al variantelor, pe primul loc fiind varianta optimă. Criteriul C poate fi criteriu de maxim sau criteriu de minim.

Dacă criteriul C este **criteriu de maxim**, varianta optimă se obține din condiția:

$$a_k = \max \{ a_i, i = 1, 2, \dots, m \}$$

$$V_{\text{optimă}} = V_k$$

Clasamentul variantelor decizionale este dat de ordonarea descrescătoare a componentelor vectorului A, pe primul loc fiind varianta optimă.

Dacă criteriul C este **criteriu de minim**, varianta optimă se obține din condiția:

$$a_k = \min \{ a_i, i = 1, 2, \dots, m \}$$

$$V_{\text{optimă}} = V_k$$

Clasamentul variantelor decizionale este dat de ordonarea crescătoare a componentelor vectorului A, pe primul loc fiind varianta optimă.

11. 3. 2. DECIZII MULTIATRIBUT

Deciziile multicriteriale cu un număr finit de variante se numesc **decizii multiatribut**.

Deciziile multiatribut cuprind următoarele elemente :

- o mulțime de variante: $V = \{ V_1, V_2, \dots, V_m \}$;
- o mulțime de criterii: $C = \{ C_1, C_2, \dots, C_n \}$;
- fiecare variantă V_i este caracterizată în raport cu criteriul C_j , iar rezultatul evaluării este egal cu a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;
- rezultatele evaluării celor m variante în raport cu cele n criterii este matricea consecințelor

A:

$$A = (a_{ij}) , i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n ;$$

- sunt situații în care nu toate criteriile avute în vedere sunt la fel de importante și în acest sens importanța criteriilor este evaluată prin coeficienți de importanță p_j , $p_j > 0$, dar intervine în acest caz un anumit grad de subiectivitate,

Aceste elemente sunt sintetizate în tabelul nr.11.2.

Tabelul nr.11.2.

V_i	C_j	C_1	C_2	$\dots$	C_n
V_1		a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
V_2		a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
V_m		a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}
p_j		p_1	p_2	$\dots$	p_n

Trebuie determinată varianta optimă (cea mai bună) din punctul de vedere al celor n criterii de apreciere a variantelor sau clasamentul descrescător al variantelor, pe primul loc fiind varianta optimă.

Un criteriu, de exemplu profitul, ale cărui valori sunt cu atât mai bune cu cât sunt mai mari, se numește criteriu de maxim. Un criteriu, de exemplu costurile, ale cărui valori sunt cu atât mai bune cu cât sunt mai mici, se numește criteriu de minim. În problema de decizie multiatribut se urmărește ordonarea variantelor mulțimii V de la cea mai bună , la cea mai slabă, ținând cont de toate criteriile mulțimii C sau determinarea celei mai bune variante din punctul de vedere al ansamblului criteriilor din mulțimea C .

Matricea consecințelor A conține, în general, date neomogene, numerice sau nenumere și aceste date trebuie omogenizate. Omogenizarea datelor se realizează prin găsirea unei corespondențe între mulțimea valorilor criteriilor și o anumită mulțime, iar această corespondență se numește **scalare**.

Scalarea este de trei feluri :

- scalare ordinală, când mulțimea cu care se face corespondența este mulțimea numerelor naturale, dar această scalare dă ordinea variantelor, dar nu și distanța dintre ele;
- scalare într-un interval, când mulțimea de corespondență este un interval, fiind dată ordinea variantelor și distanța între ele;
- normalizarea, care reprezintă transformarea matricei consecințelor A într-o matrice R cu elementele din intervalul $[0, 1]$.

Dacă:

$A = (a_{ij})$ este matricea consecințelor ,

$R = (r_{ij})$ este matricea normalizată, $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$;
există mai multe posibilități de normalizare.

1.) Normalizare vectorială.

Se utilizează relațiile (11.1) sau (11.2).

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2}} \quad (11.1)$$

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^m a_{ij}} \quad (11.2)$$

$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

2.) Normalizare prin transformări liniare.

2.1.) pentru criterii care se maximizează se utilizează relația (11.3).

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}} \quad (11.3)$$

2.2.) pentru criterii care urmăresc minimul se utilizează relația (11.4).

$$r_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{\max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}} \quad (11.4)$$

1. Metoda MAXIMIN

Decizia optimă este dată de relațiile (11.5).

$$r_{sk} = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} r_{ij} \quad (11.5)$$

$$V_{i \text{ optima}} = V_s$$

2. Metoda MAXIMAX

Condiția de optim este (11.6).

$$r_{sk} = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} \quad (11.6)$$

$$V_{i \text{ optima}} = V_s$$

3. Metoda ponderării simple aditive

Se consideră problema de decizie multiatribut cu m variante V_i , n criterii de apreciere a variantelor C_j cu coeficienții de importanță p_j , iar matricea consecințelor este A .

$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$

Se normalizează matricea A , rezultând matricea normalizată R .

$R = (r_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$

Se calculează (11.7).

$$f(V_i) = \frac{\sum_{j=1}^n p_j \cdot r_{ij}}{\sum_{j=1}^n p_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (11.7)$$

Varianta optimă este dată de relația (11.8).

$$f(V_s) = \max_{1 \leq i \leq m} f(V_i) \quad (11.8)$$

$$V_{i \text{ optima}} = V_s$$

4. Metoda ONICESCU - Varianta 1.

Din matricea consecințelor A se obține matricea B, iar din matricea B rezultă matricea C.

$$A = (a_{ij})$$

$$B = (L_{ij})$$

$$C = (\alpha_{ij})$$

unde:

L_{ij} - este varianta care ocupă locul i după de criteriul C_j ;

α_{ij} - reprezintă de câte ori varianta V_i ocupă locul j , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Se definește funcția f în (11.9).

$$f : V \rightarrow R_+$$

$$f(V_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{ij}}{2^j}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (11.9)$$

unde:

$$V = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}.$$

Ierarhia celor m variante ale mulțimii variantelor V este dată de valorile descrescătoare ale lui $f(V_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, în (11.10).

$$f(V_s) = \max_{1 \leq i \leq m} f(V_i)$$

$$V_{i \text{ optima}} = V_s \quad (11.10)$$

5. Metoda ONICESCU - Varianta 2.

Pentru fiecare criteriu C_j se consideră coeficientul de importanță p_j , $p_j(0, 1)$ de forma $p_j = 1/2^k$, $j = 1, 2, \dots, n$; $k \in N^*$.

Se definesc funcțiile loc și f în (11.11) și (11.12).

$$\text{loc}: V \times C \rightarrow \{1, 2, \dots, m\} \quad (11.11)$$

$$f: V \rightarrow R^+,$$

astfel: $\text{loc}(V_i, C_j) = \text{locul variantei } V_i \text{ în raport cu criteriul } C_j$;

$$f(V_i) = \sum_{j=1}^n p_j \cdot 2^{-\log(V_i, C_j)} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (11.12)$$

Ordinea descrescătoare a variantelor este dată de ordonarea descrescătoare a valorilor $f(V_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

6. Metoda TOPSIS

Metoda **TOPSIS** (**T**echnique for **O**rders Preference by **S**imilarity to **I**deal **S**olution) are la bază ideea că varianta optimă trebuie să aibă distanța minimă la soluția ideală.

Se consideră o problemă de decizie multiatribut, deci se cunosc:

- mulțimea variantelor :

$$V = \{ V_1, V_2, \dots, V_m \};$$

- mulțimea criteriilor de apreciere a variantelor:

$$C = \{ C_1, C_2, \dots, C_n \};$$

- matricea consecințelor A :

$$A = (a_{ij}),$$

unde:

a_{ij} - reprezintă aprecierea variantei V_i prin criteriul C_j , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$;

- vectorul preferințelor cardinale ale criteriilor :

$$(p_1, p_2, \dots, p_n), p_j [0; 1]$$

unde p_j reprezintă coeficientul de importanță al criteriului C_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

Algoritmul TOPSIS

Etapa 1.

Se transformă matricea consecințelor A în matricea normalizată R prin normalizare vectorială, cu relațiile (11.16) sau (11.17).

unde:

$$A = (a_{ij})$$

$$R = (r_{ij})$$

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2}} \quad (11.16)$$

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^m a_{ij}} \quad (11.17)$$

$i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Etapa 2.

Se construiește matricea normalizată ponderată V ,

$$V = (V_{ij}), \quad V_{ij} = p_j \cdot r_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Etapa 3.

Se determină soluția ideală V^+ și soluția ideală negativă V^- , definite în relațiile (11.18) și (11.19).

$$V^+ = (V_1^+, V_2^+, \dots, V_n^+)$$

$$V^- = (V_1^-, V_2^-, \dots, V_n^-),$$

unde :

$$V_j^+ = \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq m} V_{ij} & \text{daca criteriul } C_j \text{ este criteriu de maxim} \\ \min_{1 \leq i \leq m} V_{ij} & \text{daca criteriul } C_j \text{ este criteriu de minim} \end{cases} \quad (11.18)$$

$$V_j^- = \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq m} V_{ij} & \text{daca criteriul } C_j \text{ este criteriu de maxim} \\ \max_{1 \leq i \leq m} V_{ij} & \text{daca criteriul } C_j \text{ este criteriu de minim} \end{cases} \quad (11.19)$$

Etapa 4.

Se calculează distanțele (distanța euclidiană) între soluții cu (11.20).

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (V_{ij} - V_j^+)^2} \quad (11.20)$$

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (V_{ij} - V_j^-)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Etapa 5.

Se calculează apropierea relativă a fiecărei variante de soluția ideală cu (11.21).

$$, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (11.21)$$

Etapa 6.

Se face clasificarea descrescătoare pentru C_i^+ , $i = 1, 2, \dots, m$, rezultând clasificarea descrescătoare a variantelor, deci varianta optimă este dată de (11.22).

$$C_k = \max_{1 \leq i \leq m} C_i^+ \quad (11.22)$$

$$V_{i \text{ optima}} = V_k$$

Exemplul nr. 11.1.

O firmă are $m = 4$ variante de produse noi, care implică investiții diferite, iar criteriile de apreciere a variantelor sunt: C_1 = suma investită (criteriu de minim), C_2 = rata profitului (criteriu de maxim), C_3 = calitatea (criteriu de maxim). Elementele problemei sunt sintetizate în Tabelul nr. 11.3.

Tabelul nr. 11.3.

V_i	C_j	C_1 [lei]	C_2 [%]	C_3 [Note]
V_1		$200 \cdot 10^6$	20	8
V_2		$250 \cdot 10^6$	30	7
V_3		$300 \cdot 10^6$	25	9
V_4		$350 \cdot 10^6$	32	8
Tip criteriu [max/min]		min	max	max

Trebuie determinată varianta decizională optimă astfel:

- a) monocriterial;
- b) multicriterial, din punctul de vedere al celor $n = 3$ criterii.

Matricea consecințelor este A .

$$A = \begin{pmatrix} 200 \cdot 10^6 & 20 & 8 \\ 250 \cdot 10^6 & 30 & 7 \\ 300 \cdot 10^6 & 25 & 9 \\ 350 \cdot 10^6 & 32 & 8 \end{pmatrix}$$

a) monocriterial

a1) după criteriul C_1 :

$$\min(200 \cdot 10^6; 250 \cdot 10^6; 300 \cdot 10^6; 350 \cdot 10^6) = 200 \cdot 10^6 = a_{11}$$

deci varianta optimă după criteriul C_1 este V_1 , iar clasamentul descrescător al variantelor este: V_1, V_2, V_3, V_4 .

a2) după criteriul C_2 :

$$\max(20, 30, 25, 32) = 32 = a_{42}$$

deci varianta optimă după criteriul C_2 este V_4 , iar clasamentul descrescător al variantelor este: V_4, V_2, V_3, V_1 .

a3) după criteriul C_3 :

$$\max(8, 7, 9, 8) = 9 = a_{33}$$

deci varianta optimă după criteriul C_3 este V_3 , iar clasamentul descrescător al variantelor este: V_3, V_1, V_4, V_2 sau V_3, V_4, V_1, V_2 .

b) multicriterial

Se va rezolva prin câteva metode de decizie multiatribut.

b1) Metoda maximin

Se va normaliza matricea A prin utilizarea relațiilor (11.3) și (11.4).

$$r_{11} = 1 - 200 \cdot 10^6 / 350 \cdot 10^6 = 3/7, \quad r_{21} = 1 - 250 \cdot 10^6 / 350 \cdot 10^6 = 2/7,$$

$$r_{31} = 1 - 300 \cdot 10^6 / 350 = 1/7, \quad r_{41} = 1 - 350 \cdot 10^6 / 350 \cdot 10^6 = 0, \quad r_{12} = 20 / 32 = 5/8,$$

$$r_{22} = 30/32 = 15/16, \quad r_{32} = 25/32, \quad r_{42} = 32/32 = 1, \quad r_{13} = 8/9, \quad r_{23} = 7/9, \quad r_{33} = 9/9 = 1,$$

$$r_{43} = 8/9.$$

$$R = \begin{pmatrix} 3/7 & 5/8 & 8/9 \\ 2/7 & 15/16 & 7/9 \\ 1/7 & 25/32 & 1 \\ 0 & 1 & 8/9 \end{pmatrix}$$

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \min_{1 \leq j \leq 3} r_{ij} = \max\{\min(3/7, 5/8, 8/9), \min(2/7, 15/16, 7/9), \min(1/7, 25/32, 1), \min(0, 1, 8/9)\} =$$

$= \max(3/7, 2/7, 1/7, 0) = 3/7 = r_{11}$, deci varianta V_1 este optimă din punctul de vedere al celor $n = 3$ criterii de apreciere a variantelor (relativ optimă, conform metodelor prezentate).

b2) Metoda maximax

Se va utiliza matricea normalizată R .

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \max_{1 \leq j \leq 3} r_{ij} = \max\{\max(3/7, 5/8, 8/9), \max(2/7, 15/16, 7/9), \max(1/7, 25/32, 1), \max(0, 1, 8/9)\} =$$

$$= \max(8/9, 15/16, 1, 1) = 1 = r_{33} = r_{42}, \text{ deci variantele } V_3 \text{ și } V_4 \text{ sunt optime.}$$

b3) Metoda ponderării simple aditive

Se utilizează matricea normalizată R .

Se aleg coeficienții de importanță p_j ai criteriilor C_j , de exemplu: $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/4$,
 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$$f(V_1) = 1/2 \cdot 3/7 + 1/4 \cdot 5/8 + 1/4 \cdot 8/9 \approx 0.214 + 0.156 + 0.222 \approx 0.592$$

$$f(V_2) = 1/2 \cdot 2/7 + 1/4 \cdot 15/16 + 1/4 \cdot 7/9 \approx 0.142 + 0.234 + 0.194 \approx 0.570$$

$$f(V_3) = 1/2 \cdot 1/7 + 1/4 \cdot 25/32 + 1/4 \cdot 1 \approx 0.072 + 0.195 + 0.250 \approx 0.517$$

$$f(V_4) = 1/2 \cdot 0 + 1/4 \cdot 1 + 1/4 \cdot 8/9 \approx 0.250 + 0.222 \approx 0.472$$

$$\max\{f(V_i), i = 1, 4\} = 0.592$$

Varianta optimă este V_1 .

Clasamentul variantelor: V_1, V_2, V_3, V_4 .

Pentru alte valori ale coeficienților de importanță p_j ai criteriilor C_j se obține alt clasament și altă variantă optimă.

b4) Metoda Onicescu, versiunea 1.

Se determină matricile B și C .

$$B = \begin{pmatrix} V_1 & V_4 & V_3 \\ V_2 & V_2 & V_1, V_4 \\ V_3 & V_3 & V_2 \\ V_4 & V_1 & - \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(V_1) = 1/2^1 + 1/2^2 + 0/2^3 + 1/2^4 = 13/16$$

$$f(V_2) = 0/2^1 + 2/2^2 + 1/2^3 + 0/2^4 = 10/16$$

$$f(V_3) = 1/2^1 + 0/2^2 + 2/2^3 + 0/2^4 = 12/16$$

$$f(V_4) = 1/2^1 + 1/2^2 + 0/2^3 + 1/2^4 = 13/16$$

$$\max\{f(V_i), i = 1, 4\} = 13/16 = f(V_1) = f(V_4),$$

deci variantele V_1, V_4 sunt optime din punctul de vedere al celor $n = 3$ criterii de apreciere a variantelor (relativ optimă, conform metodelor prezentate).

b5). Metoda Onicescu, versiunea 2.

Coeficienții de importanță sunt puteri negative ale lui doi, de exemplu:

$$p_1 = 1 / 2^1, p_2 = 1 / 2^2, p_3 = 1 / 2^2,$$

$$\text{loc}(V_1, C_1) = 1, \text{loc}(V_1, C_2) = 4, \text{loc}(V_1, C_3) = 2,$$

$$\text{loc}(V_2, C_1) = 2, \text{loc}(V_2, C_2) = 2, \text{loc}(V_2, C_3) = 3,$$

$$\text{loc}(V_3, C_1) = 3, \text{loc}(V_3, C_2) = 3, \text{loc}(V_3, C_3) = 1,$$

$$\text{loc}(V_4, C_1) = 4, \text{loc}(V_4, C_2) = 1, \text{loc}(V_4, C_3) = 2.$$

$$f(V_1) = 1 / 2^1 \cdot 2^{-1} + 1 / 2^2 \cdot 2^{-4} + 1 / 2^2 \cdot 2^{-2} = 21 / 64$$

$$f(V_2) = 1 / 2^1 \cdot 2^{-2} + 1 / 2^2 \cdot 2^{-2} + 1 / 2^2 \cdot 2^{-3} = 14 / 64$$

$$f(V_3) = 1 / 2^1 \cdot 2^{-3} + 1 / 2^2 \cdot 2^{-3} + 1 / 2^2 \cdot 2^{-1} = 14 / 64$$

$$f(V_4) = 1 / 2^1 \cdot 2^{-4} + 1 / 2^2 \cdot 2^{-1} + 1 / 2^2 \cdot 2^{-2} = 14 / 64$$

$\max f(V_i) = 21 / 64 = f(V_1)$, deci varianta V_1 este optimă.

Se observă că prin metode diferite se obțin variante optime diferite, iar acestea sunt V_1, V_3, V_4 , deci varianta V_2 se poate elimina din competiție, iar pentru cele trei rămase se poate aplica alt algoritm de decizie multiobiectiv (metoda combinată). Există un anumit grad de relativitate și subiectivism în alegerea variantei optime (relativ optime) din punctul de vedere al celor n criterii de apreciere a variantelor. Metodele prezentate sunt programabile pe calculator.

Pentru rezolvarea problemelor de decizii multiatribut pe calculator se pot folosi programe de firmă: ELECTRE III, PROMETHEE II, SMRT (Simple Multiattribute Rating Technique), dacă firma interesată le cumpără.

Aplicații practice se pot realiza în :

- proiectarea optimă a amplasării unui sistem de producție, când există mai multe variante de amplasare, iar criteriile pot fi: costul amplasării, recuperarea investiției, forța de muncă disponibilă, apropierea de sursele de materii prime, de piața de desfacere a produselor care se vor fabrica, șosea, linie ferată, aspecte ale poluării etc. ;
- proiectarea optimală a unui produs, fiind posibile o mulțime de variante ale produsului dintre care trebuie selectată varianta optimă din punctul de vedere a mai multor criterii: costuri, utilaje disponibile, concurența, posibilități tehnologice, service etc. ;
- proiectarea politicii de marketing a firmei;
- proiectarea variantei optime de amplasare a utilajelor într-o secție de producție;
- proiectarea variantei optime de sistem logistic;
- etc.

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C12-2019

11. 3.3. DECIZII DE GRUP

Într-o firmă sunt unele decizii manageriale care se iau de către un singur decident și altele care se iau de un grup de decidenți. Decizia de grup (multiparticipant, colectivă) antrenează un grup de decidenți și afectează, în general, acțiunile și interesele unei anumite colectivități. Deciziile importante se iau, în general, de un grup de decidenți (adunarea generală a acționarilor, consiliul de administrație al firmei etc.). Rațiunile organizării unui grup de decidenți care vor adopta decizii de grup într-o firmă țin de: tradiția activității manageriale din cadrul firmei, structura organizatorică și de delegare a competențelor la nivelul firmei, facilitarea comunicării între persoanele implicate în rezolvarea unei situații decizionale. Crearea unui grup de lucru nu reprezintă garanția absolută a adoptării celei mai bune decizii, aceasta depinde de nivelul cunoștințelor membrilor grupului, de posibilitatea de a acoperi un spectru cât mai larg de probleme care pot apărea, de comportamentul lor flexibil, de experiența decidenților din grup.

Pentru ca grupul de decidenți să poată acționa într-o manieră rațională care presupune maximizarea utilității obținute în urma aplicării deciziei de grup, decidenții trebuie să dispună de toate alternativele decizionale posibile și de consecințele aplicării acestora. Gradul în care decidenții dispun de aceste informații depinde de caracterul informațiilor de a fi informații perfecte sau imperfecte, iar decidenții se pot afla în condiții de *raționalitate perfectă* sau *raționalitate limitată*. În practica firmelor, decidenții trebuie să ia decizii fără să cunoască toate variantele pentru rezolvarea problemelor și a consecințelor lor posibile, deci trebuie să acționeze în cadrul unei raționalități limitate, iar consecința este că nu se va lua decizia optimă, ci o decizie satisfăcătoare sau suboptimală. Prin luarea unor decizii de grup și funcție de "arta" de constituire a grupului de decidenți, se pot minimiza efectele raționalității limitate. Pentru luarea deciziilor de grup trebuie să existe persoane competente, suficient timp pentru analiză și să se asigure un climat favorabil în timpul dezbaterilor. Oportunitatea adoptării deciziilor de grup trebuie pusă în corelație directă cu complexitatea problemei de rezolvat, cu volumul informațiilor necesare și cu urgența adoptării deciziei. Alegerea celei mai bune metode pentru rezolvarea unei probleme decizionale într-o întreprindere prin decizii individuale (V_1) sau decizii de grup (V_2) poate fi privită ca o problemă de decizie multiatribut, cu cele două variante V_1 și V_2 prezentate, iar criteriile pot fi: gradul de urgență, costul participării la adoptarea deciziilor (nu trebuie să fie mai mare decât avantajele care decurg din aceasta), echilibrul intern concretizat în securitatea subordonaților și menținerea autorității managerilor, existența comunicațiilor suficient de dezvoltate pentru a permite participarea efectivă la adoptarea deciziilor (sau participarea fizică a decidenților la locul unde se va adopta decizia de grup), pregătirea personalului pentru ca participarea sa să fie eficace, reglementări legislative. Soluționarea eficientă a problemelor decizionale de grup presupune stabilirea decidenților, a momentului adoptării deciziei și a persoanelor care urmează să le înfăptuiască sau să le controleze.

Deciziile de grup în managementul firmei au câteva **avantaje**:

- se utilizează cunoștințele și experiența mai multor specialiști;
- se realizează o mai bună informare asupra firmei;
- apar idei noi prin confruntarea diferitelor concepții;
- acceptarea deciziei este mai mare atunci când oamenii participă la luarea ei;
- oamenii cunosc mai bine deciziile și raționamentele care au stat la baza adoptării lor.

Dezavantaje ale deciziilor de grup sunt: responsabilitatea deciziilor este mai diluată, consumul de timp este mai mare decât în cazul deciziilor individuale, deci sunt mai costisitoare, riscul apariției unui sugrup al grupului de decidenți care să exercite o anumită presiune.

La nivelul unui grup de decizie, cerințele de raționalitate sunt mai complexe și în acest sens J. K. Arrow a definit un sistem de cinci condiții (ipoteze, axiome).

Condiția 1. Universalitatea.

Metoda de decizie de grup trebuie să fie aplicabilă mulțimii tuturor variantelor posibile.

Condiția 2. Izotonia.

Dacă o anumită variantă urcă pe scara preferințelor fiecărui individ, atunci ea trebuie să urce pe scara preferințelor grupului.

Condiția 3. Independența.

Dacă decizia se referă la n alternative posibile, clasamentul făcut de un grup nu trebuie modificat prin luarea în considerare a unei noi variante.

Condiția 4. Suveranitatea.

Regula după care se extrage decizia de grup nu trebuie să fie independentă de opiniile individuale, ci trebuie să depindă direct de acesta.

Condiția 5.

Decizia de grup nu trebuie să fie identică cu opinia unui anumit membru al grupului, fără a ține seama de opiniile celorlalți. Deci, alegerea globală nu este dictatorială.

Se observă că axioma 4 elimină posibilitatea existenței unui dictator extern, iar axioma 5 elimină posibilitatea existenței unui dictator intern. Utilizând aceste cinci

condiții, Arrow demonstrează că nu există nici o metodă de decizie de grup care să satisfacă cele cinci condiții de raționalitate enunțate și care să ducă întotdeauna la o soluție corectă când numărul decidenților este mai mare sau egal cu 2, iar numărul alternativelor este mai mare decât 2. Acest rezultat este numit **paradoxul lui Arrow**. O metodă de ieșire din impas constă în renunțarea la condiția a 3-a a lui Arrow, rezultând posibilitatea introducerii de utilități aditive interpersonale. O altă metodă constă în determinarea unui leader al alternativelor (variantelor), fără a mai căuta ordonarea completă a tuturor alternativelor. Diferența între decizia luată de un singur decident și decizia luată de mai mulți decidenți cuprinde aspectele:

- valoarea atribuită de fiecare decident fiecărei variante variază de la decident la decident; -- informația cu ajutorul căreia fiecare decident ia decizia, poate diferi de la decident la decident;
- există mai multe criterii pe baza cărora decidenții apreciază variantele.

Problema deciziilor multicriteriale de grup are structura:

- mulțime de h decidenți: $D = \{ D_1, D_2, \dots, D_h \}$;
- o mulțime de m variante: $V = \{ V_1, V_2, \dots, V_m \}$;
- o mulțime de n criterii: $C = \{ C_1, C_2, \dots, C_n \}$;
- fiecare variantă V_i este apreciată de fiecare decident D_k în funcție de criteriul C_j prin valorile a_{ijk} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, h$;
- fiecărui criteriu din C , i se dă un coeficient de importanță, prin mulțimea: $P = \{ p_1, p_2, \dots, p_n \}$ care pot fi numere reale sau din intervalul $[0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, h$;

Trebuie determinată varianta cea mai bună în funcție de toți decidenții și toate criteriile. Rezolvarea problemei de decizii multicriteriale de grup se face prin adaptarea metodelor multiatribut cu un singur decident.

Metoda minimizării distanței Hamming

O posibilitate de rezolvare a problemei deciziilor multiatribut de grup constă în **minimizarea distanței Hamming** de la fiecare variantă V_i la o variantă ideală V_{ideal} care are utilitatea 1 după fiecare criteriu. Utilitatea se calculează cu relațiile (10), (11). Se va considera utilitatea în sens von Neumann – Morgenstern. Matricea consecințelor A conține date neomogene, se transformă în matricea utilitate U prin interpolare liniară.

$$A = (a_{ijk}), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, h; \quad (6)$$

$$U = (u_{ijk}), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, h; \quad (7)$$

Se determină utilitatea u_{ijk} a variantei V_i , după criteriul C_j pentru decidentul D_k prin relația liniară (8).

$$u_{ijk} = U(a_{ijk}) = P \cdot a_{ijk} + Q \quad (8)$$

P și Q se determină prin interpolare liniară, știind că pentru decidentul D_k și după criteriul C_j utilitatea maximă este egală cu 1 pentru cea mai avantajoasă variantă, respectiv utilitatea minimă este egală cu 0 pentru cea mai dezavantajoasă variantă, $k = 1, 2, \dots, h$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Se notează:

$$a_{ijkmax} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ijk} \quad (9)$$

$$a_{ijkmin} = \min_{1 \leq i \leq m} a_{ijk}$$

Sunt două situații posibile.

1. Dacă criteriul C_j se optimizează prin maxim, atunci rezultă (10).

$$u_{ijk} = \frac{a_{ijk} - a_{ijkmin}}{a_{ijkmax} - a_{ijkmin}} \quad (10)$$

2. Dacă criteriul C_j se optimizează prin minim, atunci rezultă relația (11).

$$u_{ijk} = \frac{a_{ijk} - a_{ijkmax}}{a_{ijkmin} - a_{ijkmax}} \quad (11)$$

$$d(V_i, V_{ideal}) = f(V_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

$$f(V_i) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^h |1 - u_{ijk}|, \quad (13)$$

Se calculează (14):

$$f(V_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

cu relația (13) și varianta optimă cu relațiile (15).

$$f(V_s) = \min_{1 \leq i \leq m} f(V_i) \quad (15)$$

$$V_{optima} = V_s$$

Metoda maximizării utilității totale

O altă metodă de rezolvare a problemelor de decizie multiatribut de grup este prin ***metoda maximizării utilității totale***

Matricea consecințelor $A = (a_{ijk})$ se transformă în matricea utilitate $U = (u_{ijk})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, h$.

Se calculează:

$$f(V_i) = \sum_{k=1}^h \sum_{j=1}^n u_{ijk}, \quad i = 1, m; \quad (16)$$

$$f(V_s) = \max \{f(V_i), i = 1, m\}$$

$$V_{optima} = V_s$$

Exemplul nr. 11.2.

Problemă de decizii multiatribut de grup.

Pentru lansarea unui produs pe piață sunt $m = 4$ variante decizionale V_1, V_2, V_3, V_4 , $n = 3$ criterii de apreciere a variantelor C_1, C_2, C_3 , sunt criterii de maxim (s-au dat note) și $h = 3$ decidenți (egali) D_1, D_2, D_3 .

Matricea consecințelor este $A = (a_{ijk})$, $i = 1, 4$; $j = 1, 3$; $k = 1, 3$;

a_{ijk} - reprezintă aprecierea variantei V_i prin criteriul C_j de către decidentul D_k , $i = 1, 4$; $j = 1, 3$; $k = 1, 3$;

Pentru $k = 1$ matricea consecințelor A este dată de matricea bidimensională A_1 , pentru $k = 2$ de matricea bidimensională A_2 și pentru $k = 3$ de matricea bidimensională A_3 .

$$A_1 = (b_{ij}) = (a_{ij1}), \quad A_2 = (c_{ij}) = (a_{ij2}), \quad A_3 = (d_{ij}) = (a_{ij3}) \quad i = 1, 4; j = 1, 3;$$

Matricea A_k este a decidentului D_k , $k = 1, 2, 3$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 7 \\ 3 & 9 & 5 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 10 \\ 1 & 9 & 6 \\ 9 & 8 & 5 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 7 & 2 & 9 \\ 8 & 1 & 8 \\ 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Trebuie determinată varianta optimă a problemei de decizie multiatribut de grup, deci din punctul de vedere al celor $h = 3$ decidenți și $n = 3$ criterii de apreciere a variantelor. Se va rezolva prin două metode.

a) *Rezolvare prin minimizarea distanței Hamming*

Matricea consecințelor $A = (a_{ijk})$ se transformă în matricea utilitate $U = (u_{ijk})$, $i = 1, 4$; $j = 1, 3$; $k = 1, 3$.

Pentru $k = 1$ matricea utilitate U este dată de matricea bidimensională U^1 , pentru $k = 2$ de matricea bidimensională U^2 și pentru $k = 3$ de matricea bidimensională U^3 ; pentru criteriile C_1 , C_2 și C_3 care sunt de maxim, $i = 1, 4$; $j = 1, 3$; se utilizează relațiile (10), deci:

$$u_{ij1} = \frac{a_{ij1} - a_{ij1\min}}{a_{ij1\max} - a_{ij1\min}}$$

$$u_{ij2} = \frac{a_{ij2} - a_{ij2\min}}{a_{ij2\max} - a_{ij2\min}}$$

$$u_{ij3} = \frac{a_{ij3} - a_{ij3\min}}{a_{ij3\max} - a_{ij3\min}}$$

, $i = 1, 4$; $j = 3$. Se calculează coloanele matricilor U^1 , U^2 și U^3 .

$$U^1 = (t_{ij}) = (u_{ij1}), \quad U^2 = (v_{ij}) = (u_{ij2}), \quad U^3 = (w_{ij}) = (u_{ij3}), \quad i = 1, 4; j = 3.$$

Se calculează pe coloane pentru fiecare decident.

De exemplu,

$$t_{11} = u_{111} = \frac{a_{111} - a_{i11\min}}{a_{i11\max} - a_{i11\min}} = \frac{10 - 3}{10 - 3} = 1$$

$$t_{21} = u_{211} = \frac{a_{211} - a_{i11\min}}{a_{i11\max} - a_{i11\min}} = \frac{5 - 3}{10 - 3} = \frac{2}{7}$$

$$U^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2/7 & 5/7 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/7 & 2/7 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad U^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 2/3 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}, \quad U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$f(V_i) = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 |1 - u_{ijk}|, \quad i = 1, 4;$$

$$\begin{aligned}
f(V_1) &= (|1-1| + |1-0| + |1-1|) + (|1-1/3| + |1-0| + |1-1|) + (|1-0| + |1-2/3| + |1-1|) = 4 \\
f(V_2) &= (|1-2/7| + |1-5/7| + |1-2/3|) + (|1-0| + |1-1| + |1-1/5|) + (|1-1/2| + |1-1/3| + |1-4/5|) = 4.5 \\
f(V_3) &= (|1-0| + |1-1| + |1-0|) + (|1-2/3| + |1-1/2| + |1-0|) + (|1-3/4| + |1-0| + |1-3/5|) = 5.68 \\
f(V_4) &= (|1-5/7| + |1-2/7| + |1-1/3|) + (|1-1| + |1-0| + |1-3/5|) + (|1-1| + |1-1| + |1-0|) = 4.04
\end{aligned}$$

$$\min \{f(V_i), i = 1, 4\} = \min \{4; 4.5; 5.68; 4.04\} = 4 = f(V_1)$$

Varianta optimă este V_1 .

b) Rezolvare prin *metoda maximizării utilității totale*

Matricea consecințelor $A = (a_{ijk})$ se transformă în matricea utilitate $U = (u_{ijk})$, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; fiind dată de matricile U^1, U^2, U^3 din relația (17).

Se calculează:

$$f(V_i) = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_{ijk}, i = 1, 2, 3, 4;$$

$$f(V_s) = \max \{f(V_i), i = 1, 2, 3, 4\}$$

$$V_{\text{optima}} = V_s$$

Deci:

$$f(V_1) = (1 + 0 + 1) + (1/3 + 0 + 1) + (0 + 2/3 + 1) = 5$$

$$f(V_2) = (2/7 + 5/7 + 2/3) + (0 + 1 + 1/5) + (1/2 + 1/3 + 4/5) = 4.5$$

$$f(V_3) = (0 + 1 + 0) + (3/4 + 0 + 3/5) + (2/3 + 1/2 + 0) = 3.51$$

$$f(V_4) = (5/7 + 2/7 + 1/3) + (1 + 0 + 3/5) + (1 + 1 + 0) = 4.7$$

$$\max \{f(V_i), i = 1, 4\} = \max \{5; 4.5; 3.51; 4.7\} = 5 = f(V_1)$$

$$V_{\text{optima}} = V_1$$

Varianta optimă este V_1 .

11.3.4. Sisteme Suport pentru Decizii – SSD (Decision Support System – DSS)

Decidentul uman are anumite limite (limite cognitive, limite de timp, restricții economice, limite legate de rutină, restricții de implementare a deciziilor, limite și restricții de comunicare sau colaborare între participanții la elaborarea și adoptarea deciziilor) care justifică asistarea de calculator a deciziilor.

Limitele cognitive ale decidentului se referă la capacitatea unei persoane (decidentul) de a acumula, prelucra și crea informații sau cunoștințe, dar nimeni nu este capabil să știe să rezolve orice problemă. Decidentul poate să își mărească cunoștințele între anumite limite sau să apeleze la asistenți decizionali sau experți (consultanți) externi, formând echipe decizionale ierarhice pentru elaborarea deciziei, dar adoptarea deciziei respective și responsabilitatea aparțin decidentului. *Limitele de timp* se referă la calitatea deciziilor elaborate și adoptate într-un interval de timp limitat. *Restricțiile economice* se referă la costurile apelării la asistenții decizionali și la experți externi. *Limitele legate de rutină* indică posibilitatea ca decidentul să refolosească, parțial sau total, soluții adoptate mai înainte, existând frica de schimbare și de eșec.

Restricțiile de implementare a deciziilor se referă la modul de acceptare a deciziei de către cei care trebuie să aplice deciziile, să le implementeze, dar și la raționalitatea și claritatea deciziei. *Limitele și restricțiile de comunicare sau colaborare* între participanții la elaborarea și adoptarea deciziilor se referă la deciziile multiparticipant din clasele deciziilor ierarhice și cele ale grupurilor de omologi, precum și la contribuția asistenților decizionali la elaborarea deciziei, dar și responsabilitatea tuturor participanților.

Se pot utiliza sisteme informatice specializate în luarea deciziilor:

- SSD – Sisteme Suport pentru Decizii pentru deciziile individuale;
- SSDG - Sisteme Suport pentru Decizii de Grup pentru deciziile multiparticipant (de grup), rezultând o înaltă calitate și eficiență a procesului decizional.

Nu există o definiție unanim acceptată a SSD. Definițiile SSD sunt date din diverse perspective: tipul de probleme, obiectivele urmărite, funcțiile realizate, tipul de interfață cu utilizatorul, modul de construire a sistemului informatic, componentele sistemului informatic, modul de folosire a sistemului informatic.

Definiție 1. SSD este un sistem informatic care ajută la elaborarea deciziilor nestructurate și semistructurate.

Definiție 2. SSD este un sistem informatic care ajută utilizatorul să ia decizii eficiente în probleme prost structurate.

Deși nu există o definiție unanim acceptată a SSD, există o mulțime de șase **caracteristici de bază ale SSD** acceptate de toți:

- un SSD nu are menirea să se substituie decidentului final, care adoptă o soluție și aprobă execuția sa, SSD – ul având doar rolul de a sprijini (suport) activitățile de elaborare a deciziei;
- problemele decizionale ce se pot rezolva cu un SSD nu sunt banale, nu se rezolvă prin metode simple și nu pot fi structurate suficient de bine pentru a fi rezolvate cu alte sisteme informatice;
- se dorește ca un SSD să sprijine toate sau aproape toate fazele procesului decizional și să fie aplicabil unor tipuri diferite de decizii;
- utilizatorii unui SSD nu sunt doar managerii de vârf, ci pot fi și cei de la nivelurile mai de jos ale firmei (organizației);
- datele și informațiile conținute într-un SSD pot proveni din surse diferite, interne sau externe firmei (organizației), iar bazele de date utilizate pot fi de diverse dimensiuni; între SSD și utilizator există o interfață prietenoasă, iar volumul mesajelor este relativ redus;
- se pune accentul pe creșterea productivității muncii decidentului, pe creșterea calității deciziilor, a aplicabilității și oportunității acestora, scăderea costurilor elaborării deciziilor.

Etc.

11. 4. DECIZII ÎN CONDIȚII DE RISC

11. 4.1. TEORIA UTILITĂȚII ÎN PROCESUL DECIZIONAL

Dacă două rezultate ale unui experiment aleator, realizabile cu anumite probabilități, furnizează cantități de informație egale, se pune întrebarea dacă sunt la fel de importante sau de utile, iar răspunsul este dat de posibilitatea de măsurare a utilității informației. Problema se pune la fel dacă sunt n rezultate posibile ale unui experiment, iar cuantificarea se poate realiza utilizând conceptul de utilitate. Utilitatea este o unitate de măsură care realizează numitorul comun al consecințelor multidimensionale în optimizarea deciziilor.

Noțiunea de utilitate se utilizează în teoria jocurilor strategice și în optimizarea deciziilor.

John von Neumann și Oskar Morgenstern au formulat un sistem de axiome referitor la

utilitate. Utilitatea a fost concepută ca o măsură a preferinței față de un rezultat sau altul al unui experiment oarecare, sau față de un experiment.

Se consideră un câmp de probabilitate finit $\{ \Omega, K, P \}$ care poate descrie un experiment aleator cu un număr finit de rezultate. Pe K se definește o relație de preferință, notată $\succsim$, astfel: $A_1 \succsim A_2$ care se citește A_1 este preferat lui A_2 .

Dacă $A_1 \succsim A_2$ și $A_2 \succsim A_1$, atunci se scrie $A_1 \sim A_2$ și se citește A_1 și A_2 sunt egal preferabile sau egal nepreferabile (indiferente).

Se numește **utilitate** (funcție utilitate) în sensul axiomelor von Neumann- Morgenstern orice funcție

$$u : K \rightarrow \mathbb{R}$$

care are proprietățile:

- $A \succsim B$ dacă și numai dacă $u(A) \geq u(B)$;
- $u(p, A; 1-p, B) = p \cdot u(A) + (1-p) \cdot u(B)$ (11. 23)

O proprietate a utilității este următoarea:
dacă u este o utilitate, atunci

$$u_1 = a \cdot u + b, \quad (11. 25)$$

$a > 0, b \in \mathbb{R}$, este de asemenea o utilitate. (criteriile trebuie să fie independente)

În practică utilitățile se determină pornind de la două utilități cunoscute, apoi celelalte se determină prin interpolare. Se atribuie valoarea utilității $u = 1$ variantei optime și valoarea $u = 0$ variantei pesime (nenoptime, cea mai slabă) pentru același criteriu C_j , eliminându-se astfel inconsecvența metodei utilității datorate proprietății de aditivitate, care a fost criticată de unii autori.

Utilitatea este într-un anumit grad subiectivă, deoarece preferințele variază de la un individ la altul și chiar pentru un același individ pot fi variații de la un moment la altul.

11. 4. 2. DECIZII ÎN CONDIȚII DE RISC

Dacă se consideră un proces decizional în care sunt :

- mai multe stări de condiții obiective: $N_1, N_2, \dots, N_r$ și se cunosc probabilitățile de realizare a fiecăreia: $p_1, p_2, \dots, p_r$:

$$\sum_{k=1}^r p_k = 1, \quad p_k \geq 0;$$

mulțimea variantelor: $V = \{ V_1, V_2, \dots, V_m \}$;

mulțimea criteriilor de evaluare a variantelor din mulțimea V :

$$C = \{ C_1, C_2, \dots, C_n \},$$

vom avea **decizii în condiții de risc** și trebuie determinată varianta optimă din punctul de vedere al celor n criterii de apreciere a variantelor.

Matricea consecințelor este:

$$A = (a_{ijk}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r;$$

unde: a_{ijk} - reprezintă evaluarea variantei V_i prin criteriul C_j în starea naturii N_k care are probabilitatea de realizare p_k .

A) Determinarea utilității prin interpolare liniară

Se notează cu $U = (u_{ijk})$ matricea utilităților.

Se determină utilitatea u_{ijk} prin relația liniară:

$$u_{ijk} = U(a_{ijk}) = A \cdot a_{ijk} + B, \quad (11.28)$$

A și B se determină prin interpolare liniară, știind utilitatea maximă egală cu 1 și utilitatea minimă egală cu 0.

Se notează:

$$a_{ijkmax} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ijk}$$

$$a_{ijkmin} = \min_{1 \leq i \leq m} a_{ijk}$$

1. dacă criteriul C_j se optimizează prin **maxim**, atunci:

$$\begin{aligned} A \cdot a_{ijkmax} + B &= 1 \\ A \cdot a_{ijkmin} + B &= 0 \end{aligned} \quad (11.29)$$

iar A și B se determină rezolvând sistemul din relațiile (11.29).

$$A = \frac{1}{a_{ijkmax} - a_{ijkmin}} \quad (11.30)$$

$$B = \frac{-a_{ijkmin}}{a_{ijkmax} - a_{ijkmin}}$$

rezultă

$$u_{ijk} = A \cdot a_{ijk} + B = \frac{a_{ijk} - a_{ijkmin}}{a_{ijkmax} - a_{ijkmin}} \quad (11.31)$$

2. dacă criteriul C_j se optimizează prin **minim**, atunci :

$$\begin{aligned} A \cdot a_{ijkmin} + B &= 1 \\ A \cdot a_{ijkmax} + B &= 0 \end{aligned} \quad (11.32)$$

iar A și B se obțin din sistemul de ecuații (11.32).

$$A = \frac{1}{a_{ijkmin} - a_{ijkmax}} \quad (11.33)$$

$$B = \frac{-a_{ijkmax}}{a_{ijkmin} - a_{ijkmax}}$$

se obține

$$u_{ijk} = \frac{a_{ijk} - a_{ijkmax}}{a_{ijkmin} - a_{ijkmax}} \quad (11.34)$$

Rezultă că la modul general, utilitatea u_{ijk} se calculează, indiferent dacă criteriul C_j este de maxim sau de minim, cu relația:

$$u_{ijk} = \frac{a_{ijk} - a_{ijkpesim}}{a_{ijkoptim} - a_{ijkpesim}} \quad (11.35)$$

unde:

$$a_{ijkoptim} = \text{optim } a_{ijk}, \text{ optim } \in \{ \max, \min \};$$

$$1 \leq i \leq m$$

$$a_{ijkpesim} = \text{pesim } a_{ijk}, \text{ pesim} = \text{non optim.}$$

$$1 \leq i \leq m$$

B) Determinarea utilității sinteză

Se calculează utilitatea sinteză a variantei V_i în starea naturii N_k , U_{ik} , obținându-se matricea utilităților totale (sinteză) U_s :

$$U_{ik} = \sum_{j=1}^n u_{ijk}, i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, r; \quad (11.38)$$

$$U_s = (U_{ik}), i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, r.$$

C) Detereminarea deciziei optime în condiții de risc

Pentru fiecare stare de condiții se estimează utilitățile (prin interpolare), determinându-se utilitățile consecințelor date de matricea U cu (11.31) și (11.34), precum și utilitatea sinteză a stării naturii respective, dată de matricea U_s .

$$A = (a_{ijk}),$$

$$U = (u_{ijk}),$$

$$U_s = (U_{ik}),$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r;$$

$$U_{ik} = \sum_{j=1}^n u_{ijk} \quad (11.39)$$

unde: U_{ik} - reprezintă utilitatea sinteză a variantei V_i în starea de condiții obiective N_k ,

$i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, r.$

Varianta optimă se obține pe baza relației (11.40).

$$U_{i0} = \max \left(\sum_{k=1}^r U_{ik} \cdot p_k, i = 1, 2, \dots, m \right) \quad (11.40)$$

$$V_{ioptima} = V_{i0}$$

O altă metodă de rezolvare a problemei deciziilor în condiții de risc este metoda arborelui de decizie, care se bazează pe reprezentarea grafică a problemei printr-un arbore de decizie, fiecare variantă și stare a naturii se reprezintă printr-o ramură a arborelui de decizie.

Exemplul nr. 11.3.

Problemă de decizii în condiții de risc.

Sunt două stări ale naturii, N_1 și N_2 , realizabile cu probabilitățile $p_1 = 0.9$ și $p_2 = 0.1$

Pentru lansarea unui produs pe piață sunt $m = 4$ variante decizionale V_1, V_2, V_3, V_4 și $n = 3$ criterii de apreciere a variantelor C_1, C_2 de maxim și C_3 de minim.

Matricea consecințelor este $A = (a_{ijk})$, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2$;

a_{ijk} - reprezintă aprecierea variantei V_i prin criteriul C_j în starea naturii N_k , $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2$;

Pentru $k = 1$ matricea consecințelor A este dată de matricea bidimensională A_1 și pentru $k = 2$ de matricea bidimensională A_2 .

$$A_1 = (b_{ij}) = (a_{ij1}), \quad A_2 = (c_{ij}) = (a_{ij2}), \quad i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3;$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 90 & 1 \\ 7 & 80 & 3 \\ 10 & 70 & 4 \\ 9 & 100 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 70 & 2 \\ 8 & 60 & 4 \\ 7 & 50 & 5 \\ 10 & 80 & 3 \end{pmatrix}$$

Matricea consecințelor $A = (a_{ijk})$ se transformă în matricea utilitate $U = (u_{ijk})$, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2$. Pentru $k = 1$ matricea utilitate U este dată de matricea bidimensională U^1 și pentru $k = 2$ de matricea bidimensională U^2 ; pentru criteriile C_1 și C_2 de maxim, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2$; se utilizează relațiile (11.31), pe care le reluăm, deci:

$$u_{ij1} = \frac{a_{ij1} - a_{ij1\min}}{a_{ij1\max} - a_{ij1\min}}$$

$$u_{ij2} = \frac{a_{ij2} - a_{ij2\min}}{a_{ij2\max} - a_{ij2\min}}$$

Pentru criteriul C_3 de minim se utilizează (11.34), deci:

$$u_{ij1} = \frac{a_{ij1} - a_{ij1\max}}{a_{ij1\min} - a_{ij1\max}}$$

$$u_{ij2} = \frac{a_{ij2} - a_{ij2\max}}{a_{ij2\min} - a_{ij2\max}}$$

, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$. Se calculează coloanele matricilor U^1 și U^2 .

$$U^1 = (t_{ij}) = (u_{ij1}), \quad U^2 = (v_{ij}) = (u_{ij2}), \quad i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3.$$

$$u_{111} = \frac{8-7}{10-7} = \frac{1}{3}; \quad u_{211} = \frac{7-7}{10-7} = \frac{0}{3} = 0; \quad u_{311} = \frac{10-7}{10-7} = \frac{3}{3} = 1; \quad u_{411} = \frac{9-7}{10-7} = \frac{2}{3}$$

$$u_{121} = \frac{90-70}{100-70} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}; \quad u_{221} = \frac{80-70}{100-70} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; \quad u_{321} = \frac{70-70}{100-70} = \frac{0}{30} = 0;$$

$$u_{421} = \frac{100-70}{100-70} = \frac{30}{30} = 1$$

$$u_{131} = \frac{1-4}{1-4} = 1; \quad u_{231} = \frac{3-4}{1-4} = \frac{1}{3}; \quad u_{331} = \frac{4-4}{1-4} = 0; \quad u_{431} = \frac{2-4}{1-4} = \frac{2}{3}$$

$$U^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad U^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Se calculează matricea sinteză U_s cu relația (11.38).

$$U_{11} = U_{111} + U_{121} + U_{131} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = 2$$

$$U_{12} = U_{112} + U_{122} + U_{132} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

$$U_{21} = U_{211} + U_{221} + U_{231} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$U_{22} = U_{212} + U_{222} + U_{232} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$U_{31} = U_{311} + U_{321} + U_{331} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$U_{32} = U_{312} + U_{322} + U_{332} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$U_{41} = U_{411} + U_{421} + U_{431} = \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$U_{42} = U_{412} + U_{422} + U_{432} = 1 + 1 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$U_s = U_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{8}{3} \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Se utilizează relația (11.40).

$$\text{Max}[(0.9 \cdot 2 + 0.1 \cdot \frac{7}{3}), (0.9 \cdot \frac{2}{3} + 0.1 \cdot 1), (0.9 \cdot 1 + 0.1 \cdot 0), (0.9 \cdot \frac{7}{3} + 0.1 \cdot \frac{8}{3})] = \text{max}(2.03; 0.7; 0.9; 2.36) = 2.36$$

Rezultă varianta V_4 optimă.

11. 5. DECIZII ÎN CONDIȚII DE INCERTITUDINE

Condițiile de incertitudine presupun că nu se cunosc probabilitățile de realizare a stărilor de condiții obiective, iar valoarea consecințelor depinde de acțiunea unor factori imprevizibili.

Incetitudinea în procesul decizional este generată de diverse surse, care pot fi grupate, în două categorii principale:

- natura aleatoare a factorilor de mediu;
- aproximarea grosieră a evoluției comportamentului fenomenului, ca urmare a omisiunii unor factori importanți de influență, a stabilirii incorecte a dependenței dintre elementele procesului analizat și factorii care le determină.

Lipsa informațiilor necesită adoptarea deciziilor în condiții de incertitudine și în acest caz factorii psihologici au un rol important, ceea ce duce la dependența deciziei de principiile și raționamentele subiective ale decidenților. Deși factorii subiectivi joacă un rol important în adoptarea deciziei în condiții de incertitudine, totuși trebuie utilizate metodele consacrate de optimizare a deciziilor pentru ca decizia să fie fundamentată și rațională.

Se consideră un proces decizional în condiții de incertitudine caracterizat de:

- sunt mai multe stări ale naturii:

$$\{ N_1, N_2, \dots, N_r \};$$

- sunt date m variante decizionale:

$$V = \{ V_1, V_2, \dots, V_m \};$$

- sunt n criterii de evaluare a variantelor:

$$C = \{ C_1, C_2, \dots, C_n \};$$

- matricea consecințelor A :

$$A = (a_{ijk}) , i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r;$$

unde: a_{ijk} - reprezintă evaluarea variantei V_i prin criteriul C_j în starea naturii N_k ,

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r.$$

Matricea consecințelor A se transformă în matricea utilitate U cu relațiile (11.31) și (11.34).

$$U = (u_{ijk}) , i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r;$$

în care u_{ijk} reprezintă utilitatea variantei V_i evaluată prin criteriul C_j în starea naturii N_k .

Se calculează utilitatea sinteză a variantei V_i în starea naturii N_k , U_{ik} , obținându-se matricea utilităților totale (sinteză) U_s :

$$U_{ik} = \sum_{j=1}^n u_{ijk} , i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, r;$$

$$U_s = (U_{ik}) , i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, r.$$

Se vor prezenta metode de rezolvare a problemei de decizie în condiții de incertitudine.

1. Regula prudenței sau pesimistă(Abraham WALD) :

$$U_{i0, k0} = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq k \leq r} U_{ik} \quad (11. 41)$$

$$V_{ioptima} = V_{i0}$$

sau altă variantă, $1'$, din relația (11.42) :

1'. Regula superprudenței:

$$U_{i0, k0} = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq k \leq r} U_{ik} \quad (11. 42)$$

$$V_{ioptima} = V_{i0}$$

2. Regula optimistă (Leonid Hurwicz):

$$U_{i0, k0} = \max_{1 \leq i \leq m} (p_1 \cdot \max_{1 \leq k \leq r} U_{ik} + p_2 \cdot \min_{1 \leq k \leq r} U_{ik}) \quad (11. 43)$$

$$V_{ioptima} = V_{i0}$$

$$\text{unde: } p_1 + p_2 = 1, p_1, p_2 \in [0; 1], p_1 > p_2$$

p_1 - este probabilitatea optimistă de atingere a utilităților sinteză U_{ik} maxime, deci probabilitatea de apariție a stării de condiții cele mai favorabile;

p_2 - este probabilitatea pesimistă de atingere a utilității sinteză U_{ik} minime, respectiv de apariție a stării de condiții cele mai nefavorabile.

Altă variantă, regula superoptimistă,2', din relația (11.44):

2'. Regula superoptimistă:

se iau valorile:

$p_1 = 1, p_2 = 0$ în regula optimistă, relația (11.43), rezultând:

$$U_{i0}, k_0 = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq k \leq r} U_{ik} \quad (11.44)$$

$$V_{ioptima} = V_{i0}$$

3. Regula echilibrului (Bayes – Laplace, metoda speranței matematice):

3.1. Criteriul lui Laplace.

Stările de condiții obiective sunt considerate echiprobabile.

$$U_{i0} = \max_{1 \leq i \leq m} r^{-1} \cdot \sum_{k=1}^r U_{ik} \quad (11.45)$$

$$V_{ioptima} = V_{i0}$$

3.2. Criteriul lui Bayes.

Se utilizează probabilitățile apariției diferitelor stări ale naturii.

$$U_{i0} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^r U_{ik} \cdot p_k \quad (11.46)$$

$$V_{ioptima} = V_{i0}$$

4. Regula regretelor (Leonard Savage):

Decizia se adoptă având la bază diferențele dintre rezultatul maxim ce s-ar putea obține prin manifestarea unei anumite stări a naturii și rezultatele corespunzătoare celorlalte variante de acțiune în cazul manifestării aceleiași stări a naturii, iar aceste diferențe sunt numite de L. Savage regretate.

se determină matricea regretelor R:

$$r_{ik} = \max_{1 \leq i \leq m} U_{ik} - U_{ik}, i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, r; \quad (11.47)$$

$$R = (r_{ik}), i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, r;$$

varianta optimă $V_{ioptima}$ este dată de relația (11.48).

$$r_{i0}, k_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq k \leq r} r_{ik} \quad (11.48)$$

$$V_{ioptima} = V_{i0},$$

5. Metoda combinată

Rezolvarea problemei de decizie în condiții de incertitudine prin diverse metode duce la diferite variante optime, în general diferite de la o metodă la alta, deci metodele de decizie sunt incompatibile. Se impune găsirea unei modalități de a decide, alta decât aplicarea unei metode din cele tratate în acest paragraf, iar soluționarea se poate obține prin aplicarea mai multor metode într-o anumită succesiune de etape, numită metoda combinată.

Etapele metodei combinate sunt:

1. se elimină riscurile inacceptabile prin utilizarea mai multor metode din acest paragraf (metodele 1– 4), înlăturând variantele care duc la riscuri inacceptabile;
2. după ce s-au eliminat variantele inacceptabile, se aplică metoda Bayes-Laplace (speranței matematice, echilibrului), rezultând varianta optimă, alături de care se rețin următoarele câteva variante din clasamentul descrescător al variantelor;
3. variantelor selecționate în etapa 2 li se va aplica metoda max-max, rezultând în final varianta optimă.

Exemplul nr. 11.4.

Problemă de decizii în condiții de incertitudine. Se reia exemplul nr. 11.3 în condiții de incertitudine.

Sunt două stări ale naturii, N_1 și N_2 , nu se cunosc probabilitățile de realizare (apariție) a acestor stări. Pentru lansarea unui produs pe piață sunt $m = 4$ variante decizionale V_1, V_2, V_3, V_4 și $n = 3$ criterii de apreciere a variantelor C_1, C_2 de maxim și C_3 de minim.

Matricea consecințelor este $A = (a_{ijk})$, $i = 1, 4$; $j = 1, 3$; $k = 1, 2$;

a_{ijk} reprezintă aprecierea variantei V_i prin criteriul C_j în starea naturii N_k , $i = 1, 4$; $j = 1, 3$; $k = 1, 2$;

Pentru $k = 1$ matricea consecințelor A este dată de matricea bidimensională A_1 și pentru $k = 2$ de matricea bidimensională A_2 .

$$A_1 = (a_{ij1}) \quad , \quad A_2 = (a_{ij2}) \quad , \quad i = 1, 4 \quad ; \quad j = 1, 3;$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 90 & 1 \\ 7 & 80 & 3 \\ 10 & 70 & 4 \\ 9 & 100 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 70 & 2 \\ 8 & 60 & 4 \\ 7 & 50 & 5 \\ 10 & 80 & 3 \end{pmatrix}$$

Matricea consecințelor $A = (a_{ijk})$ se transformă în matricea utilitate $U = (u_{ijk})$, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2$. Se reiau calculele din exemplul nr. 11.2 pentru calculul utilităților. Pentru $k = 1$ matricea utilitate U este dată de matricea bidimensională U^1 și pentru $k = 2$ de matricea bidimensională U^2 .

$$U_1 = (u_{ij1}) \quad , \quad U_2 = (u_{ij2}) \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad ; \quad j = 1, 2, 3;$$

Pentru criteriile C_1 și C_2 de maxim, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2$; se utilizează relațiile (11.31), deci:

$$u_{ij1} = \frac{a_{ij1} - a_{ij1\min}}{a_{ij1\max} - a_{ij1\min}}$$
$$u_{ij2} = \frac{a_{ij2} - a_{ij2\min}}{a_{ij2\max} - a_{ij2\min}}$$

Pentru criteriul C_3 de minim se utilizează (11.34), deci:

$$u_{ij1} = \frac{a_{ij1} - a_{ij1\max}}{a_{ij1\min} - a_{ij1\max}}$$

$$u_{ij2} = \frac{a_{ij2} - a_{ij2\max}}{a_{ij2\min} - a_{ij2\max}}, \quad i = 1, 2, 3, 4; j = 3.$$

$$U^1 = (t_{ij}) = (u_{ij1}), \quad U^2 = (v_{ij}) = (u_{ij2}), \quad i = 1, 2, 3, 4; j = 3.$$

Se calculează coloanele matricilor U^1 și U^2 .

$$u_{111} = \frac{8-7}{10-7} = \frac{1}{3}; \quad u_{211} = \frac{7-7}{10-7} = \frac{0}{3} = 0; \quad u_{311} = \frac{10-7}{10-7} = \frac{3}{3} = 1; \quad u_{411} = \frac{9-7}{10-7} = \frac{2}{3}$$

$$u_{121} = \frac{90-70}{100-70} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}; \quad u_{221} = \frac{80-70}{100-70} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; \quad u_{321} = \frac{70-70}{100-70} = \frac{0}{30} = 0;$$

$$u_{421} = \frac{100-70}{100-70} = \frac{30}{30} = 1$$

$$u_{131} = \frac{1-4}{1-4} = 1; \quad u_{231} = \frac{3-4}{1-4} = \frac{1}{3}; \quad u_{331} = \frac{4-4}{1-4} = 0; \quad u_{431} = \frac{2-4}{1-4} = \frac{2}{3}$$

$$U^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & & 3 \end{pmatrix}, \quad U^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & & 3 \end{pmatrix}$$

Se calculează matricea sinteză U_s cu relația (11.38).

$$U_{11} = U_{111} + U_{121} + U_{131} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = 2$$

$$U_{12} = U_{112} + U_{122} + U_{132} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

$$U_{21} = U_{211} + U_{221} + U_{231} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$U_{22} = U_{212} + U_{222} + U_{232} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$U_{31} = U_{311} + U_{321} + U_{331} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$U_{32} = U_{312} + U_{322} + U_{332} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$U_{41} = U_{411} + U_{421} + U_{431} = \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$U_{42} = U_{412} + U_{422} + U_{432} = 1 + 1 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$U_s = U_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & \frac{8}{3} \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Se va rezolva prin mai multe metode.

1. Regula prudenței sau pesimistă (Abraham WALD)

Se utilizează relația (11. 41).

$$U_{i0, k0} = \max_{1 \leq i \leq 4} \min_{1 \leq k \leq 2} U_{ik} = \max [\min (2, 7/3), \min(2/3, 1), \min(1, 0), \min(7/3, 8/3)] =$$

$$= \max(2, 2/3, 0, 7/3) = 7/3 = U_{41}$$

$$V_{optima} = V_4$$

1'. Regula superprudenței

Se utilizează relația (11. 42).

$$U_{i0, k0} = \min_{1 \leq i \leq 4} \min_{1 \leq k \leq 2} U_{ik} = \min [\min (2, 7/3), \min(2/3, 1), \min(1, 0), \min(7/3, 8/3)] =$$

$$= \min(2, 2/3, 0, 7/3) = 0 = U_{32}$$

$$V_{optima} = V_3$$

2'. Regula superoptimistă

In regula optimistă se utilizeaza relația (11.44), rezultând:

$$U_{i0, k0} = \max_{1 \leq i \leq 4} \max_{1 \leq k \leq 2} U_{ik} = \max [\max (2, 7/3), \max(2/3, 1), \max(1, 0), \max(7/3, 8/3)] =$$

$$= \max(7/3, 1, 1, 8/3) = 8/3 = U_{42}$$

$$V_{optima} = V_4$$

3.Regula echilibrului (Bayes – Laplace, metoda speranței matematice)

Stările de condiții obiective sunt considerate echiprobabile, se utilizează relația (11.45).

$$U_{i0} = \max_{1 \leq i \leq 4} r^{-1} \cdot \sum_{k=1}^r U_{ik} = \max \{ (2 + 7/3)/2, (2/3 + 1)/2, (1 + 0)/2, (7/3 + 8/3)/2 \} =$$

$$= \max (13/6, 5/6, 1/2, 15/6) = 15/6 = U_{40}$$

$$V_{optima} = V_4$$

4. Regula regretelor (Leonard Savage)

Se utilizează relațiile (11. 47) și (11. 48).

se determină matricea regretelor R cu (11. 47).

$$r_{ik} = \max_{1 \leq i \leq 4} U_{ik} - U_{ik}, \quad i = 1, 4; k = 1, 2;$$

Se calculează coloana 1, apoi coloana 2.

$$r_{11} = \max_{1 \leq i \leq 4} U_{i1} - U_{11} = \max(2, 2/3, 1, 7/3) - 2 = 7/3 - 2 = 1/3$$

$$r_{21} = \max_{1 \leq i \leq 4} U_{i1} - U_{21} = \max(2, 2/3, 1, 7/3) - 2/3 = 7/3 - 2/3 = 5/3$$

$$r_{31} = 7/3 - 1 = 4/3$$

$$r_{41} = 7/3 - 7/3 = 0$$

$$r_{12} = \max_{1 \leq i \leq 4} U_{i2} - U_{12} = \max(7/3, 1, 0, 8/3) - 7/3 = 8/3 - 7/3 = 1/3$$

$$r_{22} = 8/3 - 1 = 5/3$$

$$r_{32} = 8/3 - 0 = 8/3$$

$$r_{42} = 8/3 - 8/3 = 0$$

Matricea regretelor R:

$$R = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 5/3 & 5/3 \\ 4/3 & 8/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_{i0}, k_0 = \min_{1 \leq i \leq 4} \max_{1 \leq k \leq 2} r_{ik} = \min [\max(1/3, 1/3), \max(5/3, 5/3), \max(4/3, 8/3), \max(0, 0)] =$$

$$= \min (1/3, 5/3, 8/3, 0) = 0 = r_{41} = r_{42}$$

$$V_{optima} = V_4$$

11. 6. DECIZII FUZZY

În cursurile precedente s-au prezentat metode de optimizare a deciziilor, în care s-a pornit de la ipoteza că fiecare variantă este apreciată după fiecare criteriu printr-o valoare cunoscută și unică. Este posibil ca în multe probleme practice informația de care dispune un decident să fie vagă, incertă, imprecisă, deci este fuzzy. Imprecizia poate apărea datorită complexității proceselor economice studiate sau din cauza imposibilității de a specifica granițele unei mulțimi. Dacă X este o mulțime nevidă, atunci **mulțimea fuzzy** A în X este o mulțime de perechi ordonate

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) \mid x \in X \}, \text{ iar } \mu_A(x) \text{ este numită funcție de apartenență a elementului } x \text{ la } A, \\ \mu : X \rightarrow M$$

, M fiind spațiul de apartenență.

Dacă M conține numai două elemente 0 și 1, mulțimea A este non-fuzzy, deci clasică, cu $\mu_A(x)$ identică cu funcția caracteristică a mulțimii non-fuzzy. În deciziile fuzzy aprecierea unei variante V_i în raport cu un criteriu C_j nu se face printr-un număr real, ci printr-un număr fuzzy, care este un interval al axei reale care este gândit ca și o mulțime fuzzy, având o funcție de apartenență μ_{aj} .

Se consideră decizii multicriteriale fuzzy, în care se cunosc:

- o mulțime de m variante: $V = \{ V_1, V_2, \dots, V_m \}$;
- o mulțime de n criterii: $C = \{ C_1, C_2, \dots, C_n \}$;

- matricea consecințelor, deci matricea aprecierii variantelor mulțimii V prin criteriile mulțimii C, este o matrice de funcții de apartenență:

$$A = (\mu_{aij}) \quad , i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Funcțiile de apartenență μ_{aij} pot avea diverse exprimări matematice, dintre care se vor prezenta câteva, pentru un interval $[a, b]$.

Funcția de apartenență triunghiulară

Se consideră punctele: A(a, 0), B(b, 0), C(c, 1),

unde s-a notat:

$$c = (a + b)/2 .$$

Expresia analitică a acestei funcții de apartenență triunghiulară este dată de ecuația dreptei AC , pentru $x \in [a, c]$ și ecuația dreptei CB , pentru $x \in [c, b]$, date de relația (11.49),

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{c-a} , & \text{daca } a \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{b-c} , & \text{daca } c < x \leq b \end{cases} \quad (11.49)$$

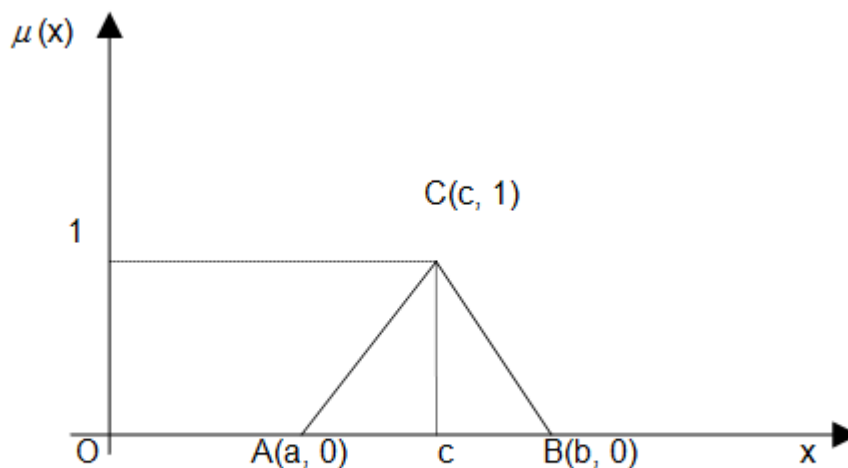


Fig.11.2. Funcția de apartenență triunghiulară

2. Funcția de apartenență de tip rampă (saturată)

2. Funcția de apartenență de tip rampă (saturată)

Această funcție are două variante: de tip rampă (saturată) la dreapta cu expresia analitică dată de relația (11.52) și graficul în fig.11.5., iar a doua variantă de tip rampă (saturată) la stânga, cu expresia analitică dată de relația (11.53) și graficul în fig.11.6.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & ,daca \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & ,daca \quad a \leq x \leq b \\ 1 & ,daca \quad x > b \end{cases} \quad (11.52)$$

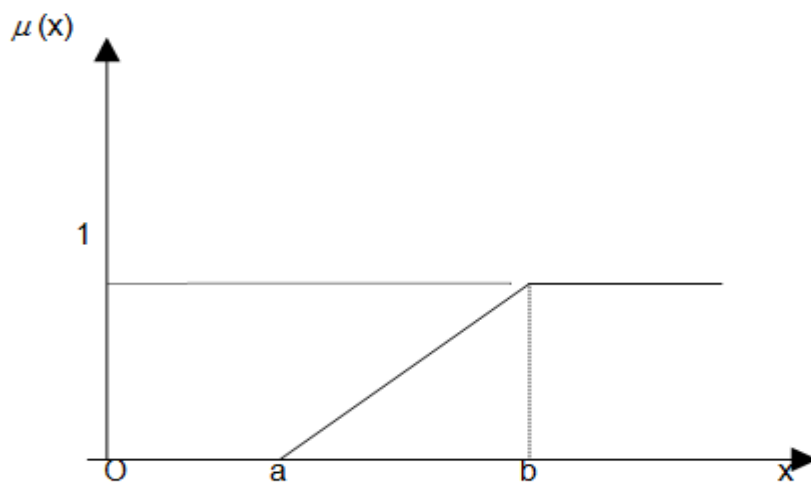


Fig.11.5. . Funcția de apartenență saturată (de tip rampă) la dreapta

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & ,daca \quad x < a \\ \frac{b-x}{b-a} & ,daca \quad a \leq x \leq b \\ 0 & ,daca \quad x > b \end{cases} \quad (11.53)$$

Există și alte funcții de apartenență pentru mulțimile fuzzy. Dintre metodele de decizie multicriteriale fuzzy, menționăm: metoda maximin fuzzy, metoda ponderării simple aditive fuzzy, metoda Electre fuzzy, metoda diametrelor fuzzy.

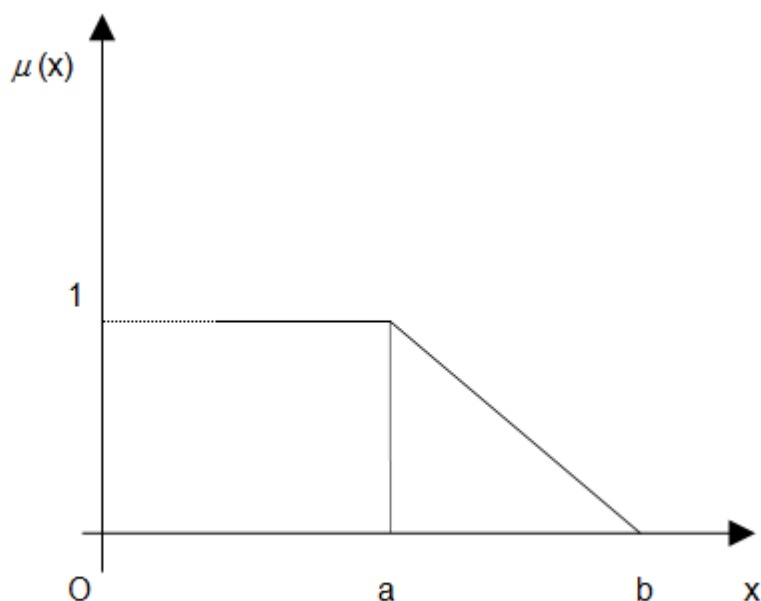


Fig. 11.6. Funcția de apartenență saturată (de tip rampă) la stânga

De exemplu, **metoda maximin fuzzy** determină varianta optimă V_{i0} astfel:

$$\mu_{ai0j} = \max_i \min_j \mu_{aij} \quad (11.54)$$

, unde: max și min sunt operații cu mulțimi fuzzy, iar funcția de apartenență μ este una din cele prezentate sau alte funcții.

Exemplul nr. 11.5. – TEMA - pentru cei interesati – de studiat din carte , pag.338.

Cociu Nicolae - Metode ale cercetării operaționale în inginerie și management, Editura Solness, Timisoara, 2011 .

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C13-2018

8. ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR

Definiția 8.1.

Se numește **multigraf orientat** perechea $G = (X, U)$, în care X este o mulțime de elemente oarecare, iar $U \subset X \times X \times N$.

Elementele mulțimii X sunt numite vârfuri ale multigrafului, iar elementele mulțimii U sunt numite arcele multigrafului. Pentru arcul $u_i = (x_j, x_k, h)$ componenta a treia h are rolul de numerotare a arcelor care nu pot fi diferențiate altfel. Se va considera că mulțimile X și U sunt finite, iar cardinalul mulțimii X , notat cu $n = |X|$, se numește ordinul multigrafului. Se notează cu m cardinalul mulțimii U și m se numește dimensiunea multigrafului G . Se vor considera doar multigrafuri finite.

Definiția 8.2.

Un multigraf G se numește **p-graf** dacă între oricare două vârfuri ale sale există cel mult p arce care să aibă același sens și G are două vârfuri între care există exact p arce care au același sens.

Definiția 8.3.

Un 1-graf se numește **graf orientat**.

Pentru un graf orientat $G = (X, U)$, $U \subset X \times X$, deci U este și poate fi privită și ca o relație binară.

Definiția 8.4.

Orice mulțime X , finită sau nu, dar numărabilă, prevăzută cu o relație binară Γ , se numește graf și se va nota $G = (X, \Gamma)$ sau $G = (X, U)$.

Se vor considera grafuri finite.

În limba română se utilizează pentru substantivul graf pluralul grafuri, dar și grafe.

Deci, un **graf orientat** sau un **1-graf** este perechea:

$$G = (X, U)$$

formată dintr-o mulțime finită de elemente X , numite vârfuri, și dintr-o familie U (sau Γ) de perechi de vârfuri care se numesc arce.

Evident, $U \subseteq X \times X$ sau $\Gamma \subseteq X \times X$

Se va nota:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, m, n \in \mathbb{N}^*$$

Pentru arcul $u_i = (x_j, x_k)$ vârful x_j se numește extremitatea inițială sau originea arcului, iar vârful x_k este extremitatea terminală. Dacă extremitățile unui arc coincid, atunci arcul se numește **buclă**.

Exemplul nr. 8.1.

Multigraful din fig. nr. 8.1. este un 2-graf, are mulțimea vârfurilor X și mulțimea arcelor U .

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$U = \{(1, 2, 1); (2, 3, 1); (2, 3, 2); (3, 4, 1); (4, 7, 1); (7, 6, 1); (7, 6, 2); (6, 5, 1); (5, 1, 1)\}$$

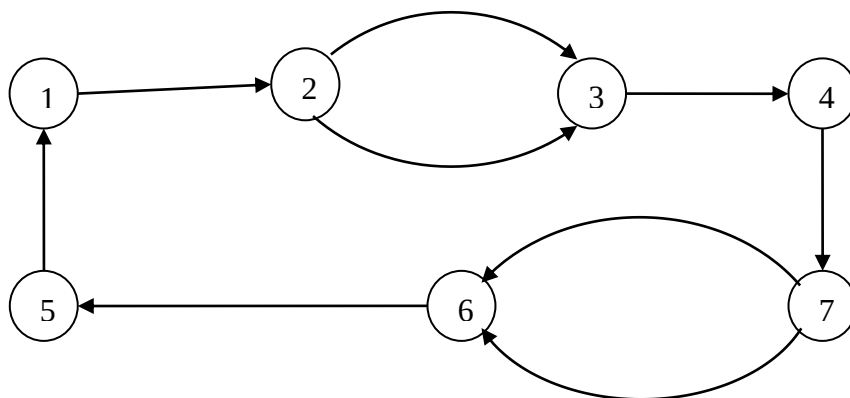


Fig. nr. 8.1.

Exemplul nr. 8.2.

Graful orientat din fig. nr. 8.2. are mulțimea vârfurilor X și mulțimea arcelor U .

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$U = \{(1, 1); (1, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 4); (4, 5); (5, 6); (6, 1); (6, 3)\}$$

În $(1, 1)$ există o buclă.

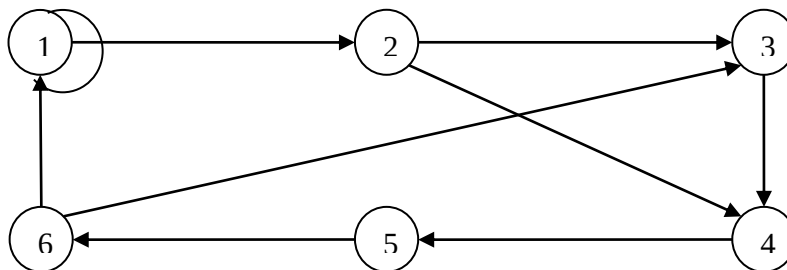


Fig. nr. 8.2.

Un drum într-un graf este succesiunea de vârfuri legate fiecare de următorul prin câte un arc.

Se notează drumul d :

$$d = [x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_p], \quad p < n$$

sau prin arcele ce-l formează:

$$d = [(x_1, x_2), \dots, (x_k, x_{k+1}), \dots, (x_{p-1}, x_p)]$$

Vârful x_1 se numește extremitatea inițială a drumului d , iar x_p este extremitatea terminală. Dacă drumul are proprietatea că extremitatea inițială a primului arc coincide cu extremitatea terminală a ultimului arc, el se numește **circuit**.

Un **drum** se numește **elementar** dacă nu utilizează de două ori același vârf, iar în caz contrar este neelementar.

Un **drum** se numește **simplu** dacă nu utilizează de două ori același arc, adică toate arcele drumului sunt distincte două câte două, iar în caz contrar este compus.

Un drum elementar este și simplu, dar reciproca nu este adevărată.

Un **graf parțial** este graful $G_1 = (X, U_1)$ obținut din graful $G = (X, U)$ dacă se suprimă cel puțin un arc, $U_1 \subset U$.

Exemplul nr. 8.3.

În fig. nr. 8.3. drumul $d = [X_2, X_3, X_2, X_4, X_2]$ este simplu, dar nu este elementar.

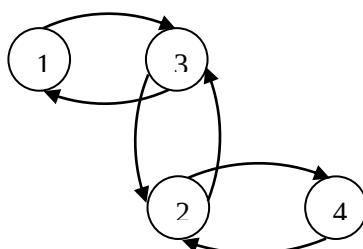


Fig. nr. 8.3.

Un **drum** se numește **eulerian** dacă este simplu și trece prin toate arcele grafului.

Un **drum** se numește **hamiltonian** dacă este elementar și trece prin toate vârfurile grafului, deci dacă trece numai o dată prin fiecare din vârfurile grafului.

Un **graf** orientat $G = (X, U)$ se numește **hamiltonian** dacă există un circuit elementar care trece prin toate vârfurile grafului, iar un astfel de circuit se numește circuit hamiltonian.

Subgraful generat de o mulțime de vârfuri $A \subseteq X$ al unui graf $G = (X, U)$ este graful $G_A = (A, U_A)$,

unde:

$$U_A = \{ u_i \mid u_i = (x, y), x \in A, y \in A, u_i \in U \},$$

deci, este graful cu mulțimea de vârfuri A și mulțimea arcelor compuse din toate arcele grafului G care au ambele extremități în A .

Un **graf** este **tare conex** dacă între oricare două vârfuri distincte ale grafului există un drum.

O **componentă tare conexă** a unui graf $G = (X, U)$ este un subgraf G_A al lui G care este tare conex și care este maximal în raport cu incluziunea față de această proprietate, adică $(\forall) x \in X - A$, subgraful lui G generat de $A \cup \{x\}$ nu mai este tare conex.

Două vârfuri $x_i, x_j \in X$ ale grafului $G = (X, U)$ se numesc echivalente, $x_i \equiv x_j$, dacă există un drum de la x_i la x_j și unul de la x_j la x_i . Aceasta relație ($\equiv$) este reflexivă, simetrică și tranzitivă, deci este relație de echivalență. Clasele de echivalență determinate de această relație de echivalență sunt componentele tare conexe: $G_{A1}, G_{A2}, \dots, G_{Ak}$ ale lui G , care verifică:

$$A_i \cap A_j = \Phi, i \neq j, A_i, A_j \neq \Phi; i, j = 1, 2, \dots, k.$$

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = X$$

Pentru graful orientat $G = (X, U)$ se definește o funcție l :

$$l: U \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

care asociază fiecărui arc u valoarea sa $l(u)$ care poate avea semnificația concretă de distanță dintre extremitățile arcului u , durata trecerii de la extremitatea inițială la extremitatea terminală a arcului u , costul trecerii de la extremitatea inițială la extremitatea terminală a arcului u , capacitatea arcului respectiv etc. Lungimea unui drum este egală cu numărul arcelor sale. Valoarea unui drum este suma valorilor arcelor care îl compun. Distanța minimă dintre două vârfuri ale grafului G este lungimea minimă a valorii drumurilor care unesc cele două vârfuri. Lungimea, în sensul de valoare, unui arc poate fi interpretată în diferite moduri: fie ca o distanță euclidiană, fie ca un timp asociat unei anumite operații care se desfășoară între două evenimente marcate prin cele două extremități ale unui arc, fie ca un cost asociat unei operații reprezentate printr-un arc al unui graf.

Pentru graful $G = (X, U)$ se definește matricea conexiunilor (tranzițiilor), numită și matrice de adiacență:

$$A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{daca } (X_i, X_j) \in U \\ 0, & \text{daca } (X_i, X_j) \notin U \end{cases}$$

8.3. METODE DE PLANIFICARE, PROGRAMARE ȘI CONTROL ÎN REȚEA. METODA DRUMULUI CRITIC

Metodele teoriei grafurilor se pot utiliza în managementul prin proiecte. Un proiect este reprezentat de o mulțime de operații sau activități specifice, a căror înlănțuire este în funcție de dependențele tehnologice impuse și conduce la atingerea unui obiectiv, a unui scop dinainte precizat. Un proiect sau o lucrare oricât de complexă, poate fi descompusă în lucrări simple sau operații denumite activități și în etape denumite evenimente care marchează sfârșitul sau începutul activităților. Evenimentele se reprezintă prin vârfuri (noduri) într-un graf rețea, iar activitățile prin arce sau săgeți ale grafului rețea. Astfel, un proiect sau o lucrare oricât de complexă se reprezintă printr-un graf rețea format din vârfuri și arce.

Conducerea unui proiect prin metodele drumului critic se realizează în două etape: etapa de programare și etapa de control.

Etapă de programare constă în analiza timpului, costului și resurselor, iar fiecare dintre acestea are două faze: *stabilirea informației inițiale*, de intrare (rețeaua proiectului, duratele, costurile și resursele activităților) și *determinarea unui program optim* (programarea timpului, determinarea drumului critic).

Etapă de control constă în compararea periodică a realizărilor de pe teren cu cele programate și dacă sunt diferențe se revizuieste programul, se actualizează, se elaborează un nou program.

Principalele metode de drum critic sunt: CPM, PERT, CPM/COST, PERT/COST, MPM.

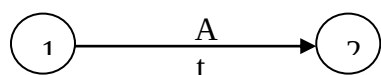
Problemele de drum critic se pot rezolva pe calculator cu programele Qsb, Dsspom, Microsoft Project, Oracle Primavera și alte programe.

8.3.1. METODA CPM

Metoda CPM – Critical Path Method a apărut în 1957 în SUA și se utilizează la conducerea unor proiecte cu durata activităților bine cunoscute, deci deterministe. Structura proiectului de condus este reprezentată printr-un graf (o rețea) cu activitățile pe arce, fiecărei activități asociindu-i-se o singură valoare, durata sa fixă. O lucrare oricât de complexă poate fi descompusă în lucrări (operații) simple denumite activități și în etape denumite evenimente care marchează sfârșitul sau începutul activităților. Evenimentele se reprezintă prin vârfuri (noduri), iar activitățile prin arce în graful rețea.

Se vor prezenta câteva reguli de întocmire a rețelelor de drum critic.

1. Modul de reprezentare a activităților și evenimentelor:



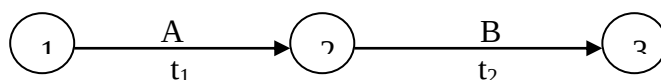
unde: 1, 2 – sunt evenimente (noduri);

A – denumirea activității;

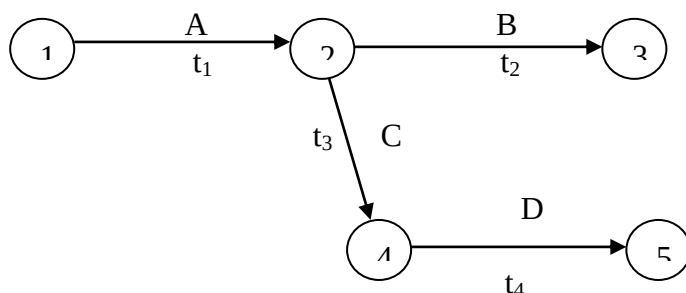
t – durata activității.

2. Activitățile se reprezintă în ordine tehnologică sau logică. Activitățile pot fi succesive, când se înșiruie în ordine tehnologică sau simultane (paralele) în cazul în care pornesc din același eveniment, se desfășoară paralel în timp.

Activități succesive:



Activități simultane (paralele):



3. O activitate nu poate începe înainte ca activitatea precedentă să se fi terminat.

Activitățile sunt de trei feluri:

- activități propriu-zise, consumă timp și resurse;
- așteptări, consumă numai timp;
- activități fictive, nu consumă nici resurse, nici timp, $t = 0$. Activitățile fictive au un rol logic, se utilizează pentru elimina anumite confuzii și se reprezintă prin arce întrerupte, linie punctată.

.....→

- 4. Nu este permisă existența circuitelor în nici o rețea de drum critic.
- 5. O rețea trebuie să posede un singur nod inițial și un singur nod final.
- 6. Orice alt nod în afară de cel inițial și cel final trebuie să posede cel puțin o activitate precedentă și cel puțin o activitate următoare.

Termenale evenimentelor

Se consideră o rețea de drum critic cu evenimentele notate de la 1 la n. Pentru fiecare eveniment al rețelei se pot calcula două termene:

- termenul minim al evenimentului j, notat T_{Ej} , E de la Early (în engleză) – devreme, curând, reprezintă termenul cel mai devreme de realizare a evenimentului j și este egal cu lungimea (valoarea) drumului maxim ales dintre toate drumurile care duc de la evenimentul inițial 1 la evenimentul j, adică:

$$T_{Ej} = \max\{L(D_{1j})\} \quad (8.6)$$

unde D_{1j} este un drum oarecare de la evenimentul inițial 1 la evenimentul j, iar $L(D_{1j})$ este valoarea (lungimea) sa. Prin valoarea unui drum se va înțelege suma duratelor activităților componente ale drumului.

- termenul maxim al evenimentului j, notat T_{Lj} , L de la Late (în engleză) – târziu, reprezintă termenul cel mai târziu admisibil de realizare a evenimentului j, astfel ca durata minimă a proiectului să nu fie depășită (durata minimă a proiectului este T_{En}). Rezultă că termenul maxim T_{Lj} este egal cu diferența dintre durata totală a proiectului T_{En} și durata drumului cel mai lung care duce de la evenimentul j la evenimentul final n, deci:

$$T_{Lj} = T_{En} - \max\{L(D_{jn})\} \quad (8.7)$$

sau

$$T_{Lj} = \min\{T_{En} - L(D_{jn})\}.$$

Deci, pentru a-l obține pe T_{Lj} se parcurge rețeaua în sens invers, de la evenimentul final n la evenimentul j, scăzând din durata minimă T_{En} a proiectului lungimea fiecărui drum D_{jn} (parcurs în sens invers) și alegând cel mai mic rezultat.

Evenimentele pentru care $T_{Ej} = T_{Lj}$ sunt *critice* și nu admit nici o amânare, aceste evenimente determinând *drumul critic*.

Toate celelalte evenimente admit o întârziere maximă egală cu $T_{Lj} - T_{Ej}$.

Termenele și rezervele de timp ale activităților

Fiecărui activități (i, j) îi corespund patru termene:

- termenul minim de începere $T_S^{\min}(i, j)$;
- termenul minim de terminare $T_F^{\min}(i, j)$;
- termenul maxim de începere $T_S^{\max}(i, j)$;
- termenul maxim de terminare $T_F^{\max}(i, j)$.

Termenul minim de începere al activității (i, j) este egal cu termenul minim al evenimentului i:

$$T_S^{\min}(i, j) = T_{Ej} = \max\{L(D_{1j})\}$$

Termenul minim de terminare al activității (i, j), $T_F^{\min}(i, j)$, este egal cu termenul minim de începere adunat cu durata sa t_{ij} :

$$T_F^{\min}(i, j) = T_S^{\min}(i, j) + t_{ij}$$

Termenul maxim de terminare al activității (i, j), $T_F^{\max}(i, j)$, este egal cu termenul maxim al evenimentului j:

$$T_F^{\max}(i, j) = T_{Lj} = \min\{T_{En} - L(D_{jn})\}$$

Termenul maxim de începere al activității (i, j), $T_S^{\max}(i, j)$, este egal cu termenul maxim de terminare al activității (i, j) minus durata activității t_{ij} :

$$T_S^{\max}(i, j) = T_F^{\max}(i, j) - t_{ij}$$

Rezervele sau marjele de timp ale unei activități (i, j) sunt:

- rezerva totală $R_T(i, j)$;
- rezerva liberă $R_L(i, j)$;
- rezerva intermediară $R_I(i, j)$;
- rezerva sigură sau independentă $R_S(i, j)$.

Rezerva totală a activității (i, j), notată $R_T(i, j)$, reprezintă intervalul de timp maxim cu care se poate mări durata t_{ij} fără ca durata totală a proiectului să fie depășită.

$$R_T(i, j) = T_{Lj} - (T_{Ej} + t_{ij}) = T_F^{\max}(i, j) - T_F^{\min}(i, j)$$

O activitate (i, j) este critică dacă rezerva sa totală este zero:

$$R_T(i, j) = 0$$

Consumarea rezervei totale a activității (i, j) $R_T(i, j)$ implică anularea rezervelor activităților precedente și ale celor următoare activității (i, j).

Rezerva sau marja liberă a activității (i, j), notată $R_L(i, j)$, reprezintă intervalul de timp maxim cu care se poate mări durata t_{ij} , fără ca durata totală a proiectului să fie depășită și fără să se anuleze rezervele activităților următoare ale activității (i, j).

$$R_L(i, j) = T_{Ej}$$

Consumarea rezervei libere $R_L(i, j)$ conduce la anularea rezervelor activităților precedente activității (i, j).

Rezerva intermediară a activității (i, j) , notată $R_I(i, j)$, reprezintă intervalul de timp maxim cu care se poate mări durata activității (i, j), notată t_{ij} , fără să se depășească durata totală a proiectului și fără să se anuleze rezervele activităților precedente.

$$R_I(i, j) = T_{Lj} - (T_{Li} + t_{ij})$$

Consumarea rezervei intermediare $R_I(i, j)$ conduce la anularea rezervelor activităților următoare activității (i, j).

Rezerva sigură sau *independentă* $R_S(i, j)$ este intervalul de timp maxim cu care poate fi mărită durata t_{ij} fără a depăși durata totală a proiectului și fără a afecta în vreun fel rezervele celorlalte activități. .

$$R_S(i, j) = \max \{T_{Ej} - (T_{Li} + t_{ij}), 0\}$$

8.3.2. METODA PERT – Program Evaluation and Review Technique

Metoda PERT a fost elaborată în SUA în laboratoarele marinei militare americane, în 1958. Metoda PERT se utilizează în conducerea proiectelor din domeniul cercetării și dezvoltării, la care duratele activităților sunt cunoscute cu un grad mare de imprecizie, considerând duratele activităților ca variabile aleatoare. Această metodă utilizează rețele cu activitățile pe arce, durata fiecărei activități fiind evaluată prin trei estimări: pesimistă, cea mai probabilă și optimistă.

Durata optimistă a activității (i, j), notată a_{ij} , corespunde cazului când există condițiile cele mai favorabile pentru desfășurarea activității.

Durata cea mai probabilă a activității (i, j), notată m_{ij} , este estimarea cu cea mai mare șansă de realizare în condiții normale de lucru.

Durata pesimistă a activității (i, j), notată b_{ij} , este intervalul de timp maxim de realizare a activității (i, j), corespunzător împrejurărilor cele mai defavorabile de execuție, excluzând calamitățile naturale.

Pentru fiecare activitate (i, j) sunt verificate inegalitățile:

$$0 < a_{ij} \leq m_{ij} \leq b_{ij}$$

Variabila aleatoare t_{ij} este durata activității (i, j) și verifică inegalitățile:

$$0 < a_{ij} \leq t_{ij} \leq b_{ij}$$

Utilizând cele trei estimări ale activității (i, j): pesimistă, cea mai probabilă și optimistă, t_{ij} se calculează ca o medie ponderată cu relația (8.8).

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} + 4.m_{ij} + b_{ij}}{6} \quad (8.8)$$

Dispersia este (8.9).

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2 \quad (8.9)$$

Durata fiecărei activități se va calcula cu relația (8.8) și se va scrie pe arcul corespunzător al rețelei, iar în continuare se procedează ca la metoda CPM pentru determinarea drumului critic. Durata totală a proiectului T_e este o variabilă aleatoare cu media și dispersia egale cu suma mediilor și respectiv dispersiilor duratelor activităților critice componente.

$$T_e = \sum_{(i,j) \in DC} t_{ij} \quad (8.10)$$

$$\sigma^2 = \sum_{(i,j) \in DC} \sigma_{ij}^2 \quad (8.11)$$

S-a notat cu DC drumul critic determinat și cu T_e timpul (durata) estimat.

Se poate determina probabilitatea de realizare a unui proiect utilizând factorul de probabilitate Z și tabelele corespunzătoare.

$$Z = \frac{T_{pl} - T_e}{\sqrt{\sigma^2}} \quad (8.12)$$

T_{pl} reprezintă termenul (durata) planificat al proiectului, T_e este durata estimată cu (8.10).

Exemplul nr. 8.5.

Problemă de drum critic – metoda CPM.

Un proiect determinist are structura, activitățile și evenimentele în graful rețea din figura nr. 8.6. Se cere să se determine durata minimă a proiectului și drumul critic. Se va rezolva cu programele Qsb și Dsspom.

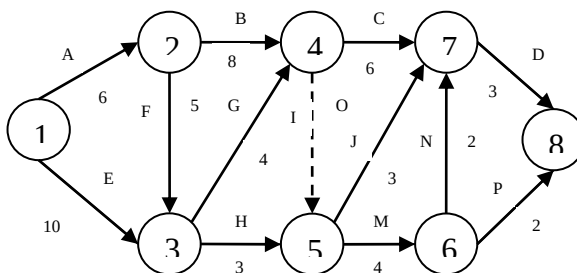


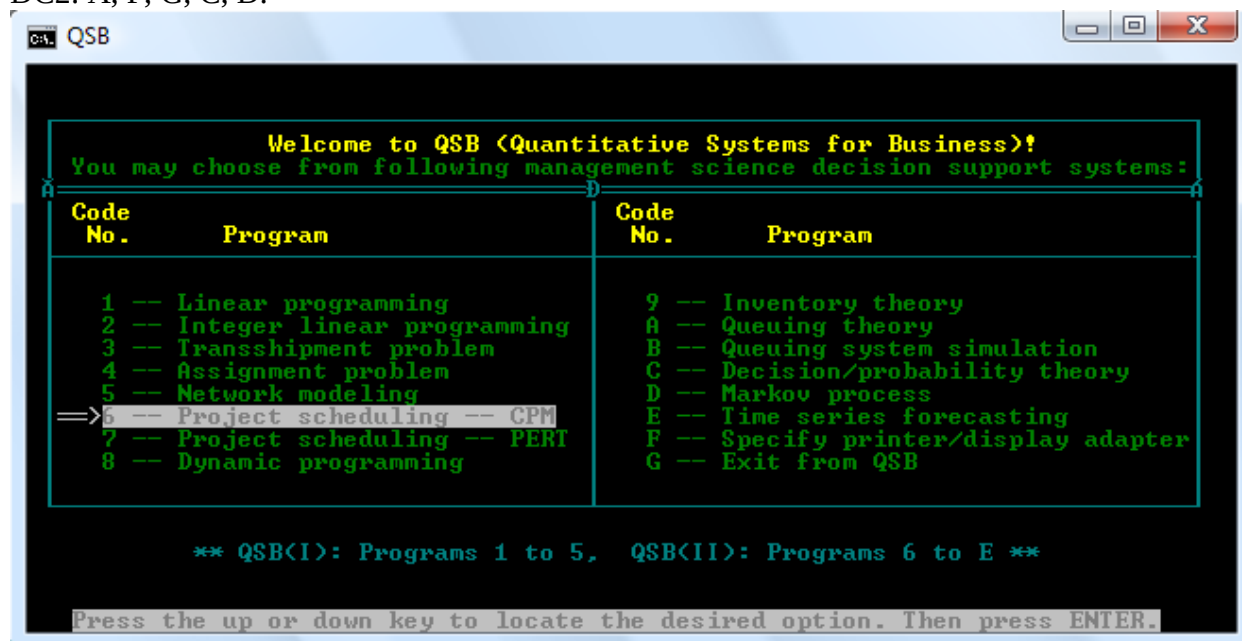
Fig. nr.8.6.

Din rezolvarea cu programul Qsb rezultă durata minimă a proiectului este 24 unități de timp.

Sunt două drumuri critice formate din activitățile:

DC1: A, F, G, I, M, N, D ;

DC2: A, F, G, C, D.



Exemplul nr. 8.6.

Problemă de drum critic în tabelul nr.8.1.– metoda PERT. Graful rețea corespunzător este în fig.nr.8.7. Se va rezolva cu programele Qsb și Dsspom.

Din rezolvarea cu programul Qsb rezultă durata minimă a proiectului este 39 unități de timp.

Sunt două drumuri critice formate din activitățile:

DC1: A4, B4, A6, O1, E4, F2, H6, I12, J1, K2;

DC2: A4, C2, E4, F2, H6, I12, J1, K2.

Tabelul nr. 8.1.

Nr.	Activitate	Noduri	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
1	A ₄	(1, 2)	3	4	6
2	B ₄	(2, 3)	2	4	5

3	A ₆	(3, 4)	1	2	3
4	C ₂	(2, 5)	3	6	8
5	E ₄	(5, 6)	3	4	5
6	F ₂	(6, 7)	1	2	3
7	G ₃	(6, 8)	2	3	5
8	H ₆	(7, 9)	5	6	7
9	I ₁₂	(9, 10)	10	12	13
10	J ₁	(10, 11)	1	2	4
11	K ₂	(11, 12)	2	3	4
12	O ₁	(4, 5)	0	0	0
13	O ₂	(8, 9)	0	0	0

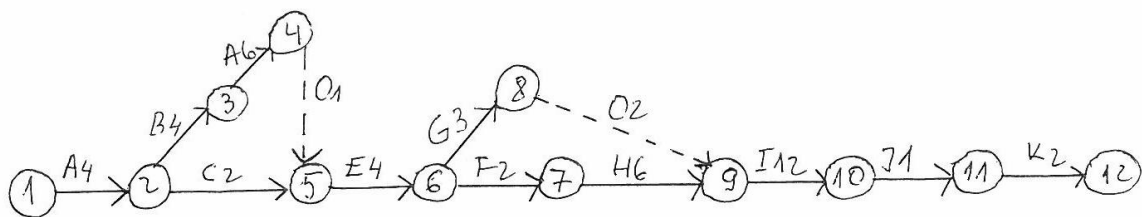
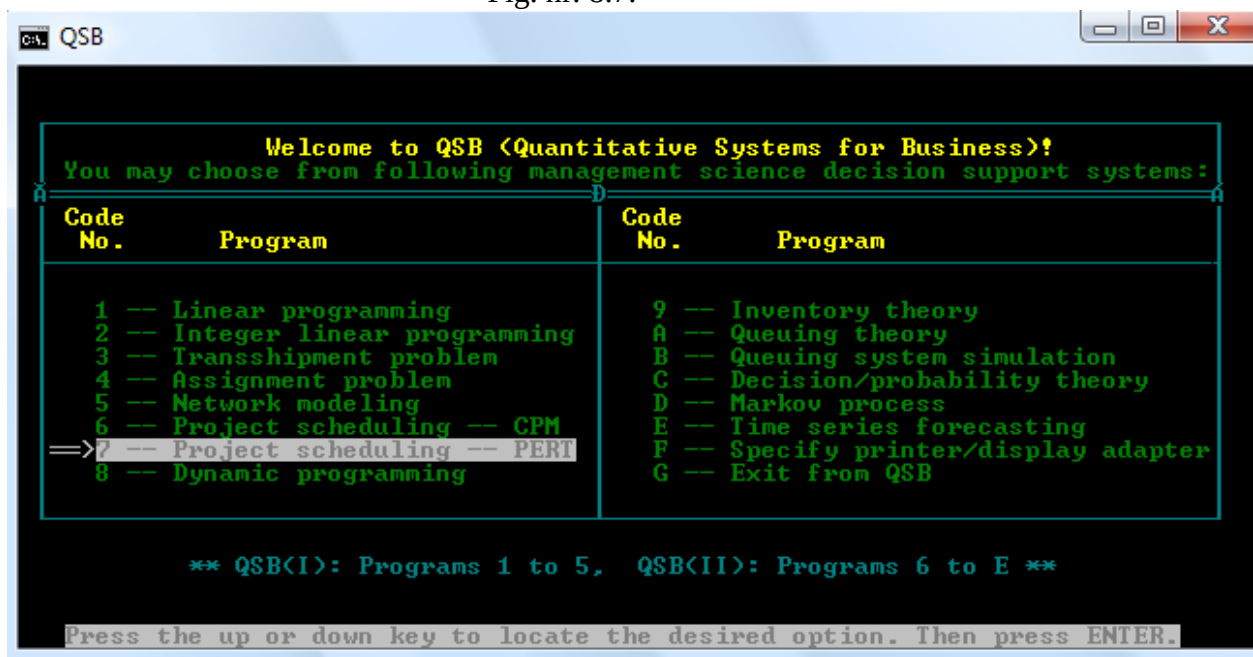


Fig. nr. 8.7.



3. Metoda CPM/COST

Parametrii analizați de metoda CPM/COST sunt timpul și costul, iar aplicarea acestei metode are ca scop minimizarea costului total al proiectului în baza unei relații de dependență liniară între costul și durata unei activități.

4. Metoda PERT/COST

Metoda PERT/COST este o dezvoltare a metodei PERT, care, pe lângă parametrul timp, analizează și parametrul cost.

5. Metoda MPM – Metra Potential Method (Methodes des Potentiels Metra)

Metoda MPM a fost dezvoltată în Franța de Bernard Roy în 1958 și utilizează rețele cu activitățile situate pe noduri, fiecare nod reprezentând o activitate, iar evenimentele pe arce.

8.2. Determinarea drumurilor hamiltoniene minime

Se consideră graful G ,

$$\begin{aligned} G &= (X, U), \\ X &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \\ U &= \{(x_i, x_j) \mid x_i, x_j \in X\}, \end{aligned}$$

Valoarea (lungimea) arcelor din graful considerat poate reprezenta timpul de prelucrare sau costul prelucrării unor piese.

Se poate rezolva problema determinării drumurilor hamiltoniene cu **algoritmul lui FOULKES** cu care în prima fază se determină componentele tare conexe ale grafului G .

Calcululele ce se fac folosesc operațiile $+$ și $\times$ din algebra Boole $\{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0; & 0 \times 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1; & 0 \times 1 &= 0 \\ 1 + 0 &= 1; & 1 \times 0 &= 0 \\ 1 + 1 &= 1; & 1 \times 1 &= 1 \end{aligned} \quad (8.3)$$

De fapt $+$ corespunde **disjuncției** (sau), iar $\times$ corespunde conjuncției (și) din logica matematică bivalentă.

a) Algoritmul lui FOULKES

1. Se scrie matricea booleană A a grafului G , $G = (X, U)$:

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, n. \\ a_{ij} &= \begin{cases} 1, & \text{daca } (X_i, X_j) \in U \\ 0, & \text{daca } (X_i, X_j) \notin U \end{cases} \end{aligned}$$

2. Fie

$$M = A + E,$$

unde E este matricea unitate de ordinul n , iar adunarea este booleană.

Deci:

Matricea M se ridică la puteri succesive până când două puteri consecutive ale lui M sunt egale. Dacă n este mare, se caută k minim:

$$2^k < n, \text{ astfel încât:}$$

$$M^{2^k} = M^{2^{k-1}} \quad (8.4)$$

Înmulțirea matricelor se face tot în sens boolean.

$$2^k$$

3. În matricea M se suprimă liniile de rang $i_1, i_2, \dots, i_p$ care sunt formate numai cu cifra 1 și coloanele corespunzătoare care sunt formate numai cu cifra 0 și se obțin astfel vârfurile: $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}$ care formează prima clasă de echivalență G_{M1} (componentă tare conexă).
4. Dacă M_R este matricea rămasă din matricea M după suprimarea liniilor și coloanelor la etapa 3, se aplică etapa 3. lui M_R , iar dacă nu este posibil, se aplică etapele 2 și 3, determinând a doua clasă de echivalență G_{M2} . Procedul continuă până se obțin toate

clasele de echivalență ale grafului G : $G_{M1}, G_{M2}, \dots, G_{Mm}$, iar pentru vârfurile fiecărei clase de echivalență G_{Mi} , $i = 1, 2, \dots, m$, se trasează arcele care păstrează incidențele din graful G .

b) Determinarea drumului hamiltonian minim

1. Se aplică algoritmul lui Foulkes pentru a se determina componentele tare conexe ale grafului G considerat.
2. Între vârfurile acestor componente se consideră **incidențele lor din graful G** .
3. Trecând succesiv de la o componentă conexă la alta, se stabilesc toate drumurile hamiltoniene ale grafului G .
4. Pentru drumurile hamiltoniene determinate se calculează :

$$\min T = \min \sum_{(i,j) \in DH} t_{ij} \quad (8.5)$$

sau

$$\min C = \min \sum_{(i,j) \in DH} c_{ij}$$

Suma se ia pentru $(X_i, X_j) \in DH$

Unde

DH = drumul hamiltonian,

se obține drumul hamiltonian de lungime minimă (timp total minim sau cost total minim).

Exemplul nr. 8.4.

Se presupune că trebuie prelucrate $n = 7$ piese $P_1, P_2, \dots, P_7$ pe o mașină, iar la trecerea de la prelucrarea piesei P_i la prelucrarea piesei P_j se consumă timpul t_{ij} , $t_{ij} > 0$; $i, j = 1, 2, \dots, 7$, $i \neq j$, urmărindu-se minimizarea timpului total de nefuncționare a mașinii. Se va asocia acestei probleme un graf orientat G , fig. nr.8.4,

$$\begin{aligned} G &= (X, U), \\ X &= \{x_1, x_2, \dots, x_7\}, \\ U &= \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \end{aligned}$$

ale cărui vârfuri x_i , $i = 1, 2, \dots, 7$; sunt cele 7 piese, iar valoarea (lungimea) arcului de la vârful P_i la vârful P_j este t_{ij} ,

$$l(P_i, P_j) = t_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 7; \quad i \neq j.$$

Problema determinării succesiunii optime de prelucrare a celor 7 piese se reduce la problema determinării drumului hamiltonian minim în graful G considerat, deci se aplică algoritmul lui Foulkes.

Matricea booleană (de adiacență, a tranzițiilor) a grafului G este A . Se calculează matricea M , M^2 , M^4 , M^5 .

Din calcul rezultă $M^4 = M^5$, vârfurile 2, 3, 6 au în matricea M^4 liniile corespunzătoare 2, 3, 6 formate din elemente egale cu 1 și coloanele formate numai din elemente egale cu 0, exceptând elementele de la intersecția acestora, care sunt 1, rezultă prima componentă tare conexă este formată din vârfurile 2, 3, 6., $C_1 = G_{M1} = \{2, 3, 6\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^2 \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \cdot M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= M^4$$

Se elimină (taie) din matricea M^4 liniile și coloanele 2, 3, 6 și rezultă matricea M_1 . În matricea M_1 liniile 1, 2 care corespund vîrfurilor 1 și 4 au toate elementele egale cu 1 și coloanele corespunzătoare au elementele 0, exceptând cele de la intersecție, deci se obține a doua componentă tare conexă $C_2 = G_{M_2} = \{1, 4\}$. Se suprimă (taie) liniile și coloanele 1, 2 din M_1 care corespund vîrfurilor 1 și 4, rezultă matricea M_2 .

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rezultă a treia componentă tare conexă $C_3 = G_{M3} = \{5, 7\}$. Dacă se reasează vârfurile grafului din fig. nr. 8.4 după componentele tare conexe la care aparțin, graful dat se va reprezenta ca în fig. nr.8.5. Se determină drumul de lungime minimă.

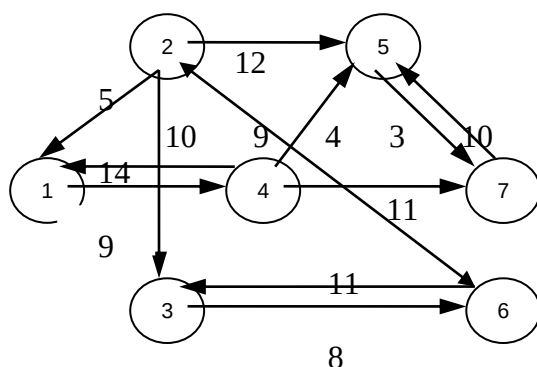


Fig. Nr. 8.4.

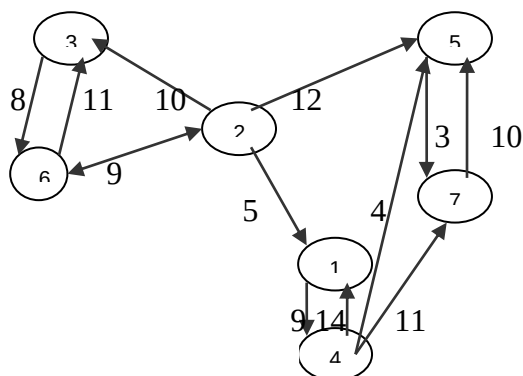


Fig. Nr.8.5.

Un drum se numește *hamiltonian* dacă trece numai o dată prin fiecare din vârfurile grafului. Din fig. nr.8.5. rezultă două drumuri hamiltonieni:

- primul drum trece prin vârfurile: 3, 6, 2, 1, 4, 7, 5 și are lungimea $l(D_1)$,

$$l(D_1) = 8 + 9 + 5 + 9 + 11 + 10 = 52 \text{ u.t.};$$

- al doilea drum trece prin vârfurile: 3, 6, 2, 1, 4, 5, 7 și are lungimea $l(D_2)$,

$$l(D_2) = 8 + 9 + 5 + 9 + 4 + 3 = 38, \text{ deci drumul hamiltonian de lungime minimă este } D_2.$$

Trebuie prelucrate $n = 7$ piese $P_1, P_2, \dots, P_7$ pe o mașină, iar la trecerea de la prelucrarea piesei P_i la prelucrarea piesei P_j se consumă timpul t_{ij} , $t_{ij} > 0$; $i, j = 1, 2, \dots, 7, i \neq j$, iar minimizarea timpului total de nefuncționare a mașinii se realizează dacă se prelucrează astfel: $P_3, P_6, P_2, P_1, P_4, P_5, P_7$.

8.4. Grafuri neorientate

Un graf neorientat este un sistem $G = (X, U)$, cu X o mulțime de elemente numite vârfurile grafului U și o mulțime de perechi neordonate de vârfuri.

Un element din mulțimea U se numește muchie. O muchie se mai notează $[X_i, X_j]$ sau $\overline{(X_i, X_j)}$ pentru a o deosebi de arcul (X_i, X_j) dintr-un graf orientat. Reprezentarea geometrică a muchiiilor unui graf neorientat se deosebește de cea a arcelor prin faptul că lipsește orientarea de la arce.

Un graf neorientat se mai notează $\bar{G} = (X, \bar{U})$ pentru a nu fi confundat cu graful orientat $G = (X, U)$.

Deci, în cazul grafurilor neorientate în comparație cu grafurile orientate, se vorbește de muchii în loc de arce, de lanț în loc de drum, de ciclu în loc de circuit.

Oricărui drum într-un graf orientat îi corespunde un lanț într-un graf neorientat, dar nu oricărui lanț îi corespunde un drum.

Orice circuit este un ciclu, dar nu și invers.

Un graf neorientat este conex dacă între oricare două vârfuri distincte ale sale există cel puțin un lanț.

Un graf orientat tare conex este conex, dar reciproca nu este adevărată.

Drumuri de valoare optimă în grafuri

Pentru graful $G = (X, U)$ se consideră matricea conexiunilor (tranzițiilor), numită și matrice de adiacență:

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{daca } (X_i, X_j) \in U \\ 0, & \text{daca } (X_i, X_j) \notin U \end{cases}$$

Graful G este valorizat dacă există o funcție l ,

$$l: U \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$l(u_i) = l((X_i, X_j)) = v_{ij}, \quad (\forall) (X_i, X_j) \in U \quad (8.13)$$

$$v_{ij} \geq 0$$

Valoarea v_{ij} se numește valoarea arcului (X_i, X_j) , poate avea semnificația de cost, durată, distanță etc.

Drumul d în graful G , $d = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ are valoarea egală cu suma valorilor arcelor care îl compun, deci:

$$L(d) = \sum_{k=1}^p l(u_k)$$

Două vârfuri sunt adiacente dacă sunt distincte și sunt unitate printr-un arc. Două arce sunt adiacente dacă sunt distincte și au o extremitate comună. Dacă un vârf nu este extremitatea nici unui arc el este numit vârf izolat.

Se consideră: mulțimea $B_2 = \{0, 1\}$, operațiile $\oplus$ și $\otimes$ definite în tabelele nr. 8.2 și nr.8.3, care formează algebra Boole $(B_2, \oplus, \otimes)$.

Tabelul nr. 8. 2

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabelul nr. 8. 3

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

Se notează cu $\overline{A^k}$ puterea k a matricii A în algebra Boole $(B_2, \oplus, \otimes)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$; și cu A^k puterea k a matricii A în corpul numerelor reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, adică cu operațiile $+$ și $\cdot$ obișnuite.

$$\overline{A}^{(k)} = (\overline{a_{ij}^{(k)}}), \quad k = 2, 3, \dots; i, j = 1, 2, \dots, 5;$$

$$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}), \quad k = 2, 3, \dots; i, j = 1, 2, \dots, 5;$$

Pentru $k = 2$, $\overline{A}^2$ se interpretează astfel:

- în matricea $\overline{A}^2$ linia i arată existența drumurilor de lungime 2 (compuse din 2 arce) de la X_i la vârfurile în coloanele cărora apare 1 pe această linie;
- în matricea $\overline{A}^2$ coloana j arată existența drumurilor de lungime 2 incidente interior în X_j și venind de la vârfurile pe a căror linie apare 1 în această coloană.

În mod analog se interpretează în matricile $\overline{A}^3, \overline{A}^4, \dots, \overline{A}^k$ pentru drumurile de lungime 3, 4, ..., k .

În A^k , puterea k a matricii A în corpul numerelor reale $(R, +, \cdot)$, $k \in N$, $k \geq 2$, se dau câteva valori lui k .

Pentru $k = 2$, $A^2 = (a_{ij}^{(2)})$ se interpretează astfel:

- linia i arată numărul drumurilor distincte (elementare sau nu) de lungime 2 (formate din 2 arce) de la X_i la fiecare din vârfurile grafului, deci $a_{ij}^{(2)}$ reprezintă numărul drumurilor de lungime 2 de la X_i la X_j ;
- coloana j conține numărul drumurilor distincte (elementare sau nu) de lungime 2 care ajung în X_j venind din vârfurile grafului, deci $a_{ij}^{(2)}$ reprezintă numărul drumurilor din X_i în X_j de lungime 2.

În mod analog se interpretează în matricile $A^3, A^4, \dots, A^k$ pentru drumurile de lungime 3, 4, ..., k .

Matricile $\overline{A}^3, \overline{A}^4, \dots, \overline{A}^k$ se pot obține prin calcul direct în algebra Boole $(B_2, +, \cdot)$ sau din matricile $A^3, A^4, \dots, A^k$ punând 1 în loc de $a_{ij}^{(k)} > 1$.

Dacă în vârful X_i există o buclă, atunci pe diagonala principală $a_{ii} = 1$.

Teorema 1

Dacă un graf nu are circuite, atunci există λ pentru care $A^\lambda = O$, deci și $\overline{A}^\lambda = O$.
(O – matricea zero).

Dacă X_i este un vârf care participă la formarea unui circuit de lungime 2 (elementar sau nu), atunci la intersecția liniei i cu coloana i pe diagonala principală vom avea 1 în matricea $\overline{A}^2$, deci $a_{ii}^{(2)} = 1$, circuitul respectiv pornește din X_i și ajunge tot în X_i .

În mod analog în matricea $\overline{A}^3$ pentru vârfurile X_i care participă la circuite, elementare sau nu, de lungime 3, $a_{ii}^{(3)} = 1$, în matricea $\overline{A}^4$ pentru circuitele de lungime 4 avem $a_{ii}^{(4)} = 1$.

În general în matricea A^k se va găsi pe diagonala principală în dreptul fiecărui vârf X_i , numărul circuitelor de lungime k (elementare sau nu) la care acesta participă.

Exemplul nr. 8.7.

Se consideră graful definit de matricea A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se va desena graful corespunzător.

În vârful X_5 există o buclă, $a_{55} = 1$.

Se calculează $\overline{A}^2, \overline{A}^3, \overline{A}^4$ și A^2, A^3, A^4 .

$$\overline{A^2} = A \otimes A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A^3} = A \otimes A \otimes A = \overline{A^2} \otimes A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A^4} = A \otimes A \otimes A \otimes A = \overline{A^3} \otimes A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Coefficienții care nu aparțin diagonalelor acestor matrici ridicate la diverse puteri ne dau informații despre drumuri, iar cei de pe diagonale despre circuite.

Astfel, în exemplul considerat, exemplul nr. 8.7, avem:

- în matricea $\overline{A^2}$ avem: $\overline{a_{11}}^{(2)} = \overline{a_{44}}^{(2)} = \overline{a_{55}}^{(2)} = 1$, deci vârfurile X_1 , X_4 , X_5 participă la câte un circuit de lungime 2, vârful X_1 participă la circuitul elementar: $[X_1, X_4, X_1]$, vârful X_4 participă la circuitul elementar: $[X_4, X_1, X_4]$, circuitul din X_5 – se parcurge de 2 ori bucla sa ;
- în matricea A^2 , $a_{13}^{(2)} = 2$, deci există 2 drumuri de lungime 2 de la X_1 la X_3 , $d_1 = [X_1, X_4, X_3]$, $d_2 = [X_1, X_5, X_3]$;

- în matricea $\overline{A^3}$ avem: $\overline{a_{11}^{(3)}} = \overline{a_{22}^{(3)}} = \overline{a_{33}^{(3)}} = \overline{a_{44}^{(3)}} = \overline{a_{55}^{(3)}} = 1$, deci toate vârfurile grafului considerat participă la circuite de lungime 3;

- în matricea A^3 , $a_{11}^{(3)} = 3$, vârful X_1 participă la 3 circuite de lungime 3:

$[X_1, X_5, X_3, X_1]$, $[X_1, X_4, X_3, X_1]$, $[X_1, X_4, X_2, X_1]$; la fel: $a_{15}^{(3)} = 3$, deci din X_1 în X_5 există 3 drumuri de lungime 3:

$d_1 = [X_1, X_4, X_2, X_5]$,

$d_2 = [X_1, X_3, X_2, X_5]$,

$d_3 = [X_1, X_4, X_3, X_5]$.

Matricile $\overline{A^k}$, $k \geq 4$, sunt pline (toate elementele sunt egale cu 1), ceea ce înseamnă că graful G este tare conex.

Drumuri de valoare minimă

Se consideră graful finit $G = (X, U)$.

Graful G este valorizat, există o funcție l ,

$$l: U \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$l(u_i) = l((X_i, X_j)) = v_{ij}, \quad (\forall) (X_i, X_j) \in U$$

$$v_{ij} \geq 0$$

Valoarea v_{ij} se numește valoarea arcului (X_i, X_j) , poate avea semnificația de cost, durată, distanță etc.

Se notează :

$$E = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \{\infty\}$$

$$a \otimes b = a + b \quad (8.14)$$

$$a \oplus b = \min \{a, b\}$$

$$a \otimes \infty = \infty \otimes a = \infty, \quad (\forall) a, b \in E, a < \infty.$$

Operațiile $\otimes$ și $\oplus$ se extind pentru matrici pătrate cu coeficienți din E .

Se formează matricea B .

$$B = (b_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$b_{ij} = \begin{cases} v_{ij} & , \text{dacă } (X_i, X_j) \in U \\ \infty & , \text{dacă } (X_i, X_j) \notin U \\ 0 & , \text{dacă } i = j \end{cases} \quad (8.15)$$

Teorema 2

Dacă se consideră graful $G = (X, U)$, orientat și finit, în care se atașează fiecărui arc $(X_i, X_j) \in U$, valoarea sa $l((X_i, X_j)) = v_{ij}$, se formează matricea $B = (b_{ij})$ conform relației (8.15) care se ridică la puterea k conform relațiilor (8.14), atunci B^k conține toate valorile minime ale drumurilor formate din cel mult k arce, așezate la încrucișarea liniei vârfului din care începe drumul cu coloana celui în care se termină ($k < n$, n = numărul vârfurilor grafului).

Observații

- Drum de valoare minimă ∞ (infinit) înseamnă drum inexistent.
- Matricea

$$B^k = (b_{ij}^{(k)})$$

are semnificația :

$b_{ij}^{(k)}$ = valoarea drumului minim de la X_i la X_j format din cel mult k arce.

- Drumurile obținute prin această metodă sunt elementare (drumul se numește elementar dacă nu utilizează de două ori același vârf).

- Operațiile (8.14) sunt asociative, deci se poate scurta calculul prin calcularea succesivă a puterilor lui $B : B^2, B^4, B^8$ etc.
- Teorema este aplicabilă atât grafurilor cu circuite, cât și celor fără circuite.
- Dacă există un drum d_{ij} de valoare minimă de la X_i la X_j , atunci principiul optimalității ne spune că dacă $X_k, X_l \in d_{ij}$, atunci tronsonul dintre X_k și X_l al lui d_{ij} are valoare minimă în mulțimea drumurilor dintre X_k și X_l .
- Teorema este valabilă și pentru grafuri neorientate, dar avem $v_{ij} = v_{ji}$ și în enunț se înlocuiesc arcele cu muchiile și drumurile cu lanțuri.
- Începând de la un anumit $k < n$, avem $B^k = B^{k+1} = B^{k+2} = \dots$, deoarece se epuizează toate posibilitățile de a uni prin drumuri cu valoare minimă vârfurile grafului.
- Matricea B^k dă valorile minime ale tuturor drumurilor posibile în graf între orice perechi de vârfuri, indiferent de lungimile lor (numărul arcelor care le compun).

Teorema 2 oferă numai valorile minime ale drumurilor grafului, nu oferă algoritmul de identificarea drumurilor de valoare minimă. (Se pot utiliza algoritmi Ford, Bellman-Kalaba etc.).

Algoritmul pentru identificarea drumurilor de valoare minimă se poate enunța astfel:

1. se formează matricea B utilizând relațiile (8.15), se calculează B^2 utilizând relațiile (8.14), iar în matricea B^2 se scot în evidență valorile finite apărute în plus sau distincte de cele din matricea B și se notează indicii de precedență (prin ce vârf intermediar trece drumul), reprezentând drumuri de valoare minimă și de lungime doi (formate din două arce), care au originea în vârful dat de linia matricii și cu extremitatea vârful dat de coloana în care se găsește valoarea determinată;
2. dacă sunt doi sau mai mulți indici de precedență pentru aceeași valoare, sunt mai multe drumuri minime distincte prin vârful intermediar corespunzător;
3. valorile rămase nemarcate sunt ale tranzițiilor între extremitățile cărora nu există drumuri de lungime doi cu valoare mai mică decât a tranziției;
4. se calculează $B^3 = B^2 \otimes B$, $B^4 = B^3 \otimes B$, ..., $B^{k+1} = B^k \otimes B$, $k \in \mathbb{N}^*$ etc. până când două puteri consecutive ale lui B coincid. Puterile matricii B se calculează în tabel, într-o căsuță în partea superioară este trecut drumul sau drumurile, iar în partea inferioară a căsuțelor este trecută valoarea minimă a drumului.

Exemplul nr. 8.8.

Se consideră graful $G = (X, U)$ din figura nr. 8.9. cu valorile arcelor notate pe figură. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Trebuie determinată matricea drumurilor de valoare minimă ale grafului.

Se scrie matricea B folosind relațiile (8.15).

Se calculează B^2 utilizând relațiile (8.14) și se va scrie tabelar în tabelul nr. 8.4.

În matricea B^2 din tabelul nr.8.4., $b^{(2)}_{13} = 14$ în loc de $b_{13} = \infty$ din matricea B și s-a subliniat valoarea 14, iar deasupra s-a scris 2, deoarece:

$$b^{(2)}_{13} = 14 = \min(0 + \infty, \underline{4 + 10}, \infty + 0, \infty + 2, \infty + 4, 20 + \infty),$$

$$14 = 4 + 10 = b_{12} + b_{23},$$

deci x_2 îl precede pe x_3 în drumul de la x_1 la x_3 , $d_{13}, d_{13} = [x_1, x_2, x_3]$.

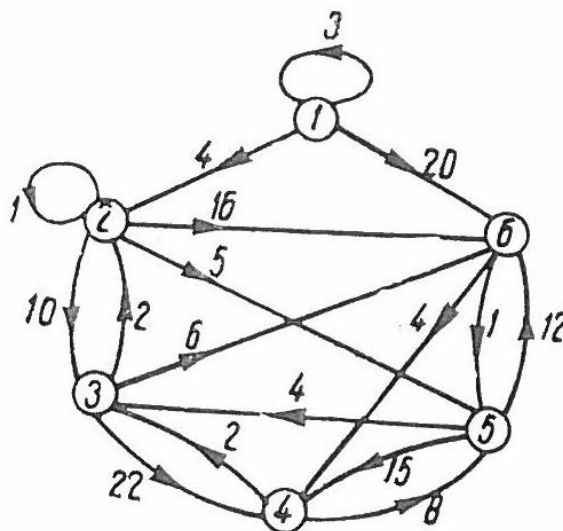


Fig. Nr. 8.9

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & 20 \\ \infty & 0 & 10 & \infty & 5 & 16 \\ \infty & 2 & 0 & 22 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & 15 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tabelul nr. 8.4. Matricea B^2 .

0	4	<u>2</u> <u>14</u>	<u>6</u> <u>24</u>	<u>2</u> <u>9</u>	<u>2</u> 20, <u>20</u>
∞	0	<u>5</u> <u>9</u>	<u>5, 6</u> <u>20</u>	5	<u>3</u> <u>16</u>
∞	2	0	<u>6</u> <u>10</u>	<u>2, 6</u> <u>7</u>	6
∞	<u>3</u> <u>4</u>	2	0	8	<u>3</u> <u>8</u>
∞	<u>3</u> <u>6</u>	4	15	0	<u>3</u> <u>10</u>
∞	∞	<u>5</u> <u>5</u>	4	1	0

De la x_1 la x_6 sunt două drumuri, unul este arcul (x_1, x_6) , iar al doilea drum trece prin x_2 .

Pe linia 1 în matricea B , $b_{16} = 20$, iar în matricea B^2 , $b^{(2)}_{16} = \underline{20}$ și s-a subliniat valoarea 20 și deasupra s-a scris 2, deoarece drumul $d_{16} = [x_1, x_2, x_6]$ trece prin x_2 .

Pe linia 2 în matricea B , $b_{24} = \infty$, deci nu există arc de la x_2 la x_4 , iar în matricea B^2 , $b^{(2)}_{24} = \underline{20}$ și s-a subliniat valoarea 20 și deasupra s-au scris numerele 5, 6, deoarece există două drumuri de valoare minimă 20 de la x_2 la x_4 , care trec prin x_5 , respectiv x_6 .

Drumul $d_{24} = [x_2, x_5, x_4]$ trece prin x_5 , iar al doilea drum $d^1_{24} = [x_2, x_6, x_4]$ trece prin x_6 .

Valoarea $b^{(2)}_{24} = \underline{20}$ s-a obținut cu relațiile (8.14) prin înmulțirea liniei 2 din B cu coloana 4 a lui B , astfel:

$$b^{(2)}_{24} = \underline{20} = \min(\infty + \infty, 0 + \infty, 10 + 22, \infty + 0, \underline{5 + 15}, \underline{16 + 4}).$$

$b_{25} = 5$, $b_{54} = 15$, deci primul drum trece prin x_5 ;

$b_{26} = 16$, $b_{64} = 4$, deci al doilea drum trece prin x_6 .

Se calculează cu relațiile (8.14) matricea B^3 în tabelul nr.8.5.

$$B^3 = B^2 \otimes B$$

Tabelul nr. 8.5. Matricea B^3 .

0	4	$\begin{smallmatrix} 2, 5 \\ \underline{13} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2,5;2, 6; ; 6 \\ \underline{24} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ \underline{9} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2; 2, 3 \\ 20, \underline{20} \end{smallmatrix}$
∞	0	$\begin{smallmatrix} 5 \\ \underline{9} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3,6;5; 6 \\ \underline{20} \end{smallmatrix}$	5	$\begin{smallmatrix} 3 \\ 16, \underline{16} \end{smallmatrix}$
∞	2	0	$\begin{smallmatrix} 6 \\ \underline{10} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2, 6 \\ \underline{7} \end{smallmatrix}$	6
∞	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{4} \end{smallmatrix}$	2	0	8	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{8} \end{smallmatrix}$
∞	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{6} \end{smallmatrix}$	4	$\begin{smallmatrix} 3, 6 \\ \underline{14} \end{smallmatrix}$	0	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{10} \end{smallmatrix}$
∞	$\begin{smallmatrix} 5, 3 \\ \underline{7} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ \underline{5} \end{smallmatrix}$	4	1	0

Se calculează cu relațiile (8.14) matricea B^4 în tabelul nr.8.6.

$$B^4 = B^3 \otimes B$$

Tabelul nr. 8.6. Matricea B^4 .

0	4	$\begin{smallmatrix} 2, 5 \\ \underline{13} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2,5;2, 6; ; 6 \\ \underline{24} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ \underline{9} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2; 2, 3 \\ 20, \underline{20} \end{smallmatrix}$
∞	0	$\begin{smallmatrix} 5 \\ \underline{9} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3,6;5; 6 \\ \underline{20} \end{smallmatrix}$	5	$\begin{smallmatrix} 3 \\ 16, \underline{16} \end{smallmatrix}$
∞	2	0	$\begin{smallmatrix} 6 \\ \underline{10} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2, 6 \\ \underline{7} \end{smallmatrix}$	6
∞	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{4} \end{smallmatrix}$	2	0	8	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{8} \end{smallmatrix}$
∞	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{6} \end{smallmatrix}$	4	$\begin{smallmatrix} 3, 6 \\ \underline{14} \end{smallmatrix}$	0	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{10} \end{smallmatrix}$
∞	$\begin{smallmatrix} 5, 3 \\ \underline{7} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ \underline{5} \end{smallmatrix}$	4	1	0

Se calculează cu relațiile (8.14) matricea B^5 în tabelul nr.8.7.

$$B^5 = B^4 \otimes B = B^3 \cdot B^2$$

Tabelul nr. 8.7. Matricea B^5 .

0	4	$\begin{smallmatrix} 2, 5 \\ \underline{13} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2,5, 3, 6 \\ \underline{23} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ \underline{9} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2, 5, 3 \\ \underline{19} \end{smallmatrix}$
∞	0	$\begin{smallmatrix} 5 \\ \underline{9} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5, 3,6 \\ \underline{19} \end{smallmatrix}$	5	$\begin{smallmatrix} 5, 3 \\ \underline{15} \end{smallmatrix}$
∞	2	0	$\begin{smallmatrix} 6 \\ \underline{10} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2, 6 \\ \underline{7} \end{smallmatrix}$	6
∞	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{4} \end{smallmatrix}$	2	0	8	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{8} \end{smallmatrix}$
∞	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{6} \end{smallmatrix}$	4	$\begin{smallmatrix} 3, 6 \\ 14 \end{smallmatrix}$	0	$\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{10} \end{smallmatrix}$
∞	$\begin{smallmatrix} 5, 3 \\ \underline{7} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 5 \\ \underline{5} \end{smallmatrix}$	4	1	0

Se calculează cu relațiile (8.14) matricea B^6 .

$$B^6 = B^5 \otimes B = B^4 \cdot B^2 = B^5$$

Calculul se încheie, deoarece $B^6 = B^5$

Matricea valorilor minime ale drumurilor elementare existente în graful considerat în figura nr. 8.9 și traseele drumurilor minime sunt în tabelul nr. 8.7.

Drumuri de valoare maximă

Se consideră graful finit $G = (X, U)$.

Graful G este valorizat, există o funcție l ,

$$l: U \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$l(u_i) = l((X_i, X_j)) = v_{ij}, \quad (\forall) (X_i, X_j) \in U$$

$$v_{ij} \geq 0$$

Valoarea v_{ij} se numește valoarea arcului (X_i, X_j) , poate avea semnificația de cost, durată, distanță etc.

Se notează :

$$E = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \{-\infty\}$$

$$a \otimes b = a + b \quad (8.16)$$

$$a \oplus b = \max \{a, b\}$$

$$a \otimes (-\infty) = (-\infty) \otimes a = -\infty, \quad (\forall) a, b \in E, a > -\infty.$$

Operațiile $\otimes$ și $\oplus$ se extind pentru matrici pătrate cu coeficienți din E .

Se formează matricea B .

$$B = (b_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$b_{ij} = \begin{cases} v_{ij}, & \text{dacă } (X_i, X_j) \in U \\ -\infty, & \text{dacă } (X_i, X_j) \notin U \\ 0, & \text{dacă } i = j \end{cases} \quad (8.17)$$

Teorema 3

Dacă se consideră graful $G = (X, U)$, orientat și finit, în care se atașează fiecărui arc $(X_i, X_j) \in U$, valoarea sa $l((X_i, X_j)) = v_{ij}$, se formează matricea $B = (b_{ij})$ conform relației (8.17) care se ridică la puterea k conform relațiilor (8.16), atunci B^k conține toate valorile maxime ale drumurilor formate din cel mult k arce, așezate la încrucișarea liniei vârfului din care începe drumul cu coloana celui în care se termină ($k < n$, n = numărul vârfurilor grafului).

Observații

- Drum de valoare maximă $-\infty$ (- infinit) înseamnă drum inexistent.
- Teorema 3 este aplicabilă pentru determinarea tuturor valorilor maxime ale drumurilor elementare într-un graf fără circuite.
- Teorema 3 oferă numai valorile maxime ale drumurilor grafului, nu oferă algoritmul de identificarea drumurilor de valoare maximă. (Se pot utiliza algoritmi Ford, Bellman-Kalaba etc.).
- **Algoritmul pentru identificarea drumurilor de valoare maximă** se poate enunța astfel:

1. se formează matricea B utilizând relațiile (8.17), se calculează B^2 utilizând relațiile (8.16), iar în matricea B^2 se scot în evidență valorile finite apărute în plus

sau distincte de cele din matricea B și se notează indicele de precedență (prin ce vârf intermediar trece drumul) , reprezentând drumuri de valoare maximă și de lungime doi (formate din două arce), care au originea în vârful dat de linia matricii și cu extremitatea vârful dat de coloana în care se găsește valoarea determinată;

2. dacă sunt doi sau mai mulți indici de precedență pentru aceeași valoare, sunt mai multe drumuri maxime distincte prin vârful intermediar corespunzător;
3. valorile rămase nemarcate sunt ale tranzițiilor între extremitățile cărora nu există drumuri de lungime doi cu valoare mai mare decât a tranziției;
4. se calculează $B^3 = B^2 \otimes B$, $B^4 = B^3 \otimes B$, ..., $B^{k+1} = B^k \otimes B$, $k \in \mathbb{N}^*$ etc. până când două puteri consecutive ale lui B coincid. Puterile matricii B se calculează în tabel , într-o căsuță în partea superioară este trecut drumul sau drumurile, iar în partea inferioară a căsuțelor este trecută valoarea maximă a drumului.

Exemplul nr. 8.9.

Se consideră graful $G = (X, U)$ din figura nr. 8.10. cu valorile arcelor notate pe figură.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$. Trebuie determinată matricea drumurilor de valoare maximă ale grafului.

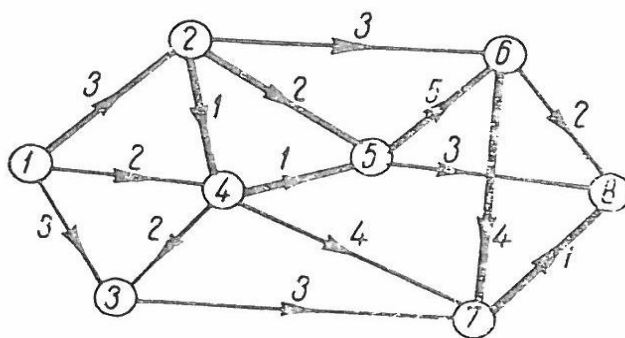


Fig. Nr. 8.10

Se scrie matricea B folosind relațiile (8.17) .

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 1 & 2 & 3 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 3 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 2 & 0 & 1 & -\infty & 4 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & -\infty & 3 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 4 & 2 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix}$$

Se calculează B^2 utilizând relațiile (8.16) și se va scrie tabelar în tabelul nr. 8.8.

Tabelul nr. 8.8. Matricea B^2 .

0	3	<u>4</u>	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>5, 6</u>	$-\infty$
$-\infty$	0	<u>4</u>	1	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>6</u>
		<u>3</u>		<u>2, 2</u>	<u>7</u>	<u>7</u>	<u>5</u>

$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	3	<u>7</u> <u>4</u>
$-\infty$	$-\infty$	2	0	1	<u>5</u> <u>6</u>	<u>3</u> <u>5</u>	<u>7</u> <u>5</u>
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	5	$-\infty$	<u>6</u> <u>7</u>
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	4	<u>7</u> <u>5</u>
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	1
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

În matricea B^2 din tabelul nr.8.8. , $b^{(2)}_{13} = 4$ în loc de $b_{13} = 3$ din matricea B și s-a subliniat valoarea 4, iar deasupra s-a scris **4** , s-a obținut cu relațiile (8.16) prin înmulțirea liniei 1 din B cu coloana 3 a lui B , deoarece:

$$b^{(2)}_{13} = 4 = \max(0 + 3, 3 - \infty, 3 + 0, \underline{2 + 2}, -\infty - \infty, -\infty - \infty, -\infty - \infty, -\infty - \infty),$$

$$4 = 2 + 2 = b_{14} + b_{43},$$

deci x_4 îl precede pe x_3 în drumul de la x_1 la x_3 , d_{13} ,

$$d_{13} = [x_1, x_4, x_3]$$

Pe linia 2 în matricea B , $b_{23} = -\infty$, deci nu există arc de la x_2 la x_3 , iar în matricea B^2 , $b^{(2)}_{23} = \underline{3}$

și s-a subliniat valoarea 3 și deasupra s-a scris numărul **4**, deoarece drumul de valoare maximă 3 de la x_2 la x_3 , trece prin x_4 .

Drumul $d_{23} = [x_2, x_4, x_3]$ trece prin x_4 . Valoarea $b^{(2)}_{23} = \underline{3}$ s-a obținut cu relațiile (8.16) prin înmulțirea liniei 2 din B cu coloana 3 a lui B , astfel:

$$b^{(2)}_{23} = \underline{3} = \max(-\infty + 3, 0 - \infty, -\infty + 0, \underline{1 + 2}, 2 - \infty, 3 - \infty, -\infty - \infty, -\infty - \infty).$$

$b_{24} = 1$, $b_{43} = 2$, deci drumul trece prin x_4 .

În matricea B^2 , $b^{(2)}_{32} = -\infty$, deci nu există nici arc, nici drum de lungime doi (format din două arce), de la vârful x_3 la x_2 .

Analog se calculează cu relațiile (8.16) matricea B^3 , reprezentând drumuri de valoare maximă și de lungime trei (formate din trei arce), care au originea în vârful dat de linia matricii și cu extremitatea vârful dat de coloana în care se găsește valoarea determinată.

$$B^3 = B^2 \otimes B$$

Tabelul nr. 8.9. Matricea B^3 .

0	3	<u>2, 4</u> <u>6</u>	<u>2</u> <u>4</u>	<u>2; 2, 4</u> <u>5</u>	<u>2, 5</u> <u>10</u>	<u>2, 6</u> <u>10</u>	<u>2, 6; 2, 5</u> <u>8</u>
$-\infty$	0	<u>4</u> <u>3</u>	1	<u>4</u> <u>2, 2</u>	<u>5; 4, 5</u> <u>7</u>	<u>6</u> <u>7</u>	<u>5; 6</u> <u>9</u>
$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	3	<u>7</u> <u>4</u>
$-\infty$	$-\infty$	2	0	1	<u>5</u> <u>6</u>	<u>5, 6</u> <u>10</u>	<u>5, 6</u> <u>8</u>
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	5	<u>6</u> <u>9</u>	<u>6, 7</u> <u>10</u>
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	4	<u>7</u> <u>5</u>
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	1
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

Analog se calculează cu relațiile (8.16) matricea B^4 , reprezentând drumuri de valoare maximă și de lungime patru (formate din patru arce), care au originea în vârful dat de linia matricii și cu extremitatea vârful dat de coloana în care se găsește valoarea determinată.

$$B^4 = B^2 \otimes B^2 \quad \text{etc.}$$

MATEMATICA APLICATĂ ÎN MANAGEMENTUL COMPETITIVITĂȚII – C14-2019

SERII DE TIMP ÎN PREVIZIUNILE DIN FIRME

Cunoașterea relativă a viitorului reprezintă o modalitate cu care organizația (firma) încearcă să se pregătească pentru a înfrunța neprevăzutul. Prevederea este o funcție a managementului, enunțată de H. Fayol la începutul secolului XX, ea inițiază procesul de management, stabilește obiectivele, ce trebuie făcut pentru atingerea lor și pregătește organizarea. Metodele de previziune se bazează pe ipoteza că procesele analizate își mențin în viitor caracteristicile esențiale din trecut.

Intervalul de timp pentru care se face previziunea se numește orizont de previziune.

În funcție de orizontul de previziune, previziunile se clasifică în trei categorii: previziuni pe termen scurt, previziuni pe termen mediu și previziuni pe termen lung, dar aceste noțiuni sunt relative și nu se referă în general la intervale de timp fixate, depind de natura procesului pentru care se face previziunea.

Din punct de vedere al complexității și al nivelului de precizie asigurat de metode, există categoriile de metode de previziune:

1. Metode calitative;
2. Metode cantitative, care cuprind:
 - 2.1. Metode simple de extrapolare a tendințelor trecute: metoda grafică, metoda sporului mediu, metoda mediilor mobile;
 - 2.2. Metode de extrapolare bazate pe serii temporale;
 - 2.3. Metode de previziune bazate pe analiza regresiei și corelației;
 - 2.4. Metoda lanțurilor Markov.

Numele de “metode calitative” nu se referă la performanțele acestora, ci la faptul că nu operează cu date cantitative, doar folosesc raționamentele și părerile unor experți pentru a prezice evenimentele viitoare. Metodele calitative cuprind: metoda scenariilor, metoda folosirii opiniei experților, metoda Delphi, metoda sondajelor, utilizându-se când nu se dispune de suficiente date pentru o analiză cantitativă a obiectului previziunii. Categoriile de metode 1 și 2.1 se utilizează în previziuni pe termen scurt, iar 2.2, 2.3 și 2.4 și pentru previziuni pe termen mediu și lung.

Etapele previziunii:

- stabilirea obiectului previziunii;
- stabilirea orizontului și ariei previziunii;
- stabilirea datelor necesare previziunii, a metodelor de previziune și realizarea previziunii;
- selectarea variantei care este cea mai probabilă din mulțimea de alternative viitoare;
- reactualizarea periodică pe baza noilor elemente care pot să apară după obținerea variantelor de previziune.

O succesiune de valori observate în firma (organizație) la diferite momente de timp ale unei variabile de interes se numește **serie de timp (serie temporală, serie cronologică)**. Valorile observate ale variabilei cercetate sunt în general aranjate în ordinea crescătoare a momentelor de observare, adică în ordine cronologică. Se presupune că se dispune de o succesiune de valori observate ale unei variabile Y , de exemplu volumul vânzărilor unei firme,

la diferite momente de timp $t_1, t_2, \dots, t_n$, deci de o serie temporală asociată variabilei Y . În problemele din practică se consideră intervale de timp egale între două observări consecutive ale valorilor variabilei de interes, deci momentele sunt: 1, 2, ..., n . Unei serii temporale $y_1, y_2, \dots, y_n$ i se asociază o diagramă reprezentată în plan, fiecare termen al seriei date fiind identificat cu un punct de coordonate (t_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, unde de fapt $t_i = 1, 2, \dots, n$. Pentru a evidenția evoluția în timp a valorilor variabilei cercetate Y , punctele de coordonate (t, y_i) , $(t+1, y_{i+1})$ corespunzătoare la doi termeni consecutivi ai seriei, se unesc printr-un segment de dreaptă, obținându-se un grafic în forma unei linii frânte, iar acest grafic este numit “cronogramă” asociată seriei temporale date.

Pentru a defini o serie temporală se consideră elementele :

- valorile observate ale unei variabile Y date ;
- intervalele de timp între două înregistrări consecutive, deci pasul înregistrării, care poate fi : un minut, o oră, o zi, o lună, un an etc.
- numărul total de termeni din seria considerată sau intervalul de timp dintre prima și ultima înregistrare.

Studiul unei serii temporale urmărește identificarea componentelor corespunzătoare diferiților factori, care determină o alură specifică cronogramei asociate seriei respective.

Se consideră că o serie temporală are patru categorii de componente: trendul (tendința), fluctuații ciclice, fluctuații sezoniere, fluctuații neregulate.

Trendul, notat cu T , reflectă aspectul general al evoluției seriei temporale, deci se pune în evidență tendința de creștere sau de descreștere a valorilor variabilei analizate. În reprezentarea grafică a seriei temporale, trendul apare ca o curbă netedă care trece printre punctele diagramei asociate seriei date, iar această curbă poate fi stabilită empiric sau analitic.

Fluctuațiile (variațiile) ciclice, notate cu C , sunt oscilații periodice în jurul trendului cu o periodicitate relativ mare.

Fluctuațiile (variațiile) sezoniere, notate cu S , sunt tot oscilații periodice, dar se deosebesc de fluctuațiile ciclice prin faptul că acestea se repetă la intervale mai scurte de timp. Factorii care determină fluctuațiile sezoniere pot fi : succesiunea ciclică a anotimpurilor, a lunilor, a sărbătorilor sau a zilelor.

Fluctuațiile (variațiile reziduale, aleatoare) neregulate, notate cu N , sunt variații în datele unei serii temporale care apar la intervale scurte de timp, în mod neregulat, fără a respecta o regulă.

Prin analiza unei serii temporale se înțelege determinarea tuturor sau a unora dintre componentele sale cu scopul de a le utiliza pentru previziuni.

Dacă amplitudinea fluctuațiilor în jurul trendului este cu atât mai mare cu cât trendul are valori mai mari, se spune că succesiunea datelor din seria temporală considerată este de tip multiplicativ și se notează:

$$A = T \cdot C \cdot S \cdot N,$$

unde A sau y_i reprezintă valorile observate la un moment dat, care este egală cu produsul componentelor sale. Pentru seriile temporale există de asemenea modele aditive, notate simbolic:

$$A = T + C + S + N$$

și modele mixte.

Prin ajustarea unei serii temporale se înțelege înlocuirea valorilor observate ale variabilei studiate cu alte valori, noile valori fiind calculate prin metode euristice sau prin metode analitice. Se obține astfel o serie de valori calculate ale seriei temporale care înlocuiesc seria empirică. Ajustarea analitică a seriei temporale se face pe baza unor funcții matematice alese în așa fel încât să descrie cel mai bine evoluția fenomenului. În ajustare sunt luați în considerare toți

termenii seriei temporale și metoda cea mai folosită este metoda celor mai mici pătrate. Valorile seriei temporale se notează cu y , iar cele calculate prin ajustare cu Y .

Fiecărei metode de ajustare îi corespunde o metodă de previziune care utilizează informațiile obținute prin aplicarea metodei de ajustare folosite.

Principala componentă a unei serii temporale foarte importantă în previziuni este trendul.

Trebuie aleasă o funcție matematică corespunzătoare curbei empirice și să i se estimeze parametrii pe baza datelor seriei temporale. Cele mai des utilizate sunt clasele de funcții: funcția liniară, polinoame, funcții exponențiale, funcții logistice. Se vor prezenta modelele acestor funcții.

1. Modelul liniar de trend: $Y = a + b.t$,
a și b sunt parametri ce trebuie determinați.
2. Modelul funcției de gradul doi (parabolă) de trend: $Y = a + b.t + c.t^2$,
a, b și c sunt parametri ce trebuie determinați.
3. Modelul polinomial de trend: $Y = a_0 + a_1 . t + a_2 . t^2 + \dots + a_p . t^p$,
 $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$, iar $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ sunt parametri ce trebuie determinați.
4. Modelul exponențial de trend: $Y = a . b^t$
a și b sunt parametri ce trebuie determinați.
5. Modelul exponențial modificat de trend: $Y = k + a . b^t$,
a, b și k sunt parametri ce trebuie determinați.
6. Modelul funcției semilogaritmice de trend: $Y = a + b . \lg t$,
a și b sunt parametri ce trebuie determinați.
7. Modelul funcției logistice de trend:

$$Y = \frac{k}{1 + a.b^t},$$

a, b și k sunt parametri ce trebuie determinați, $b \in (0, 1)$.
Se pot utiliza și alte forme ale funcției logistice, cum ar fi:

$$Y = \frac{k}{1 + b.e^{-a.t}}$$

8. Modelul funcției lui Gompertz de trend:

$$Y = k.a^{b^t},$$

a, b și k sunt parametri ce trebuie determinați, $b \in (0, 1)$.

Etape în aplicarea unei metode analitice de ajustare a trendului

1. Constituirea unei serii temporale cu un număr suficient de mare de termeni pentru ca rezultatele observațiilor să intre sub incidența legii numerelor mari.
2. Reprezentarea grafică a seriei temporale.
3. Se analizează cronograma seriei și se fac câteva prelucrări simple ale datelor, apoi se alege tipul de funcție care corespunde cel mai bine procesului studiat. Pentru a se alege tipul de curbă de ajustare trebuie să se facă mai întâi o ajustare grafică ca să se evidențieze caracterul tendinței. Dacă tendința este neliniară, este indicat să se utilizeze scara semilogaritmă, deci $z = \lg y$ se reprezintă grafic, sau logaritmică, deci $z = \lg y$ și $u = \lg t$ și se reprezintă grafic $z = f(u)$.
4. Se estimează parametrii funcției alese și se calculează valorile ajustate ale seriei.
5. Se face analiza cantitativă și calitativă a rezultatelor obținute pentru a evalua alegerea tipului de trend.

Ajustarea analitică a trendului liniar

Se consideră seria temporală $y_1, y_2, \dots, y_n$ care reprezintă valorile observate ale unei variabile Y , de exemplu volumul vânzărilor unei firme și se apreciază că trendul său poate fi ajustat printr-o funcție liniară:

$$Y = f(t) = a + b \cdot t$$

Estimarea parametrilor a și b se face cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate, astfel încât suma pătratelor abaterii datelor din seria temporală față de datele calculate pe baza ecuației de trend alese să fie minimă.

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b \cdot t_i)^2 = \text{minim},$$

Se vor egala cu zero derivatele parțiale ale lui S în raport cu a și b .

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

Se obține sistemul de două ecuații cu necunoscutele a și b :

$$n \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^n t_i + b \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i \cdot y_i$$

Se rezolvă sistemul și se obține

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2} \quad (1)$$

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2}$$

Exemplu – Previziune - Ajustarea analitică a trendului liniar al energiei electrice

Se consideră seria temporală $y_1, y_2, \dots, y_n$ care reprezintă valorile observate ale unei variabile Y , (volumul producției de energie electrică), unei firme și se apreciază că trendul său poate fi ajustat printr-o funcție liniară:

$$Y = f(t) = a + b \cdot t$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2}$$

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2}$$

Previzionarea cantitatii de energie electrica in anul viitor (2011)

❖ Cu „t” vom nota anul:

$$t_1 = 1 \text{ (2008)}$$

$$t_2 = 2 \text{ (2009)}$$

$$t_3 = 3 \text{ (2010)}$$

Cu „y_i” vom nota cantitățile de energie electrică pe an și vom avea:

$$y_1 = 4865 \text{ GWh / 2008}$$

$$y_2 = 5120 \text{ GWh / 2009}$$

$$y_3 = 5241 \text{ GWh / 2010}$$

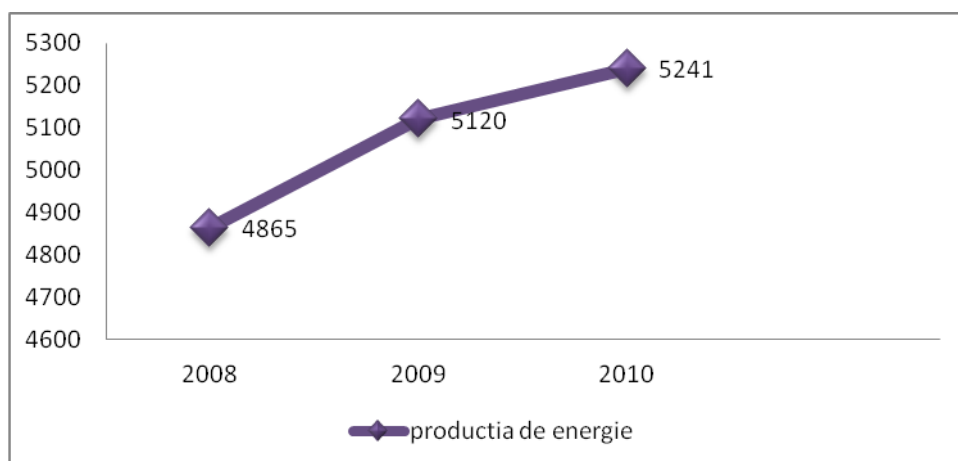


Fig.1.Cantitățile de energie electrică produse în ultimii 3 ani

Toate aceste cantități sunt calculate pe ultimii 3 ani și se dorește să se prevadă care va fi cantitatea produsă în 2011:

$$\sum_{i=1}^3 t_i = 1+2+3 = 6$$

$$\sum_{i=1}^3 t_i^2 = 1+4+9=14$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i = 4865+5120+5241 = 15226 \text{ GWh/3 ani}$$

$$\sum_{i=1}^3 t_i \cdot y_i = 1 * 4865 + 2 * 5120 + 3 * 5241 = 30828 \text{ GWh}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^3 t_i^2 \cdot \sum_{i=1}^3 y_i - \sum_{i=1}^3 t_i \cdot \sum_{i=1}^3 t_i \cdot y_i}{3 \cdot \sum_{i=1}^3 t_i^2 - (\sum_{i=1}^3 t_i)^2} = \frac{14 \cdot 15226 - 6 \cdot 30828}{3 \cdot 14 - 36} = 4699.33$$

$$a = 4699.33$$

$$b = \frac{3 \cdot \sum_{i=1}^3 t_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^3 t_i \cdot \sum_{i=1}^3 y_i}{3 \cdot \sum_{i=1}^3 t_i^2 - (\sum_{i=1}^3 t_i)^2} = \frac{3 \cdot 30828 - 6 \cdot 15226}{3 \cdot 14 - 36} = 188$$

$$b = 188$$

$$Y = f(t) = a + b \cdot t$$

$$Y = 4699.33 + 188 \cdot t$$

Pentru $t = 4 \Rightarrow Y_4$ este valoare previzionată pentru cantitățile de energie electrică pe 2011 la Hidrocentrala analizată.

$$Y = a + b \cdot t$$

$$Y = 4699.33 + 188 \cdot 4 = 4699.33 + 752 = 5451.33$$

$$Y = 5451.33 \text{ GWh/2011}$$

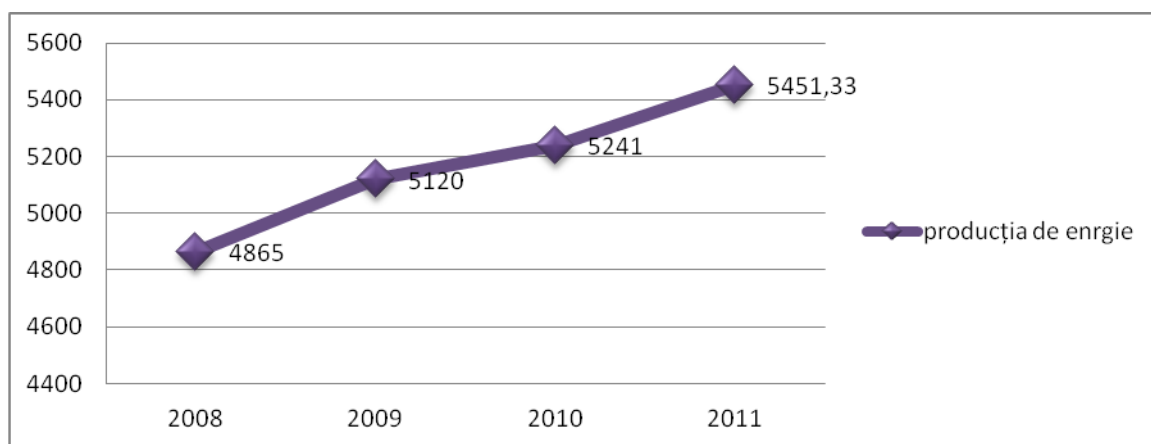


Fig. 2 Cantitățile de energie produsă și previziunea pe anul 2011

Ajustarea seriei temporale cu ajutorul exponențialei

Se logaritmează:

$$Y = a \cdot b^t,$$

$$\lg Y = \lg a + t \cdot \lg b$$

Se notează: $Z = \lg Y$, $A = \lg a$, $B = \lg b$,

Și se obține: $Z = A + B \cdot t$

Se aplică formulele (1) de la funcția liniară, rezultând:

$$A = \lg a = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot z_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n \lg y_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot \lg y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2} \quad (2)$$

$$a = 10^A$$

$$B = \lg b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot z_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n z_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot \lg y_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n \lg y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2}$$

$$b = 10^B$$

Exemplu - Previziunea cu ajutorul exponențialei

Se consideră seria temporală $y_1, y_2, \dots, y_n$ care reprezintă valorile observate ale unei variabile Y , volumul vânzărilor unei firme și se apreciază că trendul sau poate fi ajustat printr-o funcție exponențială:

$$Y = a \cdot b^t$$

Calculăm ajustarea seriei temporale cu ajutorul exponențialei pentru **profitul** pe anul viitor (2015).

Cu „ t ” vom nota **anii** astfel:

$$t_1 = 1 \quad (2012)$$

$$t_2 = 2 \quad (2013)$$

$$t_3 = 3 \quad (2014)$$

Cu „ y ” vom nota **profitul** pe anii considerați:

$$y_1 = 15\,477\,634 \quad \text{LEI; } (2012)$$

$$y_2 = 12\,805\,477 \quad \text{LEI; } (2013)$$

$$y_3 = 15\,812\,439 \quad \text{LEI; } (2014)$$

Toate aceste sume reprezintă **profitul** pe anii 2012, 2013, 2014 și se dorește să se prevadă **profitul** pe anul viitor (2015).

$$\sum t_i = 1+2+3 = 6$$

$$\sum t_i^2 = 1+4+9 = 14$$

$$\sum y_i = 15\,477\,634 + 12\,805\,477 + 15\,812\,439 = 44\,095\,550$$

$$z_1 = \lg y_1 = 7,18$$

$$z_2 = \lg y_2 = 7,10$$

$$z_3 = \lg y_3 = 7,19$$

$$\sum z_i = \sum \lg y_i = 21,47$$

$$A = \lg a = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot z_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n \lg y_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot \lg y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2}$$

$$\begin{aligned} A &= (14 * 21,47 - 6 * (1 * 7,18 + 2 * 7,10 + 3 * 7,19)) / (3 * 14 - 36) = \\ &= (300,58 - 6 * 42,95) / 6 = \\ &= (300,58 - 257,7) / 6 = 7,14 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$a = 10^{7,14}$$

$$\mathbf{a = 13\,803\,842}$$

$$B = \lg b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot z_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n z_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot \lg y_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n \lg y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2}$$

$$\begin{aligned} B &= (3 * 42,95 - 6 * 21,47) / (3 * 14 - 36) = \\ &= (128,85 - 128,82) / 6 = 0,03 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$b = 10^{0,03}$$

$$\mathbf{b = 1,07}$$

$$Y = a * b^t$$

$$Y = 13\,803\,842 * 1,07^t$$

Pentru $t = 4 \Rightarrow y_4$ este valoarea previzionată pentru anul 2015.

$$Y = 13\,803\,842 * 1,07^4$$

$$Y = 13\,803\,842 * 1,31$$

$$\mathbf{Y = 18\,083\,033,02\,LEI}$$

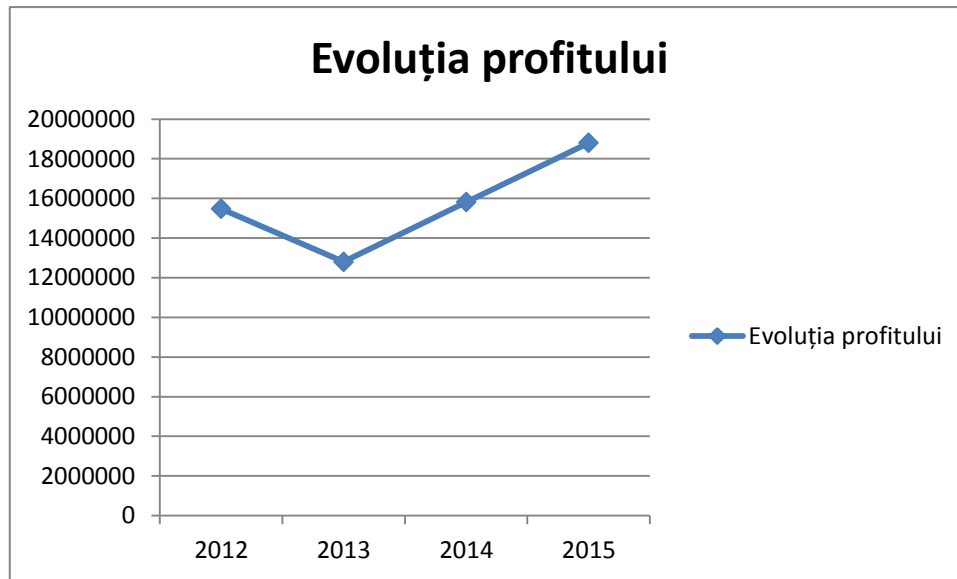


Fig. 3. Evoluția și previziunea profitului cu ajutorul exponențialei

Ajustarea seriei temporale cu ajutorul exponențialei modificate

Exponențiala modificată descrie o tendință potrivit căreia cantitatea creșterii scade cu o rată procentuală constantă, dar în același timp curba se apropie de o limită superioară (asimptotă).

$$Y = k + a \cdot b^t$$

Se notează :

$$S_1 = \sum_{i=1}^n y_i, S_2 = \sum_{i=n+1}^{2n} y_i, S_3 = \sum_{i=2n+1}^{3n} y_i$$

n – este numărul de ani în fiecare din cele trei totaluri parțiale notate respectiv cu S_1 , S_2 , S_3 . Se determină b , a și în final k utilizând relațiile (3):

$$\begin{aligned} b^n &= \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} \\ a &= (S_2 - S_1) \cdot \frac{b^n - 1}{b^n - 1} \\ k &= \frac{1}{n} \cdot \left(S_1 - a \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1} \right) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{S_1 \cdot S_3 - S_2^2}{S_1 + S_3 - 2 \cdot S_2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Ajustarea seriei temporale cu ajutorul curbei Gompertz

Funcția Gompertz se utilizează în previziuni ale vânzărilor cumulate pe produse. Curba Gompertz descrie o tendință în care sporurile (incrementele) creșterii logaritmulor scad cu o rată constantă.

Funcția lui Gompertz este

$$Y = k \cdot a^{b^t},$$

iar a , b și k sunt parametri ce trebuie determinați, $b \in (0, 1)$.

Se logaritmează și rezultă:

$$\lg Y = \lg k + (\lg a) \cdot b^t$$

Se notează: $Z = \lg Y$, $A = \lg a$, $K = \lg k$ și rezultă:

$$Z = K + A \cdot b^t$$

Se aplică formulele de la exponențiala modificată, relațiile (3)

$$S_1 = \sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n \lg y_i$$

$$S_2 = \sum_{i=n+1}^{2n} z_i = \sum_{i=n+1}^{2n} \lg y_i$$

$$S_3 = \sum_{i=2n+1}^{3n} z_i = \sum_{i=2n+1}^{3n} \lg y_i$$

$$b^n = \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1},$$

rezultă: $b = \sqrt[n]{\frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}}$

$$A = \lg a = (S_2 - S_1) \cdot \frac{b - 1}{b^n - 1} \quad (4)$$

rezultă: $a = 10^A$

$$K = \lg k = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{S_1 \cdot S_3 - S_2^2}{S_1 + S_3 - 2 \cdot S_2} \right)$$

rezultă: $k = 10^K$

Formula lui Gompertz se utilizează demografie, biometrie, economie, marketing.

Ajustarea seriei temporale cu ajutorul funcției logistice

Funcția logistică a fost descoperită de matematicianul belgian P. F. Verhulst în 1838 și redescoperită de biologii americani R. Pearl și L. J. Reed în 1920, fiind cunoscută și sub denumirea de funcția Pearl – Reed. Funcția logistică se utilizează în previziuni din demografie, economie, marketing, ecologie.

Se consideră una dintre variantele funcției logistice :

$$Y = \frac{k}{1 + e^{a+b \cdot t}} = f(t)$$

Pentru determinarea parametrilor a, b, k se aleg 3 puncte (perioade) echidistante t_0, t_1, t_2 , astfel încât :

$$t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = n,$$

iar n este lungimea unei perioade, exprimată de obicei în ani.

Se rezolvă sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} y_0 &= f(t_0) = \frac{k}{1 + e^a} \\ y_1 &= f(t_1) = \frac{k}{1 + e^{a+b \cdot n}} \\ y_2 &= f(t_2) = \frac{k}{1 + e^{a+2 \cdot b \cdot n}}, \end{aligned}$$

Rezultă:

$$k = \frac{2 \cdot y_0 \cdot y_1 \cdot y_2 - y_1^2 \cdot (y_0 + y_2)}{y_0 \cdot y_2 - y_1^2} \quad (5)$$

$$a = \ln \frac{2 \cdot y_0 \cdot y_1 \cdot (y_1 - y_2) + y_2 \cdot (y_0^2 + y_1^2)}{y_0 \cdot (y_1^2 - y_0 \cdot y_2)}$$

$$b = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{y_0 (y_2 - y_1)}{y_2 \cdot (y_1 - y_0)}$$

Criterii de alegere a funcției matematice asociate unei serii de timp

Pentru a se alege tipul de curbă de ajustare trebuie să se facă mai întâi o ajustare grafică ca să se evidențieze caracterul tendinței. Dacă tendința este neliniară, este indicat să se utilizeze scara semilogaritmică, deci $z = \lg y$ se reprezintă grafic, sau logaritmică, deci $z = \lg y$ și $u = \lg t$ și se reprezintă grafic $z = f(u)$.

1. Dacă primele diferențe (Δ^1) au tendința de a fi constante, se recomandă funcția liniară (dreaptă):

$$\Delta^1 y_i = y_i - y_{i-1} = \text{constant}, i = 2, 3, \dots, n,$$

atunci: $Y = a + b \cdot t$

2. Dacă diferențele de ordinul doi (Δ^2) au tendința de a fi constante, se folosește un polinom de gradul doi (parabola):

$$\Delta^2 y_i = \Delta^1 y_i - \Delta^1 y_{i-1} = \text{constant}, i = 3, 4, \dots, n,$$

atunci: $Y = a + b \cdot t + c \cdot t^2$.

3. Dacă diferențele de ordinul p , $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$, $\Delta^p y_i$, sunt constante, atunci se utilizează un polinom de gradul p :

$$Y = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_p \cdot t^p$$

4. Dacă diferențele de ordinul 1, Δ^1 , formează o progresie geometrică

$$\Delta^1 y_i = y_i - y_{i-1} = \text{progresie geometrică}, i = 2, 3, \dots, n,$$

atunci se utilizează exponențiala modificată,

$$Y = k + a \cdot b^t$$

5. Dacă tendința aproximată reprezentată pe o rețea semilogaritmică este o dreaptă, se folosește exponențiala.

Deci, $y = a \cdot b^t$

se logaritmează :

$$z = \lg y = \lg a + t \cdot \lg b$$

și dacă diferențele de ordinul 1 pe o scară semilogaritmică sunt constante, se folosește exponențiala,

$$\Delta^1 z_i = z_i - z_{i-1} = \Delta^1 \lg y_i = \lg y_i - \lg y_{i-1} = \text{constant}, i = 2, 3, \dots, n,$$

atunci:

$$Y = a \cdot b^t$$

Scara semilogaritmică utilizează axa ordonatelor ca scară logaritmică, deci se substituie funcția $z = \lg y$ funcției y , iar axa absciselor este gradată aritmetic.

6. Dacă tendința aproximată, reprezentată pe o scară semilogaritmică, deci $z = \lg y$ se reprezintă grafic, seamănă cu o exponențială modificată, se va utiliza curba Gompertz.

Pe calculatoare IBM PC se pot utiliza programele: QSB, modulul Time series forecasting, pentru o parte din funcțiile analizate, DSSPOM sau alte programe.

Metodele de previziune analizate se pot integra în planificarea producției firmei într-un sistem informatic în una din abordările următoare:

- MRP I (Material Requirements Planning) – planificarea necesarului de materiale;
- MRP II (Manufacturing Resource Planning) planificarea resurselor fabricației;
- ERP (Enterprise Resource Planning) planificarea resurselor întreprinderii;
- EERP (Extension Enterprise Resource Planning) planificarea resurselor întreprinderii extinse, numit și ERP II.

UTILIZAREA LANȚURILOR MARKOV ÎN PREVIZIUNI

O mulțime de variabile aleatoare $\{X_t, t \in T\}$, unde $T \subset \mathbb{R}$ se numește proces stochastic. Dacă mulțimea T este finită sau numărabilă atunci procesul se numește lanț.

Lanțul $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ se numește lanț Markov de ordinul I discret și omogen, dacă fiecare din variabilele X_n ia aceeași mulțime S discretă de valori (finită sau numărabilă), valori care corespund stării procesului, astfel încât:

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i_1, X_{n-2} = i_2, \dots, X_{n-k} = i_k) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) = p_{ij},$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, oricare ar fi stările $i, j \in S$, p_{ij} este probabilitatea de trecere directă de la starea i la starea j , într-un pas. Se va considera că mulțimea stărilor lanțului este finită, deci :

$$S = \{1, 2, \dots, m\}$$

Se notează : $P = (p_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, m$; matricea probabilităților de trecere într-un singur pas dintr-o stare în alta,

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Matricea P este stochastică.

$$\text{Se notează : } P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)}), i, j = 1, 2, \dots, m ; n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

$p_{ij}^{(n)}$ – probabilitatea ca lanțul Markov să treacă din stare i în starea j în n pași și :

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, \text{ pentru } i = j \\ 0, \text{ pentru } i \neq j \end{cases}$$

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(n)} \cdot p_{jk}^{(1)} \text{ pentru } i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

La modul general relația de mai sus se generalizează prin următoarea relație:

$$p_{ij}^{(n+r)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(n)} \cdot p_{jk}^{(r)}, i, j = 1, 2, \dots, m ; n, r \in \mathbb{N}^*, \quad (4)$$

și sunt cunoscute sub numele de ecuațiile Chapman–Kolmogorov.

Matricile $P^{(n)}$ și P^n , $n \in \mathbb{N}^*$ verifică relația următoare:

$$P^{(n)} = P^n. \quad (5)$$

UTILIZAREA LANȚURILOR MARKOV ÎN PREVIZIUNEA VÂNZĂRILOR

În modelele markoviene de ordinul 1 se presupune că alegerea produsului (mărcii) într-o perioadă dată se face exclusiv în funcție de marca achiziționată în perioada precedentă, iar în modelele markoviene de ordin superior, de exemplu k , alegerea este făcută în funcție de mărcile achiziționate într-un număr dat de perioade anterioare ($k < n$, $k, n \in \mathbb{N}$, n = numărul perioadelor).

Modelarea evoluției ponderii pe piață a unor produse (mărci) concurențiale, $P_1, P_2, \dots, P_{m-1}, P_m$, din care $m-1$ sunt produse (mărci) concurente pe piață, iar P_m reprezintă un produs fictiv care poate fi considerat ca fiind cumpărat, achiziționat, atunci când consumatorii nu cumpără nici un produs, deci nici unul din cele $m-1$ existente pe piață se poate realiza cu lanțuri Markov.

Se notează:

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}), i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} = 1, i = 0, 1, 2, \dots; \quad (6)$$

$a_{ij} \in [0, 1]$, a_{ij} = ponderea pe piață a produsului P_j în momentul i , $i = 0, 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots, m$;

$i = 0$ reprezintă momentul inițial, iar $a_0 = (a_{01}, a_{02}, \dots, a_{0m})$ este vectorul inițial al ponderilor pe piață a celor m produse .

Vectorii a_{i+1} , $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ se calculează cu relația (7) :

$$a_{i+1} = a_i \cdot P \quad (7)$$

$$P = (p_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, m;$$

P = matricea probabilităților de trecere definită în (2), care este cunoscută inițial, inclusiv vectorul a_0 .

p_{ij} = probabilitatea trecerii de la cumpărarea produsului P_i la cumpărarea produsului P_j , deci exprimă o măsură a gradului de atracție a produsului P_j , iar p_{ii} reprezintă probabilitatea ca într-o perioadă oarecare consumatorul să cumpere produsul (marca) P_i în ipoteza că în perioada precedentă a cumpărat tot marca P_i , deci reprezintă o măsură a fidelității consumatorului față de marca P_i .

Gradul de fidelitate reprezintă procentajul de cumpărători care, după ce au cumpărat un produs (marcă), continuă să cumpere aceeași marcă.

Dacă:

1.) $a_{0j} > a_{ij}$, atunci produsul (marca) P_j se află în faza de declin, $i = 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots, m$;

2.) $a_{0j} < a_{ij}$, atunci produsul (marca) P_j se află în faza de creștere, $i = 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots, m$;

3.) $a_{0j} \cong a_{ij}$, atunci produsul (marca) P_j se află în faza de maturitate, $i = 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots, m$;

Se va considera un **exemplu de calcul** pentru $m = 3$ produse reale, pentru care nu s-a luat în considerare produsul fictiv.

Pe piața erbicidelor sunt trei produse: P_1, P_2, P_3 . Cota de participare a fiecărui produs la momentul zero este: $P_1 - 50\%$, $P_2 - 30\%$, $P_3 - 20\%$. Coeficientul de fidelitate de la o lună la alta este constant și anume: 80% din cumpărători rămân fideli produsului P_1 , 60% din numărul cumpărătorilor rămân fideli produsului P_2 și 70% produsului P_3 . Ceilalți cumpărători se reorientează spre celelalte produse, în modul prezentat în tabelul nr.14.1.

Tabelul nr.14.1

Produsul părăsit %	P_1	P_2	P_3
P_1	-	5	15
P_2	20	-	20
P_3	15	15	-

Se obține din tabel și datele problemei matricea probabilităților de trecere P .

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.15 \\ 0.20 & 0.6 & 0.20 \\ 0.15 & 0.15 & 0.7 \end{pmatrix};$$

$$a_0 = (0.5 \quad 0.30 \quad 0.20)$$

Se vor determina ponderile pe piață după trei luni, după care se întocmește siteza privind evoluția pe piață a produselor pentru lunile considerate.

După prima lună, ponderea pe piață a celor trei produse este dată de vectorul a_1 :

$$a_1 = (0.5 \quad 0.30 \quad 0.20) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.15 \\ 0.20 & 0.6 & 0.20 \\ 0.15 & 0.15 & 0.7 \end{pmatrix} = (0.49 \quad 0.235 \quad 0.275)$$

sau exprimat procentual: $P_1 = 49\%$; $P_2 = 23.5\%$; $P_3 = 27.5\%$

După două luni, ponderea pe piață a celor trei produse este dată de vectorul a_2 :

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.235 & 0.275 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.15 \\ 0.20 & 0.6 & 0.20 \\ 0.15 & 0.15 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.480 & 0.206 & 0.313 \end{pmatrix}$$

deci: $P_1 = 48\%$; $P_2 = 20.6\%$; $P_3 = 31.3\%$

După trei luni:

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0.480 & 0.206 & 0.313 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.15 \\ 0.20 & 0.6 & 0.20 \\ 0.15 & 0.15 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.472 & 0.194 & 0.332 \end{pmatrix}$$

$P_1 = 47.2\%$; $P_2 = 19.4\%$; $P_3 = 33.2\%$

Din analiza pe piață a celor trei produse pentru orizontul de timp de trei luni, rezultă că la momentul 0 produsul P_1 se afla în faza de declin , ponderea lui în totalul pieței fiind în continuă scădere (de la 50% la 47.2%). Produsul P_2 este de asemenea în faza de declin , ponderea lui fiind în scădere (de la 30% la 19.4%) , iar produsul P_3 se află în faza de creștere (de la 20% la 33.2%). Pentru produsele P_1 și P_2 trebuie luate măsuri corespunzătoare de relansare.

Se pot întocmi diverse grafice și tabele. Pentru alt orizont de timp sau mai multe produse se calculează în mod analog.

Consecințele deciziilor de marketing depind în mare măsură de comportarea viitoare a factorilor necontrolabili, factori care pot avea o influență favorabilă sau nefavorabilă asupra obiectivelor urmărite de decident, ceea ce face ca o decizie care nu se bazează pe analiza evoluției viitoare a unor astfel de factori să poată conduce la apariția unor consecințe contrare obiectivelor urmărite. Lanțurile Markov reprezintă un instrument util în activitatea de previziune în marketing, dar și în alte domenii de activitate a firmelor.

UTILIZAREA LANTURILOR MARKOV LA PROGRAMAREA REPARATIILOR

Se va considera o linie tehnologică pentru filare, care are două stări posibile : Funcționează(starea 1) și este în reparație din cauza unor defecțiuni (starea 2).Deci, $S = \{1,2\}$.

Matricea posibilităților de trecere într-un singur pas este:

$$p = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad a, b \in [0,1], \quad a + b \neq 0,$$

unde :

$a = p_{12}$ = probabilitatea de defectare a liniei tehnologice, deci de trecere din starea 1 funcționare) în starea 2(nefuncționare,în reparație).

$1-a = p_{11}$ = probabilitatea de bună funcționare, de rămânere în starea 1;

$b = p_{21}$ = probabilitatea de reparare (în timp util) și de repunere în funcțiune a liniei tehnologice , deci de trecere din starea 2 (nefuncționare , reparație) în starea 1 (funcționare);

$1 - b = p_{22}$ = probabilitatea ca linia tehnologică să rămână defectă și în reparație (mai mult decât timpul alocat).

Unui lanț Markov i se poate atașa un graf $G = (S , U)$, unde S este mulțimea stărilor lanțului , iar $U \subset S \times S$, $(i,j) \in U \Leftrightarrow p_{ij} > 0$.

În cazul concret considerat, graf-ul $G = (S , U)$ atașat lanțului Markov este definit de:

$S = \{1,2\}$, $U = \{ (1,1) , (1,2) , (2,1) , (2,2) , \}$ și are desenul din figura următoare :

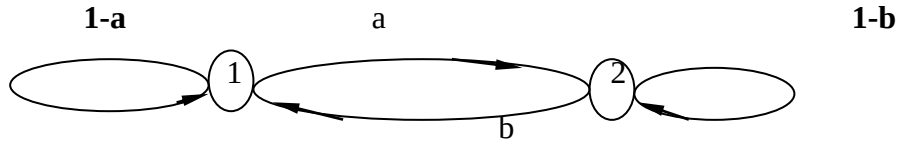


Figura 14. Graful „G”.

Probabilitățile de trecere după n pași sunt date de matricea $P^{(n)}$:

$$P^n = \frac{1}{a+b} \times \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b} \times \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

Deci, probabilitățile corespunzătoare stărilor lanțului Markov sunt :

$$p_{11}^{(n)} = \frac{1}{a+b} \left[b + a(1-a-b)^n \right]$$

$$p_{12}^{(n)} = \frac{a}{a+b} \left[1 - (1-a-b)^n \right]$$

$$p_{21}^{(n)} = \frac{b}{a+b} \left[1 - (1-a-b)^n \right]$$

$$p_{22}^{(n)} = \frac{1}{a+b} \left[a + b(1-a-b)^n \right]$$

Pentru linia tehnologică pentru BD-ul 200RN considerat avem probabilitățile:

$P_{12} = a = 0,1$ (probabilitatea de defectare)

$P_{11} = 1-a = 0,9$ (probabilitate de defectare)

$P_{21} = b = 0,88$ (probabilitatea de reparare și de repunere în funcțiune)

$P_{22} = 1-b = 0,12$ (probabilitatea ca linia tehnologică să rămână defectă și în reparație)

Durata unei stări se consideră egală cu timpul mediu al unei reparații; adică 30 minute. Timpul de lucru pentru linie se consideră $T = 24$ ore (3 schimburi), deci vor fi 48 etape (pași) posibile , $n=1,2,\dots,48$.

Se obține matricea :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,88 & 0,12 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \frac{1}{0,98} \times \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-0,98)^n}{0,98} \times \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

$$M^n = \frac{1}{0,98} \begin{pmatrix} 0,88 & 0,1 \\ 0,88 & 0,1 \end{pmatrix} + \frac{(0,02)^n}{0,98} \begin{pmatrix} 0,1 & -0,1 \\ -0,88 & 0,88 \end{pmatrix}$$

Probabilitățile de trecere în n pași sunt:

$$p_{11}^{(n)} = \frac{1}{0,98} (0,88 + 0,1 \times 0,02^n)$$

$$p_{12}^{(n)} = \frac{0,1}{0,98} - \frac{0,1 \times 0,02^n}{0,98} = \frac{0,1}{0,98} (1 - 0,02^n)$$

$$p_{21}^{(n)} = \frac{0,88}{0,98} - \frac{0,88 \times 0,02^n}{0,98} = \frac{0,88}{0,98} (1 - 0,02^n)$$

$$p_{22}^{(n)} = \frac{0,1}{0,98} + \frac{0,88 \times 0,02^n}{0,98} = \frac{1}{0,98} [0,1 + (0,88 \times 0,02^n)]$$

Programarea reparațiilor se poate face pe baza probabilităților calculate mai sus pentru n pași ai liniei tehnologice, iar $n = 1, 2, \dots, 48$. Se pot calcula probabilităților stărilor și pentru alte orizonturi de timp T.

12. ELEMENTE DE TEORIA STOCURILOR

Resursele disponibile dintr-o firmă, dar care în prezent nu sunt utilizate, formează o rezervă. Aceste rezerve pot fi: bani, materiale, mașini, oameni, iar dacă resursele sunt materiale sau produse finite, rezerva se numește stoc. În problemele de stocuri se pune problema minimizării costurilor stocurilor, iar dacă stocurile influențează cererea de produse ale firmei, obiectivul va fi maximizarea profitului firmei.

Variabilele care pot fi controlate de firmă într-o problemă de stocuri sunt:

- Cantitatea intrată în stoc, prin cumpărare sau din producția proprie, deci trebuie răspuns la întrebarea *cât*? Cantitatea intrată în stoc este limitată de capacitatea de depozitare, de transport și de plată a stocului.
- Frecvența sau momentul aprovizionării, deci trebuie răspuns la întrebarea *când*?
- Gradul de prelucrare a produselor, iar cu cât bunurile păstrate în stoc sunt într-un stadiu mai avansat de finisare, cu atât mai repede pot fi satisfăcute comenzile clienților și cu atât mai mari vor fi cheltuielile de stocare. Pentru a reduce influența factorilor nefavorabili este necesar să existe stocul tampon bine dimensionat.

Principalele tipuri de variabile care apar în problemele de stocuri și care nu pot fi controlate în totalitate, sunt: cheltuielile de stocare, costurile de penurie, cheltuielile datorate variațiilor ritmului de producție, prețul de achiziție sau cheltuielile directe de producție, cererea de produse fabricate de firmă, timpul de livrare, cantitatea livrată.

- Cheltuielile de stocare* cresc proporțional cu mărimea stocului și durata de stocare. Componentele sale sunt:

- costul capitalului investit în stocuri (capital propriu sau împrumutat). Capitalul investit în stocuri este neproductiv. Costul capitalului investit este dat de mărimea

- profitului ce s-ar putea obține dacă acest capital ar fi fost investit în mod productiv sau de dobânda ce trebuie plătită de o bancă unde s-ar fi depus.
- b) Cheltuielile de manipulare a stocurilor, care cuprind costul forței de muncă și a energiei necesare pentru deplasarea stocurilor, a cărucioarelor, macaralelor și a altor utilaje necesare.
 - c) Cheltuieli de înmagazinare reprezintă chiria spațiului de depozitare sau amortizarea în cazul unui spațiu propriu.
 - d) Impozite și asigurări.
 - e) Cheltuieli de depreciere, deteriorare, uzură morală și fizică, iar acestea se referă la produsele la modă sau deteriorarea fizică, efectivă a produselor stocate.
2. Costurile de penurie sunt cheltuieli suplimentare care apar atunci când un material sau un produs este solicitat, este necesar și lipsește din stoc. Aceste cheltuieli apar datorită unor cheltuieli de urgență, suplimentare, cresc cheltuielile de transport, de exemplu prin folosirea avionului în loc de transport auto, cheltuieli de organizare a producției suplimentare prin organizarea unor schimburi suplimentare sau utilizarea unor utilaje de rezervă, penalizări datorită faptului că nu se livrează la timp produsele la clienți sau se pierd comenzi din cauza întârzierilor. Aceste pierderi sunt greu de estimat.
 3. Cheltuieli datorate variațiilor ritmului de producție, cuprind cheltuieli cu angajarea și instruirea personalului suplimentar angajat sau cu concedierea unor salariați., cheltuieli datorate rebuturilor care pot să crească.
 4. Prețul de achiziție sau cheltuielile directe de producție depind de cantitatea achiziționată sau fabricată (pentru producție în serie mare sau de masă sunt mici).
 5. Cererea influențează costurile deoarece unele cereri pot rămâne nesatisfăcute datorită lipsei stocurilor sau întârzierilor în livrare.
 6. Timpul de livrare este timpul între momentul lansării unei comenzi și momentul primirii mărfurilor comandate. Dacă timpul de livrare este cunoscut și diferit de zero, iar cererea este cunoscută, comanda trebuie lansată cu un avans de timp egal cu timpul de livrare. Timpul de livrare poate fi cunoscut, determinist sau o variabilă aleatoare, când problema stocurilor se complică.
 7. Cantitatea livrată poate fi cunoscută, deterministă sau poate fi variabilă aleatoare când problema stocurilor se complică din nou.

Dacă firma are capitalul disponibil insuficient, se pot reduce cheltuielile pe termen scurt prin micșorarea stocurilor.

O altă problemă de stocuri se referă la cât de mare trebuie să fie capitalul lichid al firmei. Dacă capitalul disponibil este prea mare, deci stoc mare de bani, se pierd veniturile ce s-ar fi putut obține prin investirea excesului de capital, deci apar cheltuieli de stocare a capitalului lichid. Dacă capitalul disponibil este prea mic sau blocat în stocuri, apar costuri de penurie datorită necesității de a împrumuta restul de capital cu o anumită dobândă.

Se pune problema optimizării stocurilor în sensul minimizării costurilor gestiunii acestora. Problemele de stocuri pot fi cu cererea cunoscută, deci deterministe și cu cererea aleatoare. Se va analiza cazul stocurilor cu cererea cunoscută, se vor prezenta doar câteva formule.

Se utilizează următoarele notații:

a – cererea constantă pe unitatea de timp, astfel încât produsele sunt scoase din lot în mod continuu;

c – costuri unitare de cumpărare (fabricare);

h – costul de stocare pe unitatea de produs și pe unitatea de timp;

k – costul de lansare a unei comenzi, plătit la începutul fiecărei perioade de timp;

u – costul lipsei de stoc pe unitatea de produs și pe unitatea de timp;

Q – cantitatea cu care se face aprovizionarea (cantitatea produsă) pe o perioadă, această aprovizionare (producere) realizându-se în salturi constante de timp;

S – stocul de produse;

T – perioada de timp între două reîncărcări consecutive ale stocului, reîncărcarea stocului făcându-se de fiecare dată instantaneu;

C – costul total pe o perioadă a aprovizionării (producerii), stocării, lipsei de stoc.

Dacă *nu este permisă lipsa de stoc*, cantitatea cu care trebuie să se facă aprovizionarea (cantitatea fabricată) Q^* într-o perioadă de timp și intervalul de timp T^* la care trebuie să se facă aprovizionarea (fabricarea) sunt date de relațiile (12.1) și (12.2).

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot k}{h}} \quad (12.1)$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{a \cdot h}} \quad (12.2)$$

Cheltuielile minime C^* pe o perioadă sunt date de relația (12.3).

$$C^* = 2 \cdot k + c \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot k}{h}} \quad (12.3)$$

Dacă *este permisă lipsa de stoc*, cantitatea cu care trebuie să se facă aprovizionarea (cantitatea fabricată) Q^* într-o perioadă de timp, stocul maxim la începutul unei perioade (după aprovizionare, respectiv fabricare) și intervalul de timp T^* dintre două aprovizionări (produceri) consecutive sunt date de relațiile (12.4), (12.5) și (12.6), iar cu aceste valori cheltuielile minime pe o perioadă dată sunt date de relația (12.7).

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot k}{h}} \cdot \sqrt{\frac{h+u}{u}} \quad (12.4)$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot k}{h}} \cdot \sqrt{\frac{u}{h+u}} \quad (12.5)$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{a \cdot h}} \cdot \sqrt{\frac{h+u}{u}} \quad (12.6)$$

$$C^* = 2 \cdot k + c \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot k}{h}} \cdot \sqrt{\frac{h+u}{u}} \quad (12.7)$$

Dacă se utilizează metoda " Just in Time", deci " exact la timp" , în aprovizionarea firmei, rezultă un nivel scăzut al stocurilor, aproape zero stocuri.

Exemplul nr. 12.1.

Un produs este fabricat de o firmă și are cererea de 1000 bucăți pe lună, iar produsele sunt solicitate uniform. Costul lansării unei comenzi este de 5000 lei , costul producției este de 10 lei pe bucată, iar costul păstrării inventarului este de 1 leu pe bucată timp de o lună. Se cere :

- Dacă se presupune că lipsa de stoc nu este permisă, să se determine la ce intervale să se fabrice produsul și în ce cantități, astfel încât cheltuielile totale să fie minime.
- Dacă se presupune că lipsa de stoc este permisă, cu uncoeficient de penalizare de 2 lei pe bucată în timp de o lună, să se determine intervalele de fabricație, cantitățile ce trebuie produse și stocul maxim la început de lună, astfel încât cheltuielile totale să fie minime.

a) Este o problemă de stocuri cu cerere deterministă, care nu permite lipsa de stoc.

$a = 1000$ bucăți/lună (cererea constantă pe unitatea de timp – adică pe lună) ,

$c = 10$ lei /bucată, (costuri unitare de cumpărare - fabricare)

$k = 5000$ lei (k – costul de lansare a unei comenzi, plătit la începutul fiecărei perioade de timp);

$h = 1$ bucată/lună (h – costul de stocare pe unitatea de produs și pe unitatea de timp).

Se utilizează relațiile (12.1) și (12.2).

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot k}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 5000}{1}} \approx 3170 \text{ bucăți}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{3170}{1000} = 3.17 \text{ luni} \approx 95 \text{ zile}$$

b) Se mai adaugă la datele de la a) $u = 2$ lei/bucată/lună, (u – costul lipsei de stoc pe unitatea de produs și pe unitatea de timp) se utilizează relațiile (12.4), (12.5), (12.6).

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot k}{h}} \cdot \sqrt{\frac{h+u}{u}} = 3170 \cdot \sqrt{\frac{1+2}{2}} \approx 3867 \text{ bucăți}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot k}{h}} \cdot \sqrt{\frac{u}{h+u}} = 3170 \cdot \sqrt{\frac{2}{1+2}} \approx 2590 \text{ bucăți}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{3170}{1000} \approx 3.9 \text{ luni} \approx 117 \text{ zile}$$