Metode matematice de modelare a fluxurilor materiale – C1
Modelarea şi optimizarea sistemelor de producţie

1.1. Introducere în modelare

Metodele matematice de modelare aparţin cercetării operaţionale. Cercetarea operaţională se utilizează în diverse organizaţii şi sisteme, în managementul acestora. Se consideră că cercetarea operaţională a apărut şi s-a dezvoltat în timpul celui de-al doilea război mondial, dar primele sale rădăcini sunt mult mai vechi. Între cele două războaie mondiale tehnica militară s-a dezvoltat mult mai repede decât tactica şi strategia. În timpul celui de-al doilea război mondial germanii au început atacul aerian asupra Angliei, iar conducătorii militari englezi au cerut ajutorul oamenilor de ştiinţă pentru a se apăra mai bine. Una dintre problemele ce s-au cerut oamenilor de ştiinţă a fost să ajute la o utilizare eficientă a radiolocatoarelor care erau nou apărute. S-au format mici echipe interdisciplinare de cercetători din diverse domenii ale ştiinţei ataşate unui ofiţer care aparţinea de sectorul operaţiilor de luptă. Această experienţă pozitivă a fost preluată şi de ceilalţi aliaţi: SUA, Franţa, Canada. Această activitate a primit denumirea de *cercetare operaţională* (operational research) în Anglia şi diverse alte denumiri în SUA: analiză operaţională (operational analysis), evaluarea operaţiilor (operations evaluation), cercetarea operaţiilor (operations research), ştiinţa conducerii (management science), analiza sistemelor (systems analysis). S-a impus termenul de cercetare operaţională (operational research).

După terminarea războiului, o parte dintre specialiştii în cercetarea operaţională au părăsit armata şi au început să activeze în industrie sau în universităţi. Succesele obţinute prin utilizarea cercetării operaţionale în domeniul militar şi în industrie, precum şi dezvoltarea calculatoarelor, au dus la răspândirea şi dezvoltarea sa în întreaga lume.

S-au dat definiţii cercetării operaţionale, acceptate sau nu, sau există păreri că nu poate fi definită. Se aminteşte totuşi că cercetarea operaţională reprezintă aplicarea metodelor ştiinţifice de către o echipă interdisciplinară la studiul problemelor legate de conducerea sistemelor organizate cu scopul obţinerii unor soluţii care să servească cât mai bine interesele organizaţiei în ansamblu.

Cercetarea operaţională a fost introdusă ca şi disciplină de studiu în tot mai multe universităţi din lume, inclusiv din România, având un rol important în pregătirea managerilor, matematicienilor, informaticienilor, inginerilor economişti, inginerilor, economiştilor, sociologilor.

Prin **organizaţii** se înţeleg diversele entităţi socio-tehnice (firme, instituţii civile, armata, şcoli etc.).

Există multe definiţii ale conceptului de sistem. Definiţia dată de L. A. Zadeh, care consideră că **sistemul** este: "un ansamblu de elemente legate între ele prin forme de interacţiune sau interdependenţă ". **Sistemul** este o reunire de elemente care interacţionează între ele şi care funcţionează în scopul realizării unui obiectiv comun.

Orice sistem are o structură, are: intrări în sistem, ieşiri din sistem, procese care transformă intrările în sistem în ieşiri. Un sistem este format din subsisteme şi aparţine unui sistem mai cuprinzător. Mecanismul transformării intrărilor în ieşiri poate fi descris cu ajutorul funcţiilor de transfer, care au diverse forme, particulare, după natura sistemului. Sistemul devine cibernetic atunci când apare reglarea (conexiunea inversă, feedback-ul), adică o intervenţie asupra intrărilor în scopul menţinerii ieşirilor la nivelul unor parametri-obiectiv doriţi.

Câteva principii ale teoriei sistemelor:

a) orice sistem este alcătuit din elemente sau părţi interdependente, acţionând în comun în virtutea unui scop, a unui obiectiv;

b) ansamblul legăturilor între elementele sistemului, precum şi al legăturilor cu întregul, formează structura sistemului;

c) complexitatea sistemelor depinde mai mult de structura sistemului decât de natura părţilor

sale;
d) două sisteme cu structuri parţial identice se numesc homomorfe, iar sistemul mai simplu va constitui un model al sistemului homomorf mai complex;
e) două sisteme homomorfe vor avea un comportament asemănător, de unde rezultă posibilitatea de studiu a proprietăţilor sistemelor reale prin modelare şi simulare;
f) structura unui sistem, adică structura sa statică, preexistă comportamentului său, deci dinamicii sistemului;
g) mişcările într-un sistem se realizează prin fluxuri presupuse concrete şi continue;
h) într-o unitate economică toate categoriile de mişcări pot fi grupate în următoarele tipuri de fluxuri interconectate:

1) fluxuri materiale;
2) fluxuri de comenzi;
3) fluxuri băneşti;
4) fluxuri umane;
5) fluxuri de echipamente;
6) fluxuri informaţionale;

i) fluxul informaţional are un rol central în funcţionarea sistemelor;
j) procesele decizionale sunt considerate şi ele ca având un rol central în mecanismul sistemelor; ele sunt presupuse a fi discontinue;
k) reglarea este un element caracteristic al funcţionării sistemelor;

Sistemul de producţie este constituit din totalitatea elementelor fizice, naturale şi artificiale, conceptelor (teorii, metode, reguli), experienţei şi îndemânării, astfel organizate încât să rezulte capacitatea de realizare a unor scopuri prestabilite, derivate din obiectivele economico-sociale.

Un sistem de producţie transformă, în principiu, într-o perioadă de timp anumite intrări (forţa de muncă, substanţă, energie, informaţie) în ieşiri de tip produse, servicii, informaţii despre produs sau serviciul realizat, deşeuri. Transformarea este orientată spre realizarea unor obiective de producţie prestabilite de om şi implică procese de muncă specifice, în care oamenii actionează cu ajutorul mijloacelor de muncă (unelte, echipamente, maşini, aparate, recipiente, clădiri etc.) asupra obiectelor muncii (materiale naturale sau obiecte fabricate, energie, informaţie), obţinând ca rezultate dorite produsele (bunuri materiale) sau serviciile (activităţi utile ce satisfac o anumită nevoie socială), iar ca rezultate nedorite deşeurile (resturi ce nu mai pot fi valorificate în cadrul sistemului de producţie care le-a realizat) şi elemente poluante.

Timpul, intrările sistemului de producţie şi mijloacele de muncă, considerate sub aspect potenţial, formează **resursele** sistemului de producţie.

Problemele referitoare la **fluxurile materiale** pot fi încadrate în logistică şi pot fi rezolvate cu metode ale cercetării operaţionale. Fluxul material se referă la circulaţia continuă (pe un anumit orizont de timp) a materialelor, materiei prime, semifabricatelor sau produselor finite în succesiunea operaţiilor tehnologice, de aprovizionare sau de distribuţie. Logistica studiază probleme legate de transportul, livrarea la termenul solicitat cu costuri minime a cantităţii de produse comandate, depozitarea acestora, deci probleme de aprovizionare, transport, distribuţie, aşteptare, stocuri, depozitare, control. Se poate discuta de logistica internă sau logistica producţiei pentru activităţi logistice din interiorul firmei şi logistica externă care se referă la activităţi logistice din exteriorul firmei (logistica aprovizionării şi logistica distribuţiei).

Modelarea şi optimizarea se vor referi la sisteme, subsisteme sau elemente ale acestora.

Prin optim se înţelege cel mai bun sau foarte bun. Optimizarea reprezintă alegerea şi aplicarea soluţiei optime dintre mai multe posibile. Un model de optimizare este normativ sau prescriptiv. El nu ne spune ce se va întâmpla într-o anumită situaţie, ci ne indică ce să facem pentru a obţine cea mai bună situaţie.

Cuvântul model este utilizat în viaţa de zi cu zi, în vorbirea curentă, având mai multe înţelesuri, cum ar fi: modele în modă, modele în artă, modele în ştiinţă şi în tehnică. În domeniul

ştiinţei prin model se înţelege un sistem teoretic sau material cu ajutorul căruia se pot studia indirect proprietăţile şi evoluţia unui sistem mai complex care este considerat sistem original, faţă de care modelul prezintă o anumită analogie.

Un **model** este o reprezentare simplificată sau abstractizată a realităţii. Adesea în practică este dificil a se obţine simultan caracteristici simplificate şi reprezentative ale realităţii studiate. **Modelul** este un sistem teoretic (logico - matematic) sau material cu ajutorul căruia pot fi studiate indirect proprietăţile şi funcţionarea unui alt sistem mai complex (sistemul original), cu care modelul prezintă o anumită analogie. Modelele constituie reprezentări ale realităţii.

Alegerea unor modele şi metode matematice se face funcţie de condiţiile concrete ale firmei , de informaţiile ce se pot colecta şi procesa în timp util, de costul acestora, de puterea concurenţilor, pentru a obţine avantajul concurenţial. Folosirea modelelor matematice, a metodelor de optimizare şi a tehnologiei informaţiei în managementul şi activitatea firmei duc la creşterea eficienţei sale, la avantajul competitiv al costurilor joase şi a calităţii mai bune a produselor oferite pieţei.

Un model este caracterizat de următoarele elemente:

1) este o imagine incompletă a unei realităţi existente sau care urmează să fie construită;

2) trebuie validat prin criteriul practicii în vederea determinării gradului său de utilitate şi a aplicării sale (cu excepţia celor care simulează consecinţele defavorabile);

3) este utilizat în vederea previzionării comportării în diferite situaţii a procesului pe care il simulează.

Se vor prezenta câteva **principii ale modelării matematice a proceselor economice.**

1. Orice model se bazează pe o teorie economică creată în prealabil pentru a explica procesul modelat, iar parametrii cu care operează sunt, de regulă, categorii economice sau laturi ale acestora.

2. Modelele fac abstracţie de o serie de laturi şi particularităţi ale procesului reflectat, menţinându-şi însă rolul cognitiv. Izomorfismul modelelor (identitatea cu realitatea) nu este o condiţie absolut obligatorie pentru ca un obiect sa fie modelul altui obiect.

3. Modelul exprimă similitudinea nu numai a unui proces economic izolat, ci a unei întregi clase de asemenea procese, astfel încât orice model este o generalizare, o sinteză de un anumit grad. Cu cât aria proceselor reprezentate prin model este mai mare, cu atât gradul de generalizare şi de sinteză al acestuia este mai important.

4. Un model nu poate fi construit fără a se apela la un sistem de simboluri, care pot reprezenta categorii economice şi care nu se suprapun peste alfabetul curent sau cifrele utilizate în calcule.

Se vor analiza câteva **clasificări ale modelelor.**

1. După **natura fizică a elementelor modelului**, există trei tipuri fundamentale de modele: *iconice, fizice-analogice şi matematice sau simbolice.*

Un *model iconic* este identic în mic sau în mare cu obiectul pe care îl reprezintă, de exemplu, modelul unui avion sau al unei maşini (redus la scară) sau modelul unui atom (mărit la scară).

Un *model fizico- analogic* înlocuieşte o proprietate cu alta, iar problema este rezolvată în starea substituentă şi apoi soluţia obţinută este raportată la dimensiunile sau proprietăţile originalului.

Modelele matematice sau simbolice sunt modele abstracte şi generale, fiind constituite din relaţii şi funcţii matematice.

2. În funcţie de **probabilitatea ca un element să aparţină sau nu unei mulţimi şi a gradului de apartenenţă a unui element la o mulţime**, modelele matematice sunt: *deterministe, stochastice şi fuzzy (vagi).*

Modelele deterministe sunt caracterizate de variabile şi relaţii sigure, realizabile cu probabilitatea 1, se cunosc exact.

În *modelele stochastice* (probabilistice) unele variabile ce descriu procesul studiat sunt variabile aleatoare, deci variabilele iau anumite valori cu anumite probabilităţi.

Modelele fuzzy (vagi) folosesc matematica fuzzy, având variabile care nu se pot caracteriza nici exact (determinist) şi nici în probabilitate, putându-se face aprecieri calitative asupra valorilor pe care le iau. Se pune problema deosebirii între aleator (stochastic) şi fuzzy (vag). Fenomenul aleator rezultă din nesiguranţa în ceea ce priveşte apartenenţa sau neapartenenţa unui element la o mulţime, existând diferite probabilităţi. În cazul unui fenomen de natură fuzzy (vag) există grade de apartenenţă între apartenenţa şi neapartenenţa unui element la o mulţime şi nu se bazează pe principiul terţiului exclus din logica matematică bivalentă. Fenomenele fuzzy au la bază logica fuzzy care este o logică continuă şi care generalizează logica bivalentă şi logicile n-valente care sunt discrete.

3. După **natura variabilelor,** există modele discrete şi modele continue. Modele se pot clasifica şi în funcţie de **tipul sistemului** pe care îl reprezintă. Într-un model, starea unui sistem poate fi definită de variabilele de stare de natură deterministă sau probabilistă. Variabilele de stare pot descrie un sistem în orice moment al funcţionării sale. În funcţie de modul în care starea sistemelor se poate schimba, sistemele se clasifică în *sisteme continue ş*i *sisteme discrete*, deci există *modele ale sistemelor continue şi modele ale sistemelor discrete*. Un sistem este continuu dacă starea sistemului (variabilele de stare) se modifică continuu în timp, sunt numere reale. Un sistem este discret dacă starea sistemului se modifică la anumite momente discrete de timp, care pot fi puse în corespondenţă cu mulţimea numerelor naturale, care nu sunt în mod necesar egale.

4. În funcţie de importanţa timpului în analiza rezultatelor, *modelele* pot fi *statice* sau *dinamice*

Modelul este considerat *static* dacă, din punct de vedere al analizei, este important numai rezultatul final şi nu modul în care se modifică sistemul în timp. De exemplu, multe modele financiare descriu situaţia financiară a unei organizaţii sau a unei persoane fizice la sfârşitul unei perioade de timp.

Modelul este considerat *dinamic* dacă, din punct de vedere al analizei, este important modul în care se modifică sistemul în timp.

În realitate, toate sistemele sunt dinamice. Cu toate acestea multe probleme nu necesită luarea în considerare a aspectelor dinamice. Prin urmare, dacă o problemă de modelare este dinamică sau statică depinde de întrebările pentru care se aşteaptă un răspuns.

5. După **obiectul cercetării** şi **nivelul de structură**, de grupare a entităţilor studiate, există modele microeconomice şi modele macroeconomice. Deci, după întinderea domeniului studiat, modelele care descriu realitatea economică pot fi:

- modele *macroeconomice* – sunt cele care se referă la economia naţională, la o ramură, o subramură sau la economia unui teritoriu mare: o regiune, un judeţ, o anumită zonă industrială, sau agricolă etc.;
- modele *microeconomice* – sunt la nivel de firmă, de întreprindere, uzină, combinat etc.

Optimizarea reprezintă alegerea şi aplicarea soluţiei optime dintre mai multe posibile.

A optimiza înseamnă a găsi într-o problemă sau o situaţie de decizie situaţia care, dintr-un anumit punct de vedere prestabilit, este cea mai bună dintre toate soluţiile posibile. Pentru a se putea optimiza este necesar ca în problema analizată să existe mai multe soluţii posibile, dintre care se va alege cea mai bună în sensul maximizării (minimizării) unei funcţii ataşate problemei. Prin programare matematică se studiaza problema optimizării (maximizării sau

minimizării) unei funcţii liniare sau neliniare în condiţiile existenţei unor restricţii la care sunt supuse variabilele problemei.

Un model de optimizare este normativ sau prescriptiv. El nu ne spune ce se va întâmpla într-o anumită situaţie, ci ne arată ce să facem pentru a obţine cea mai bună situaţie. Orice model de optimizare are trei componente: *funcţia obiectiv, variabilele problemei (de decizie)* şi *restricţiile.* Funcţia obiectiv defineşte scopul sau obiectivul modelului. Un model de optimizare poate conţine una sau mai multe funcţii obiectiv. Funcţia obiectiv acţionează ca un criteriu în raport cu care se face optimizarea. Variabilele problemei (de decizie) reprezintă mărimile pe care trebuie să le alegem pentru a optimiza funcţia obiectiv. Un model de optimizare are variabile şi poate avea şi parametri. Trebuie să se facă distincţie între variabilele problemei şi parametrii acesteia. Prin parametri unui model de optimizare se înţeleg acele mărimi care definesc modelul ca entitate independentă în realitatea înconjurătoare, obiectivă. Parametri au anumite valori numerice bine precizate şi cunoscute. Variabilele problemei (de decizie) reprezintă necunoscutele modelului care trebuie determinate. Acestea pot încadra modelul în diverse clase de modele după valorile pe care le pot lua. Astfel se cunosc modele cu variabile în numere reale, întregi sau booleene după cum variabilele iau valori în mulţimile corespunzătoare. Restricţiile modelului reprezintă acele relaţii matematice care constrâng alegerea variabilelor problemei (de decizie). De obicei tipul unui model de optimizare este dat de forma restricţiilor şi a funcţiei obiectiv care pot fi: statice sau dinamice, liniare sau neliniare, deterministe sau stocastice etc. Un model de optimizare consideră la intrare aceste trei componente şi generează la ieşire valoarea optimă a variabilelor problemei (de decizie), precum şi valoarea optimă a funcţiei obiectiv.

Optimizarea se poate face, în funcţie de problema concretă de rezolvat, în una din următoarele două variante:

- *Principiul maximizării rezultatelor*, adică realizarea maximă a unui obiectiv în condiţiile utilizării resurselor disponibile, relaţiile (1);

- *Principiul minimizării consumului de resurse*, adică realizarea obiectivului cu utilizarea a minimum de resurse alocate, relaţiile (2).

Matematic, prima variantă se exprimă prin maximizarea funcţiei obiectiv ca in (1), iar a doua variantă prin minimizarea funcţiei obiectiv ca in (2), dar nu se optimizează simultan ambele variante.

După **natura modelului matematic optimizarea** poate fi:

- *optimizare deterministă - se foloseşte când toate elementele modelului matematic sunt certe, sigure, realizabile cu probabilitatea 1;*
- *optimizare stochastică* – se utilizează când modelul matematic cuprinde elemente care iau anumite valori cu anumite probabilităţi, deci cuprinde cel puţin o variabilă aleatoare;

- *optimizare fuzzy* - se foloseşte când modelul matematic are elemente care prezintă diverse grade de apartenenţă la o mulţime, utilizând matematica fuzzy

Modelele matematice sunt constituite dintr-un sistem de relaţii matematice între variabilele sistemului sau procesului modelat, cu sau fără restricţii.

Modelarea şi optimizarea sunt legate de rezolvarea unor *probleme* apărute în organizaţia, în sistemul studiat. Prin *problemă* se înţelege o dificultate, o situaţie dificilă, care nu poate fi depăşită automat şi presupune o cercetare, o rezolvare, ştiinţifică sau empirică.

O problemă are în structura sa trei componente: *baza*, *generatorul* (geneza) şi *soluţia*.

Baza unei probleme se constituie din informaţiile şi cunoştinţele existente relativ la domeniul în care este formulată problema care pot apărea sub diferite formulări în conţinutul problemei, dar nu sunt puse sub semnul întrebării şi nu fac obiectul cercetării. *Generatorul* (geneza) unei probleme cuprinde mulţimea cauzelor care au determinat apariţia problemei, iar

dintre acestea una (sau câteva) este principală, iar altele sunt secundare. *Soluţia* problemei poate exista sau nu, poate lipsi temporar sau definitiv (dacă problema este insolvabilă).

Pentru existenţa unei probleme, sunt necesare câteva condiţii:

- trebuie să existe un individ interesat în rezolvarea problemei în anumite condiţii;
- la dispoziţia individului interesat trebuie să existe cel puţin două posibilităţi, (strategii) de acţiune, dintre care se alege una;
- trebuie să existe cel puţin două rezultate posibile ca urmare a alegerii făcute, iar unul dintre rezultate trebuie să fie preferabil celorlalte şi reprezintă obiectivul ce trebuie atins;
- posibilităţile de acţiune ale individului interesat au şanse diferite de a-şi atinge obiectivul.

Problema există, dacă aceste condiţii sunt satisfăcute şi individul interesat nu ştie care strategie este mai bună, deci va dori rezolvarea ei.

Noţiunea de problemă are două aspecte în tratare: aspectul psihologic al problemei (actul întrebării) şi aspectul lingvistic (modalitatea de exprimare a întrebării într-un limbaj). Aspectul psihologic al problemei se referă la faptul că formularea acesteia presupune delimitarea clară în timp şi spaţiu a componentelor situaţiei decizionale aferente, existând în structura problemei decizionale:

- variantele (strategiile) de acţiune care reprezintă căile de rezolvare a problemei date;
- criteriile de decizie care cuprind regulile după care va fi aleasă una dintre variantele (strategiile) de acţiune;
- stările naturii în contextul cărora se desfăşoară procesul analizat;
- consecinţele acţiunilor reprezintă rezultatele anticipate ale implementării variantelor (strategiilor) de acţiune în diferite stări ale naturii.

Exprimarea clară şi precisă a unei probleme presupune formularea ei ca o propoziţie interogativă, ca întrebare, iar întrebarea reprezintă forma lingvistică naturală şi directă de exprimare a unei probleme. O problemă trebuie formulată corect şi să fie delimitată de alte probleme cu care este în interdependenţă pentru a putea fi rezolvată. O problemă este *bine formulată* dacă este *bine concepută* (nici o ipoteză să nu fie falsă) şi *bine enunţată*. Se spune că o problemă bine enunţată este pe jumătate rezolvată.

Rezolvarea unei probleme de optimizare poate fi structurată în etapele:

- formularea (enunţul) problemei;
- construcţia modelului matematic;
- obţinerea soluţiei optime;
- testarea modelului şi a soluţiei optime;
- implementarea şi actualizarea soluţiei optime.

1. 2. Simulare

Simularea este o experimentare pe model. **Simularea** este o tehnică de realizare a experimentelor cu calculatorul, care implică utilizarea unor modele matematice şi logice care descriu comportarea unui sistem real (sau a unor componente ale sale) de-a lungul unei perioade mari de timp. Modelele de optimizare sunt normative sau prescriptive, iar modelele de simulare sunt descriptive. Un model de simulare nu calculează în general ce ar trebui să se facă pentru a atinge un anumit scop particular, ci clarifică ce s-ar întâmpla într-o situaţie dată. Scopul unui

model de simulare poate fi acela de previziune în sensul predicţionării comportării viitoare a sistemului studiat în anumite condiţii date

Există două variante ale simulării: simularea Monte Carlo şi simularea de tip joc.

Simularea Monte Carlo este o tehnică de simulare legată mai mult de probleme cu caracter aleator, dar se utilizează şi la rezolvarea unor probleme deterministe care nu pot fi rezolvate uşor prin metode deterministe.

Simularea de tip joc se referă la acele situaţii care se caracterizează printr-un conflict între anumiţi parteneri sau între om (care trebuie să ia anumite decizii) şi natură (care îi oferă omului mai multe variante urmând ca el să o aleagă pe cea mai convenabilă).

Cuvântul " simulare " este de origine latină, provenind de la " simulatio ", care înseamnă capacitatea de a reproduce, reprezenta sau imita ceva. După construirea modelului de simulare, simularea în sine, ca experiment pe model, constă în a varia diversele caracteristici ale sistemului (valorile variabilelor, ale parametrilor de intrare) şi a deduce pe baza modelului, ca rezultat al calculelor, efectele lor asupra altor caracteristici ale procesului (variabile de ieşire). În problemele de simulare trebuie generate numere aleatoare şi variabile aleatoare a căror calitate trebuie testată.

Simularea poate fi aplicată atât în studiul sistemelor statice cât şi dinamice precum şi în studiul sistemelor discrete cât şi continue.
În cazul sistemelor statice stochastice se aplică simularea Monte Carlo, iar în cazul sistemelor stochastice dinamice se poate alege dintre simularea evenimentelor discrete sau simularea continuă.
Modelarea şi simularea sunt necesare atunci când experimentarea directă pe sistemul real nu este posibilă sau recomandabilă. Simularea poate fi definită ca un proces prin care se construieşte un model al unui sistem real şi se realizează experimente cu acest model în scopul înţelegerii comportamentului sistemului sau evaluării diferitelor strategii pentru sistemul analizat.

Se apelează la simulare deoarece ea permite imitarea a ceea ce se întâmplă într-un sistem real sau a ceea ce se preconizează pentru un sistem care este în stadiul de proiect. Datele de ieşire obţinute prin simulare pot fi considerate ca rezultate care ar fi putut fi furnizate de sistemul real. Prin simulare, este posibil să se construiască un model al unui sistem sau proces fără ipotezele impuse de modelele analitice (de exemplu în teoria firelor de aşteptare soluţiile analitice se obţin în ipoteza că intrările şi ieşirile dintr-un sistem de servire sunt caracterizate prin distribuţia de probabilitate Poisson).
În comparaţie cu modelele de optimizare, modelele de simulare sunt „executate” şi nu rezolvate, deci, fiind dat un anumit set de intrări şi caracteristici ale modelului, el este executat pentru a se observa comportamentul sistemului pe care îl reprezintă. Modificarea intrărilor şi caracteristicilor modelului se structurează în mai multe scenarii care sunt evaluate prin simulare.

1. 3. Algoritmi

Cuvântul algoritm provine din “al-Khowârizmî” , adică din oraşul Khowârizm , în prezent acest oraş se numeşte Khiva şi se află în Uzbechistan, unde un autor persan, Abu Ja’ far Mohammed ibn Musâ al-Khowârizmî , a scris o carte de matematică în sec.VIII – IX , cunoscută în traducere în limba latină “ Algorithmi de numero indorum”. Autorul persan şi matematicienii din Evul Mediu înţelegeau prin algoritm o regulă pe baza căreia se efectuau calculele aritmetice.

Un *algoritm* este o secvenţă de paşi care transformă mulţimea datelor de intrare în datele de ieşire, rezultatele dorite.

Un *algoritm* este o mulţime de reguli ce se pot aplica în cadrul procesului de construcţie a soluţiei şi pot fi executate fie manual, fie de o maşină.

Un *algoritm* pentru o problemă dată este o mulţime de instrucţiuni care garantează găsirea unei soluţii corecte pentru orice instanţă a problemei, într-un număr finit de paşi (iteraţii).

Prin *algoritm* se înţelege o metodă generală de rezolvare a unui anumit tip de problemă, metodă ce se poate implementa (programa) pe calculator. Algoritmii pot opera nu numai cu numere, deşi istoric aşa au apărut, existând algoritmi algebrici şi algoritmi logici. Un algoritm este compus dintr-o mulţime finită de paşi, fiecare necesitând una sau mai multe operaţii. Un algoritm trebuie să se termine după un număr finit de operaţii, într-un timp rezonabil de lung.

Algoritmii de prelucrare sunt legaţi de operaţiile efectuate asupra structurilor de date. Gândirea algoritmică s-a transformat şi dezvoltat, dintr-un instrument matematic particular, într-o modalitate fundamentală de abordare a problemelor în domenii care aparent nu au nimic comun cu matematica, de exemplu, chiar şi o reţetă culinară este în esenţă un algoritm. Conceptul de algoritm se utilizează în toate domeniile. Universalitatea gândirii algoritmice este rezultatul conexiunii dintre algoritm şi calculator. *Programul* calculator este exprimarea unui algoritm într-un limbaj de programare. Programele sunt formulări concrete ale unor algoritmi abstracţi pe baza unor reprezentări şi structuri particulare ale datelor.

După N. Wirth, programele sunt definite prin relaţia, numită ecuaţia lui Wirth:

algoritmi + structuri de date = programe.

Decizia privind modul de structurare a datelor nu poate fi luată fără a se cunoaşte algoritmii aplicaţi acestora şi invers, structura şi alegerea algoritmilor depinde de structura datelor. Construirea programelor şi structurile de date sunt subiecte inseparabile. Datele reprezintă obiectele prelucrării, iar algoritmii descriu abstract un proces de prelucrare.

Proprietăţile unui algoritm

- Algoritmul trebuie să posede date de intrare (input data).
- Algoritmul trebuie să furnizeze date de ieşire (output data).
- Determinismul algoritmului (la executarea oricărui pas, trebuie să cunoaştem succesorul acestuia).
- Corectitudinea datelor de ieşire (a rezultatelor) în raport cu datele de intrare.
- Finititudinea algoritmului (pentru orice mulţime de date de intrare posibilă a problemei, soluţia este obţinută într-un număr finit de paşi).
- Eficienţa algoritmului (furnizarea soluţiei trebuie să fie realizabilă prin consumul eficient al resurselor timp, spaţiu etc.).
- Generalitatea algoritmului (algoritmul este aplicabil unei clase de probleme, cele ale căror date de intrare satisfac anumite condiţii).

Succesiunea coerentă de operaţii logice şi aritmetice conduce la algoritmizarea unei probleme economice. Algoritmii pot fi: exacţi, aproximativi şi euristici.

Se vor analiza câţiva algoritmi utilizabili în diverse probleme de optimizare şi sisteme informatice.

1. *Divide et impera*

O clasă importantă de algoritmi sunt algoritmii *divide et impera* care se utilizează astfel:

- se descompune cazul ce trebuie rezolvat într-un număr de subcazuri mai mici ale aceleiaşi probleme;
- se rezolvă succesiv şi independent fiecare caz;
- se face recompunerea soluţiilor astfel obţinute pentru a găsi soluţia cazului iniţial.

2. C*ăutarea binară* (Căutarea într-un vector ordonat)

O aplicaţie a metodei *divide et impera* este *căutarea binară* care în principiu este algoritmul după care se caută un cuvânt într-un dicţionar sau un nume în cartea de telefon.

Se consideră un tablou T_1 , T_2 , …, T_n ordonat crescător şi x un element oarecare. Problema constă în a-l găsi pe x în tabloul T, iar dacă nu se află acolo în a găsi poziţia unde poate fi inserat. Deci, se caută indicele i, $1 \leq i < n$, şi $T_i \leq x < T_{i+1}$. Cea mai simplă metodă de căutare este căutarea secvenţială. Pentru a mări viteza de căutare, metoda *divide et impera* impune să-l căutăm pe x fie în prima jumătatea a tabloului T, fie în cea de a doua. Se compară x cu elementul din mijlocul tabloului şi se decide în care dintre jumătăţi se va căuta. Fie T_k elementul din mijloc al şirului. Dacă $X = T_k$, atunci elementul a fost găsit, dacă $X \neq T_k$, atunci el trebuie căutat în prima jumătate dacă $X < T_k$, respectiv în a doua jumătate dacă $X > T_k$. Se repetă recursiv procedeul.

3. *Backtracking*

Algoritmii Backtracking (în limba engleză, back = înapoi , track = a urmări) construiesc soluţia pas cu pas, iar dacă pentru o valoare alesă se constată că nu se ajunge la soluţie, se renunţă la ea şi se reia căutarea de la pasul precedent. Metoda Backtracking îmbunătăţeşte căutarea exhaustivă, dar totuşi timpul său de execuţie creşte exponenţial, iar din această cauză metoda este utilizată numai atunci când nu există o metodă mai eficientă de rezolvare a problemei

4. *Algoritmi Greedy*

Algoritmii Greedy (în limba engleză, greedy = lacom) determină în general un optim local sau o soluţie relativ bună, suboptimală, într-un timp mai scurt decât rezolvarea aceleiaşi probleme cu un algoritm backtracking. Un algoritm greedy construieşte soluţia pas cu pas, la fiecare pas se alege cel mai bun candidat posibil după ce se face evaluarea tuturor din acel moment, dar nu face reveniri ca în cazul algoritmilor backtracking. Rezolvarea problemelor cu un algoritm greedy este mai eficientă decât cu algoritmii backtracking şi căutarea exhaustivă,. Complexitatea unui algoritm greedy este polinomială. Un algoritm greedy este un algoritm iterativ nerecursiv

5. *Algoritmi de ordonanţare*

Un algoritm de ordonanţare rezolvă o problemă de ordonanţare a fabricaţiei a n repere pe m maşini. Ordonanţarea fabricaţiei înseamnă determinarea ordinii optime de prelucrare (minimizarea timpului total de prelucrare, minimizarea timpului total al reglajelor, minimizarea timpului de stagnare a utilajelor etc.) a n repere pe m maşini. Problema ordonanţării fabricaţiei a apărut în literatura de specialitate în 1954 datorită lucrărilor lui S. M. Johnson care propune şi rezolvă problema prelucrării a n produse pe m = 2 maşini, elaborând un algoritm care îi poartă numele.

6. Algoritmi Branch and Bound

Algoritmii Branch and Bound (în limba engleză, branch = ramifică, bound = limită, mărgineşte) are la bază principiul căutării ramificate utilizând un arbore de căutare şi principiul căutării mărginite, deci căutarea se face între anumite limite.

7. Algoritmi evolutivi şi algoritmi genetici

Se consideră că există trei modalităţi de abordare pentru a genera şi realiza modele:

- abordarea deterministă;
- abordarea stocastică;
- abordarea prin inteligenţă artificială (calcul neconvenţional), deci utilizarea algoritmilor evolutivi, a algoritmilor genetici, a algoritmilor fuzzy, a reţelelor neuronale (calcul neuronal).

Algoritmii evolutivi şi algoritmi genetici, utilizează proceduri care imită procesele de adaptare şi căutare apărute în evoluţia naturală. Algoritmii evolutivi cuprind următoarele clase de algoritmi: algoritmi genetici, programarea genetică, programarea evolutivă, strategiile evolutive.

Complexitatea algoritmilor

Prin complexitatea unui algoritm se înţelege în general costul, care este măsurat cu ajutorul unor funcţii sau parametri, cum ar fi: timpul de execuţie a algoritmului, memoria calculator necesară, numărul de operaţii elementare standard (modelul RAM – Random Access Machine) executate, numărul real de operaţii elementare calculator (cablate) executate etc. În modelul RAM operaţiile simple sunt: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, modulo, asignări, comparaţii, apel procedură care se consideră că ar consuma o unitate de timp (evident este o aproximare, în realitate depinde de calculator), iar ciclurile şi procedurile nu sunt considerate operaţii simple, fiind compuse din mai multe operaţii. Resursele de memorie ale calculatoarelor actuale sunt foarte mari, deci timpul de execuţie al unui algoritm este mai important. Complexitatea unui algoritm calculată şi măsurată prin funcţia obiectiv f = timpul de execuţie, care ia în calcul numărul de operaţii elementare (unităţi de timp) necesare pentru execuţia algoritmului când datele de intrare au o dimensiune n. În practică se utilizează trei notaţii sau metode pentru analiza complexităţii şi performanţei unui algoritm, prin mărginirea valorilor funcţiei f(n) cu nişte constante şi alte funcţii.

1. Notaţia Θ.

Se spune că

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

dacă există constantele pozitive n_0, c_1 şi c_2 , astfel încât

$$c_1.g(n) \le f(n) \le c_2.g(n) \ , (\forall)\ n \ge n_0$$

2. Notaţia O (mărginire superioară)

Se spune că

$$f(n) = O(g(n))$$

dacă există constantele pozitive n_0 şi c , astfel încât

$$f(n) \le c.g(n) \ , (\forall)\ n \ge n_0$$

3. *Notaţia* Ω (mărginire inferioară)

Se spune că

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

dacă există constantele pozitive n_0 şi c , astfel încât

$$f(n) \ge c.g(n) \ , (\forall)\ n \ge n_0$$

Complexitatea lui f(n) este aproximată de familia sa $O(g(n))$, iar g(n) poate fi una dintre funcţiile:

- n, complexitate liniară;
- log n , complexitate logaritmică;
- n^k , $k \ge 2$, complexitate polinomială;
- a^n , $a>1$, complexitate exponenţială;
- n! , complexitate factorială;

Dacă n este mare, $n \ge 10$, au loc inegalităţile:

$$\log n < n < n.\log n < n^2 < n^3 < 2^n$$

rezultând: $O(\log n) < O(n) < O(n.\log n) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n)$

După ce s-a determinat complexitatea unui algoritm, se pune problema dacă acest algoritm este optimal. Pentru o problemă concretă un algoritm ce o rezolvă este optimal dacă complexitatea sa atinge o limită inferioară a tuturor algoritmilor ce pot rezolva această problemă.

În activitatea de modelare şi optimizare practică se poate pune *şi* problema optimizării programelor calculator.

Este impropriu termenul de optimizare a programelor calculator, deşi se utilizează în practică, deoarece este imposibil să se găsească o funcţie obiectiv prin care să se măsoare

exact gradul maxim de performanţă a programului. Este imposibil pentru un compilator să genereze cel mai bun program obiect al unui program sursă. Practic nu se poate stabili mulţimea tuturor programelor calculator care rezolvă o anumită problemă şi din care să se aleagă programul optim din anumite puncte de vedere.

Câteva criterii de optimizare a programelor calculator sunt: timpul de execuţie, dimensiunea memoriei ocupate, claritatea programului, portabilitatea. Se poate vedea că aceste criterii pot fi conflictuale, trebuie stabilită importanţa fiecărui criteriu, iar în practică trebuie găsită soluţia de compromis, funcţie de resursele calculatorului. Problema generală a găsirii unui program optim este indecidabilă. Optimizarea programelor, în sensul minimizării timpului de execuţie, este posibilă în trei faze ale elaborării lor: în faza de concepţie, în faza de codificare şi în faza de compilare. Dacă pentru rezolvarea unei probleme P se cunoaşte de către programator mulţimea A a algoritmilor care rezolvă problema respectivă, în etapa de analiză se estimează care algoritm este mai rapid şi acesta se va folosi. Evident, mulţimea A diferă de la o persoană la alta, având o anumită relativitate. După alegerea algoritmului de rezolvare a problemei, trebuie ales limbajul de programare potrivit pentru tipul de calcule şi structurile de date utilizate.

Câteva reguli practice ce se pot folosi pentru optimizarea codului generat sunt:

- eliminarea subexpresiilor comune mai multor expresii aritmetice, prin notarea sa cu un nume de variabilă pentru a fi calculată o singură dată;
- folosirea operaţiilor aritmetice rapide;
- minimizarea numărului de conversii a constantelor şi variabilelor;
- optimizarea buclelor, deci trebuie scoase din ciclu expresiile aritmetice invariante în ciclu;
- utilizarea facilităţilor oferite de limbajele de programare referitoare la optimizarea codului.

Alături de complexitatea algoritmilor calculată şi măsurată prin funcţia obiectiv timpul de execuţie, se pune *problema clasificării problemelor* după criteriul dificultăţii lor de rezolvare, deci uşor sau greu de rezolvat, accesibile sau inaccesibile. Această clasificare a problemelor după dificultatea de rezolvare cuprinde clasele P şi NP, iar clasa NP cuprinde subclasele NP-complete şi NP-hard. Clasa P cuprinde mulţimea problemelor pentru care există un algoritm cu timp polinomial de rezolvare, deci probleme relativ uşoare, accesibile. Clasele NP-complete, NP-hard cuprind cele mai grele probleme din clasa NP, nu există un algoritm în timp polinomial de rezolvare.

1.4. Fluxul informaţional.

Fluxul material este însoţit de un flux informaţional corespunzător.

Fluxul informaţional reprezintă totalitatea informaţiilor transmise într-un interval de timp determinat, de la o sursă de informaţie la un receptor, printr-o mulţime de canale informaţionale. Fluxul informaţional este constituit din ansamblul datelor, informaţiilor şi deciziilor necesare desfăşurării în bune condiţii a unei activităţi sau operaţii. Fluxul informaţional este caracterizat prin: conţinut, volum, frecvenţă, calitate, formă, suport, proces de obţinere şi cost. Fluxurile informaţionale sunt vehiculate pe trasee prestabilite denumite circuite informaţionale. Circuitul informaţional reprezintă itinerarul parcurs de informaţii de la locul culegerii lor până la locul de utilizare a acestora. Sistemul informaţional al unei organizaţii poate fi definit ca ansamblul informaţiilor, surselor de informaţii şi nivelurilor receptoare, canalelor de circulaţie, procedurilor şi mijloacelor de tratare a informaţiilor din cadrul respectivei organizaţii. Orice sistem informaţional trebuie să asigure organizaţiei (firmei) căreia îi aparţine informaţii complete, în cantităţi suficiente, corecte, la nivelul de operativitate cerut de nivelele consumatoare.

Deciziile manageriale sunt influenţate de calitatea şi cantitatea informaţiilor de care dispune întreprinderea. *Completitudinea* şi *precizia informaţiilor* reprezintă două atribute

importante ale informaţiilor. Variaţia preciziei şi completitudinii informaţiilor condiţionează metodele matematice ce se vor utiliza pentru rezolvarea problemei decizionale, ceea ce este prezentat în fig. 1.

Dacă informaţiile au un nivel relativ ridicat de precizie şi completitudine, atunci problema decizională poate fi abordată determinist cu rezultate bune, iar acest lucru se întâmplă în cazul sistemelor tehnice, controlabile (astfel de sisteme au o calculabilitate mare a comportamentului lor şi sunt numite şi sisteme complicate).

Dacă scade precizia informaţiilor, dar completitudinea este înaltă, se poate rezolva problema decizională prin decizii fuzzy (mulţimi vagi, fuzzy).

Dacă scade completitudinea informaţiilor, iar precizia este relativ înaltă, problema decizională se poate aborda stochastic, abordarea stochastică este indicată pentru sisteme colective sau prin modele ale teoriei jocurilor, când completitudinea scade mai mult.

Dacă scade simultan completitudinea şi precizia informaţiilor între anumite limite trebuie să se facă o abordare suboptimală a problemei decizionale prin metode euristice, metode multicriteriale şi simulare. Dacă completitudinea scade şi mai mult, iar precizia rămâne la nivel mediu, se poate utiliza metoda învăţarea prin încercare şi eroare. Completitudinea şi precizia informaţiei sunt influenţate de complexitatea sistemelor studiate (sisteme tehnico-economice, sisteme socio-politice).

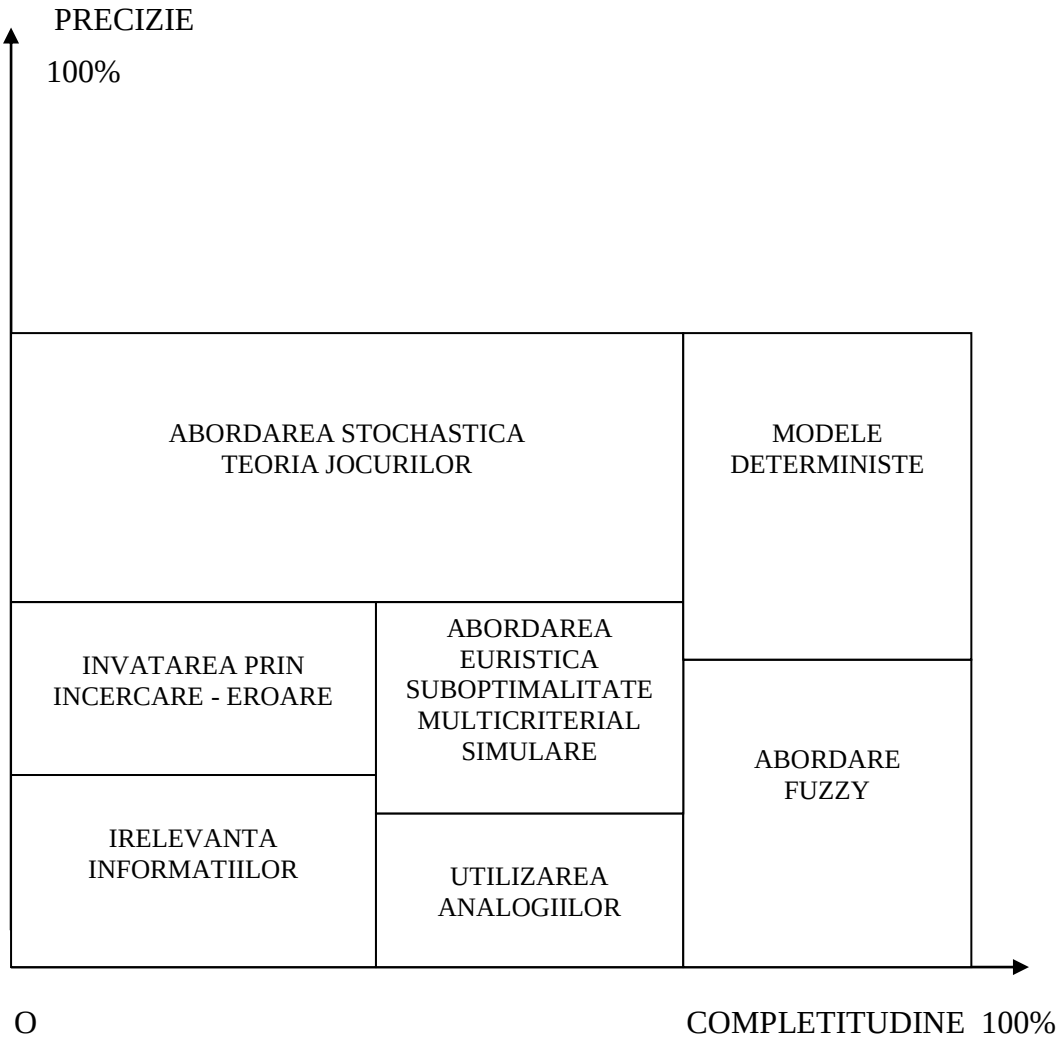


Fig.1. Corespondenţa dintre calitatea informaţiilor (precizie şi completitudine) şi metodele matematice utilizabile

Fluxurile materiale şi fluxurile informaţionale se vor analiza în cadrul sistemului informaţional al firmei şi a diverselor tipuri de sisteme informatice: Sistemul Informatic de Prelucrare a Tranzacţiilor, Sistemul Informatic de Management, Sisteme Suport pentru Decizie, Sistemul Informatic de Birotică, Sistemul Informatic Strategic.

1. 5. Optimizarea fluxurilor materiale

Prin studierea problematicii optimizării managementului firmei se urmăreşte creşterea competitivităţii sale, asigurarea raţionalităţii procesului decizional şi managerial.

Se poate pune problema **alegerii monocriteriale sau multicriteriale a algoritmului** / programului **optim** sau **raţional** de rezolvare a unei probleme de management sau de optimizare a fluxurilor materiale rezolvabilă în cel puţin trei etape:

- alegerea optimă / raţională a clasei algoritmului (algoritmi determinişti, stochastici, fuzzy, genetici etc.);
- alegerea optimă / raţională a algoritmului din clasa de algoritmi aleasă ;
- alegerea optimă / raţională a limbajului de programare pentru programarea algoritmului ales (se pot considera ca şi funcţii de eficienţă: timpul de execuţie a programului pe calculator, memoria calculator necesară, portabilitatea programului realizat etc.).

Fluxurile materiale pot fi studiate, analizate şi optimizate prin programare matematică cu o funcţie obiectiv, de exemplu prin problema din relaţiile (1) care este o problemă tip maximizare a profitului sau prin modelul din relaţiile (2) care minimizează costurile.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \le b_i \quad , \text{ i = 1, 2, . . . , m;}$$

$$X_j \ge 0 \quad , \text{ j = 1, 2, ... , n ;} \qquad (1)$$

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

$$\max f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Problemă de minimizare:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \ge b_i \quad , \text{ i = 1, 2, . . . , m;}$$

$$X_j \ge 0 \quad , \text{ j = 1, 2, ... , n ;} \qquad (2)$$

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

$$\min f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Modelele (1) şi (2) se rezolvă prin algoritmul simplex sau pe calculator cu programele: Qsb, Dsspom, Lindo, Gams, Ampl, Allo, LPL, AIMMS sau altele.

Problematica fluxurilor materiale va fi abordată monocriterial şi multicriterial, prin modele deterministe, stochastice şi fuzzy.

În logistica internă şi în fabricaţie se pot utiliza câteva metode ale cercetării operaţionale, din care amintim:

- alocarea resurselor materiale necesare fabricaţiei prin programare liniară monoobiectiv şi multiobiectiv;
- programare stochastică;
- programare fuzzy;
- minimizarea costurilor prin programare liniară;
- problema de afectare (asignare) pentru repartizarea muncitorilor pe maşini;
- problema de transport de minimizare şi problema de transport de maximizare;
- ordonanţarea fabricaţiei;
- modele de aşteptare;
- optimizarea stocurilor;
- teoria grafurilor;
- optimizarea deciziilor.

În logistica externă (logistica aprovizionării şi logistica distribuţiei) se pot utiliza:

- problema de transport de minimizare monoobiectiv şi multiobiectiv;
- programarea parametrică;
- decizii multiatribut, decizii de grup, decizii fuzzy;
- modele de aşteptare;
- teoria jocurilor strategice.

Metode matematice de modelare a fluxurilor materiale – C2

MINIMIZAREA COSTURILOR FLUXURILOR MATERIALE

Minimizarea costurilor prin probleme de transport

4.1. PROBLEMA DE TRANSPORT DE MINIMIZARE

4.1.1. DEFINIREA PROBLEMEI DE TRANSPORT DE MINIMIZARE

Există m centre de aprovizionare (depozite) şi n centre de consum. Un produs omogen este stocat (disponibil) în localităţile (depozitele, sursele) A_1 , A_2 , …, A_m respectiv în cantităţile a_1 , $a_{2\ ,\ ...,}$ a_m şi trebuie transportat în centrele de consum (destinaţii, magazine, firme, localităţi) B_1 , B_2 , …, B_n unde este cerut (necesar) respectiv în cantităţile b_1 , b_2 , …, b_n . Costul transportului unei unităţi de produs din depozitul A_i la centrul de consum B_j este egal cu c_{ij} unităţi monetare. Se pune problema determinării cantităţilor de produs ce urmează să fie transportate de la depozite la centrele de consum, astfel încât să nu depăşească disponibilul (oferta), cererea să fie satisfăcută şi costul total al transportului să fie minim. Aceste elemente sunt sintetizate în tabelul nr.4.1.

Se presupune că: $a_i > 0$, $b_j > 0$, $c_{ij} > 0$, $i = 1, 2,..., m$; $j = 1, 2,...,n$;

Se face ipoteza că cheltuielile de transport între două localităţi sunt propoţionale cu cantităţile expediate, iar această ipoteză este apropiată de realitate atunci când cantităţile transportate nu sunt prea mici.

Problema de transport poate fi modelată şi rezolvată prin programare liniară şi prin teoria grafurilor.

Modelarea şi rezolvarea problemei de transport prin teoria grafurilor utilizează reţele de transport. Pentru problema de transport se consideră graful G = (X, U) care formează o reţea de transport cu mulţimea vârfurilor $X = \{A_0 , A_1 , A_2 , ..., A_m , B_1 , B_2 , ..., B_n , B_{n+1} \}$, vârful A_0 este intrarea în reţea şi are arce cu vârfurile A_i , deci arcele (A_0 , A_i) de valoare a_i, i = 1, 2, …, m. Vârful B_{n+1} este ieşirea din reţea, având arcele (B_j , B_{n+1}) de valoare b_j , j = 1, 2, ..., n. Mulţimea arcelor U mai conţine arce de forma (A_i , B_j), i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, ..., n.

Această abordare se va analiza la capitolul dedicat teoriei grafurilor.

Modelarea şi rezolvarea problemei de transport prin programare liniară

Se notează cu X_{ij} cantitatea de produs ce va fi transportată din A_i în B_j ,

$X = (X_{ij})$, i = 1, 2,..., m; j = 1, 2,..., n.

Schematic avem:

$$A_i , a_i \xrightarrow[X_{ij}]{c_{ij}} B_j , b_j$$

Modelul matematic al problemei de transport în forma generală este dat de relaţiile (4.1), (4.2), (4.3), (4.4).

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le a_i , \ i = 1, 2, \ldots, m; \qquad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \ge b_j , \ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (4.2)$$

$$X_{ij} \ge 0 , \ i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (4.3)$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . X_{ij} \qquad (4.4)$$

min f(X)

Inegalităţile (4.1) arată că totalul livrărilor fiecărui furnizor să se încadreze în disponibil (ofertă). Inegalităţile (4.2) arată că cererea fiecărui consumator trebuie să fie acoperită (satisfăcută) de totalul cantităţilor primite. Relaţiile (4.4) reprezintă costul total al transportului. O condiţie necesară şi suficientă pentru existenţa unei soluţii a problemei de transport neechilibrate din relaţiile (4.1) – (4.4) este dată de relaţia (4.5), adică oferta este mai mare sau egală cu cererea.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \ge \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4.5)$$

Problema de transport echilibrată

Se va presupune că **cererea este egală cu oferta**, deci problema de transport este **echilibrată**, relaţia (4.6) este satisfăcută. Problema de transport neechilibrată se va analiza după rezolvarea celei echilibrate.

$$\textbf{oferta} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \textbf{cererea} \qquad (4.6)$$

Modelul matematic al problemei de transport în forma standard este dat de relaţiile (4.7) care sunt echivalente cu (4.8) – (4.11).

Tabelul nr.4.1

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil (Oferta) a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Necesar (Cererea) b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Tabelul problemei de transport, tabelul nr.4.1, poate cuprinde în fiecare celulă (i, j), costul unitar c_{ij} care se scrie în celula (i, j) în partea stânga sus, sau variabila X_{ij} sau valoarea $\overline{X_{ij}}$ a variabilei X_{ij} scrise în partea dreapta jos a celulei (i, j).

c_{ij}
X_{ij}

Matricea costurilor problemei de transport este C,

$$C = (c_{ij}) \ , \ i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n;$$

Modelul matematic al problemei de transport în forma standard (echilibrată) este dat de relaţiile (4.7) care sunt echivalente cu (4.8) – (4.11).

Schema de obținere a modelului matematic.

$$A_1 , a_1 \longrightarrow \begin{cases} \xrightarrow{X_{11}} B_1 \\ \xrightarrow{X_{12}} B_2 \\ \cdots \\ \xrightarrow{X_{1n}} B_n \end{cases}$$

$$X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} = a_1$$

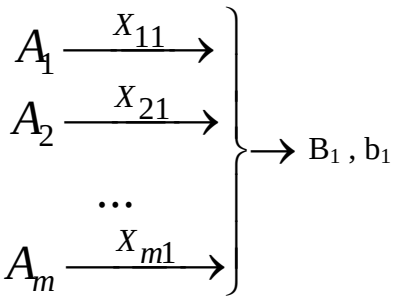
$$A_2 , a_2 \longrightarrow \begin{cases} \xrightarrow{X_{21}} B_1 \\ \xrightarrow{X_{22}} B_2 \\ \cdots \\ \xrightarrow{X_{2n}} B_n \end{cases}$$

$$X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} = a_2$$

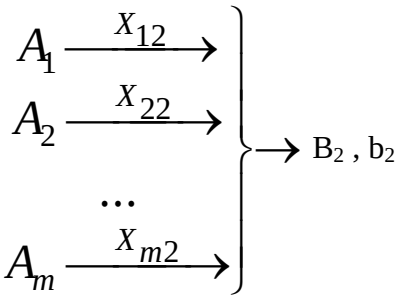
. . .

$$A_m , a_m \longrightarrow \begin{cases} \xrightarrow{X_{m1}} B_1 \\ \xrightarrow{X_{m2}} B_2 \\ \cdots \\ \xrightarrow{X_{mn}} B_n \end{cases}$$

$X_{m1} + X_{m2} + \ldots + X_{mn} = a_m$

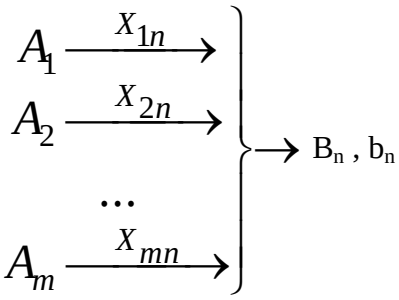


$X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{m1} = b_1$



$X_{12} + X_{22} + \ldots + X_{m2} = b_2$

...



$X_{1n} + X_{2n} + \ldots + X_{mn} = b_n$

$A_i , a_i \xrightarrow[X_{ij}]{c_{ij}} B_j , b_j$

$f(X_{11} , X_{12} , \ldots, X_{m,n}) = c_{11} . X_{11} + c_{12} . X_{12} + . . . + c_{mn}X_{mn}$ = Costul total al transportului

$X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} = a_1$
$X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} = a_2$
. . .
$X_{m1} + X_{m2} + \ldots + X_{mn} = a_m$
$X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{m1} = b_1$ (4.7)
$X_{12} + X_{22} + \ldots + X_{m2} = b_2$
. . .
$X_{1n} + X_{2n} + \ldots + X_{mn} = b_n$

$X_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n;$

$f(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{m,n}) = c_{11} \cdot X_{11} + c_{12} \cdot X_{12} + \ldots + c_{mn}X_{mn}$
$\min f(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{m,n})$

sau

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i , \quad i = 1, 2, \ldots, m; \qquad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j , \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (4.9)$$

$X_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n;$ (4.10)

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot X_{ij} \qquad (4.11)$$

$\min f(X)$

unde: $a_i \ 0$, $b_j 0$, $c_{ij} \ 0$, $X = (X_{ij})$, $i = 1, 2,..., m$; $j = 1, 2,...,n;$

Se presupune că:

$$\text{Oferta} = S = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \text{Cererea} ,$$

Problema de transport poate fi **neechilibrată**, fiind posibile două situaţii:

1. oferta este mai mare decât cererea, deci:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

şi în acest caz problema se echilibrează pentru rezolvare prin introducerea unui consumator fictiv B_{n+1} care are nevoie de cantitatea:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

şi ale cărui costuri unitare sunt nule, $c_{i , n+1} = 0$, $i = 1, 2, ..., m;$

2. cererea este mai mare decât oferta, deci:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

şi în acest caz problema se echilibrează pentru rezolvare prin introducerea unui depozit (furnizor) fictiv A_{m+1} , al cărui disponibil este:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

şi ale cărui costuri unitare sunt nule, $c_{m+1 , j} = 0$, $j = 1, 2..., n.$

Matricea problemei de transport (4. 8) – (4. 11) în forma standard este A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Problema de transport (4.8) – (4.11) este o problemă de programare liniară cu m + n restricţii şi m.n variabile, dar numai m + n – 1 ecuaţii sunt liniar independente.

O soluţie de bază nedegenerată a problemei de transport (4.8) – (4.11) este o soluţie X = (X_{ij}) , i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,..., n; care verifică relaţiile (4.8) – (4.10) şi are m + n – 1 componente diferite de zero (pozitive), iar dacă are mai puţin de m + n – 1 componente diferite de zero (pozitive) X este soluţie de bază degenerată.

Problema de transport se rezolvă în două etape, în etapa întâi se determină o soluţie de bază (metoda colţului Nord-Vest, metoda costului minim pe linie, metoda costului minim pe coloană, metoda costului minim pe matricea costurilor, metoda diferenţelor maxime), iar în etapa a doua se aplică algoritmul potenţialelor. Problema de transport se poate rezolva pe calculator cu programele: Qsb, Dsspom, Lindo, QM, Gams, Ampl, Allo, LPL, AIMMS sau altele

Observaţii

1. Degenerarea problemei de transport.

Problema de transport este o problemă de programare liniară, deci poate să aibă soluţii degenerate şi să apară fenomenul de degenerare care poate conduce la ciclare. O soluţie de bază a problemei de transport în forma standard este nedegenerată dacă numărul componentelor sale diferite de zero (pozitive) este egal cu m + n – 1 şi este degenerată dacă are mai puţin de m + n – 1 componente nenule (pozitive). Degenerarea poate apare în timpul optimizării în momentul ciclului pentru determinarea valorii variabilei ce iese din bază, putând avea mai multe variabile cu valoarea egală. Degenerarea problemelor de transport poate avea ca şi consecinţă apariţia ciclării în algoritmul potenţialelor. O posibilitate de evitare a ciclării constă în utilizarea metodei perturbării. Următoarea teoremă stabileşte situaţiile când apare degenerarea problemei de transport.

Teoremă

Problema de transport în forma standard (4.8) – (4.11) este degenerată dacă şi numai dacă există mulţimile de indici A şi B,

$$A \subset \{1, 2, \dots, m\}, B \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

astfel încât:

$$\sum_{i \in A} a_i = \sum_{j \in B} b_j$$

Metodei perturbării

Se presupune că problema de transport (4.16) este degenerată.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i , \ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j , \ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (4.16)$$

$$X_{ij} \geq 0 , \ i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . X_{ij}$$

$$\min f(X)$$

$$X = (X_{ij}), \ i = 1, 2,..., m; \ \ j = 1, 2,..., n.$$

Metoda perturbării constă în înlocuirea valorilor a_i şi b_j din (4.16) respectiv cu $\overline{a_i}$ şi $\overline{b_j}$, i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, ..., n;

$$\overline{a_i} = a_i + \varepsilon \ , \ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\overline{b_j} = b_j \ , \ j = 1, 2, \ldots, n - 1$$

$$\overline{b_n} = b_n + m.\varepsilon \ ,$$

unde $\varepsilon > 0$, ε este număr real pozitiv şi mic,

$$0 < \varepsilon < \frac{10^{-p}}{2.m}$$

p - reprezintă ordinul de mărime al celei mai semnificative cifre a datelor a_i , i = 1, 2, …, m (p = 2 pentru sute, p = 3 pentru mii etc.).

Se utilizează apoi algoritmul potenţialelor pentru rezolvarea problemei de transport din relaţiile (4.17).

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \overline{a_i} \ , \ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = \overline{b_j} \ , \ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (4.17)$$

$$X_{ij} \geq 0 , \ i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . X_{ij}$$

$$\min f(X)$$

După rezolvarea problemei (4.17), în soluţia optimă obţinută se pune $\varepsilon = 0$, rezultând soluţia optimă a problemei de transport degenerate din relaţiile (4.16).

2. Determinarea celei mai defavorabile soluţii a problemei de transport.

Dacă se rezolvă problema de transport de minimizare (4.8) – (4.11), obţinându-se soluţia optimă

$$X^{min} = (X_{ij}^{min}) , \ i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n;$$

şi valoarea minimă a funcţiei obiectiv este f_{min} , apoi se consideră problema de transport (4.8) – (4.11), dar de maximizare cu aceleaşi date, dar se cere max f, cea mai defavorabilă şi nedorită, i se determină soluţia optimă

$$X^{max} = (X_{ij}^{max}) , i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n;$$

cu valoarea maximă a funcţiei obiectiv f_{max} , se obţine intervalul de încadrare a costului total al transportului f. Rezultă:

$$f \in [f_{min} , f_{max}]$$

Evident că este preferabilă soluţia optimă f_{min} , dar în situaţia cea mai nefavorabilă costul total al transportului este f_{max} .

Exemplul nr. 4.1.

Un produs se află în diverse cantităţi în depozitele A_1, A_2, A_3 şi trebuie transportat în punctele de consum B_1, B_2, B_3 , B_4. Oferta, cererea şi costurile unitare de transport sunt date în tabelul nr. 4. 2.

Tabelul nr.4. 2.

A_i / B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3	2	1	1	140
A_2	2	1	3	1	180
A_3	1	2	3	1	80
Cererea b_j	90	110	115	85	S = 400

Ce cantitate trebuie transportată din fiecare depozit în fiecare punct de consum, astfel încât costul total al transportului să fie minim.

Se vor scrie ecuaţiile problemei de transport de minimizare, se va determina o soluţie de bază prin cele patru metode prezentate şi soluţia optimă. Se vor considera şi probleme concrete cu determinarea costurilor unitare de transport c_{ij} . (Laborator)

Modelul matematic:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 140$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 180$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 80$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 90$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 110$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 115$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 85$$

$$X_{ij} \geq 0 , i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4;$$

$$f = 3.X_{11} + 2.X_{12} + 1.X_{13} + 1.X_{14} + 2.X_{21} + 1.X_{22} + 3.X_{23} + 1.X_{24} +$$

$$+ 1.X_{31} + 2 .X_{32} + 3.X_{33} + 1.X_{34}$$

$$\min f$$

Se rezolvă cu programul QSB, rezultând soluţia optimă din tabelul nr. 4.3.

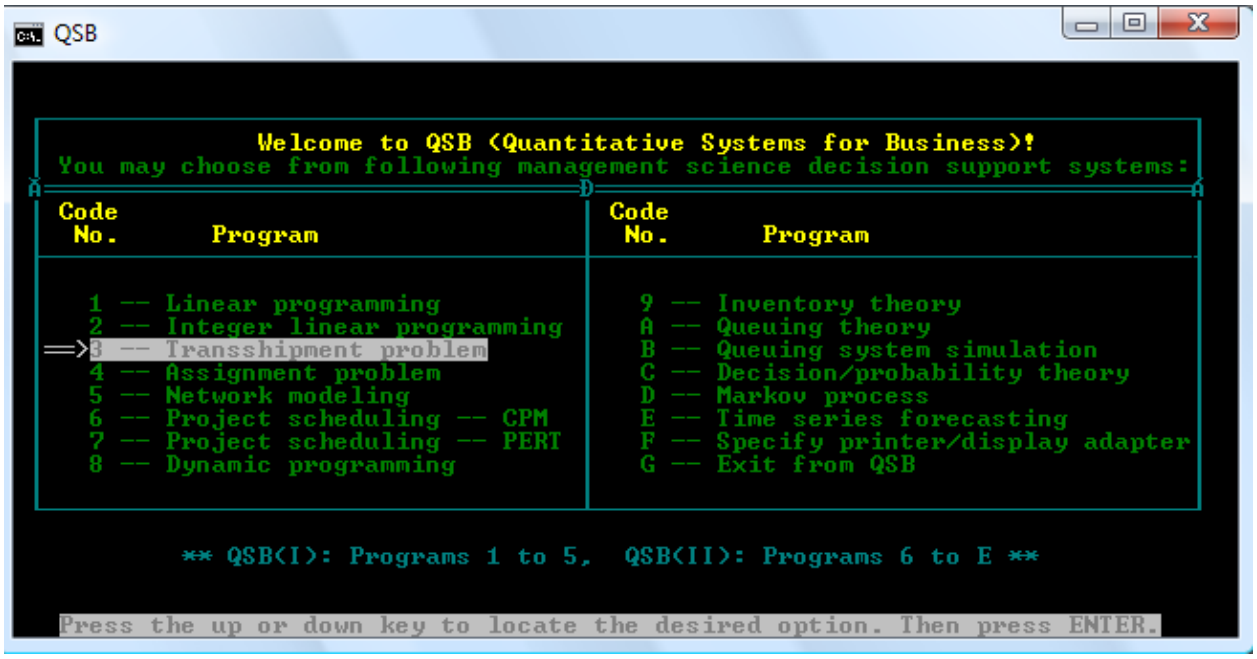
Tabelul nr. 4.3

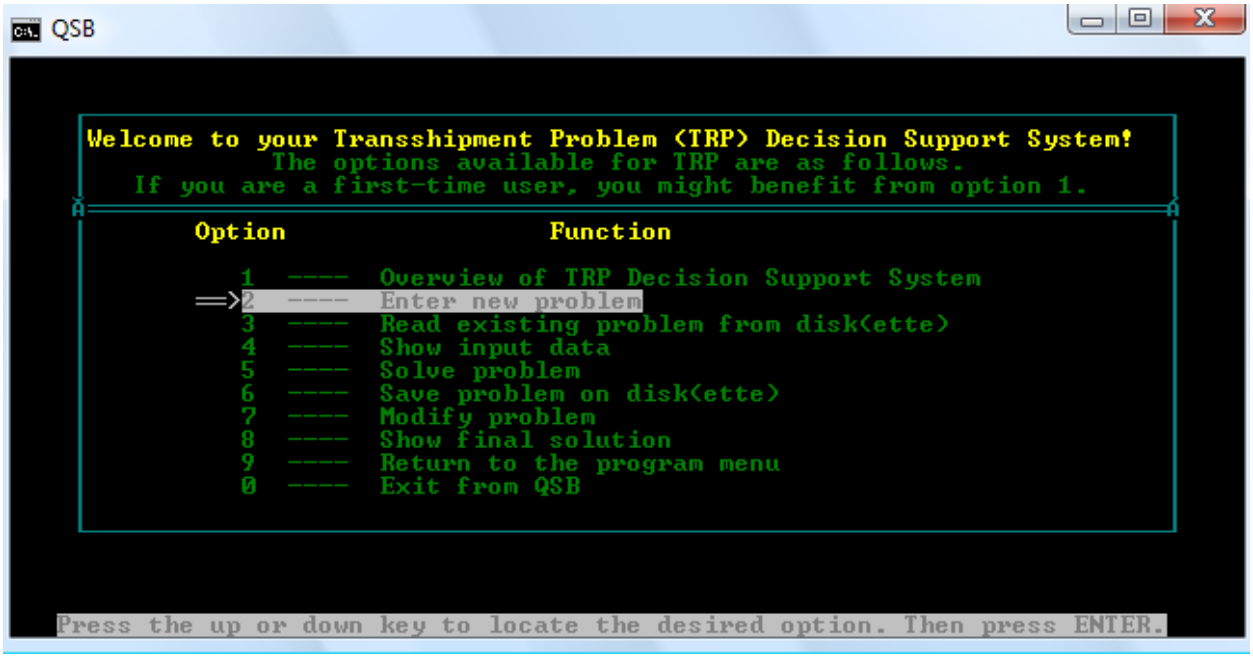
3 0	2 0	1 115	1 25
2 10	1 110	3 0	1 60
1 80	2 0	3 0	1 0

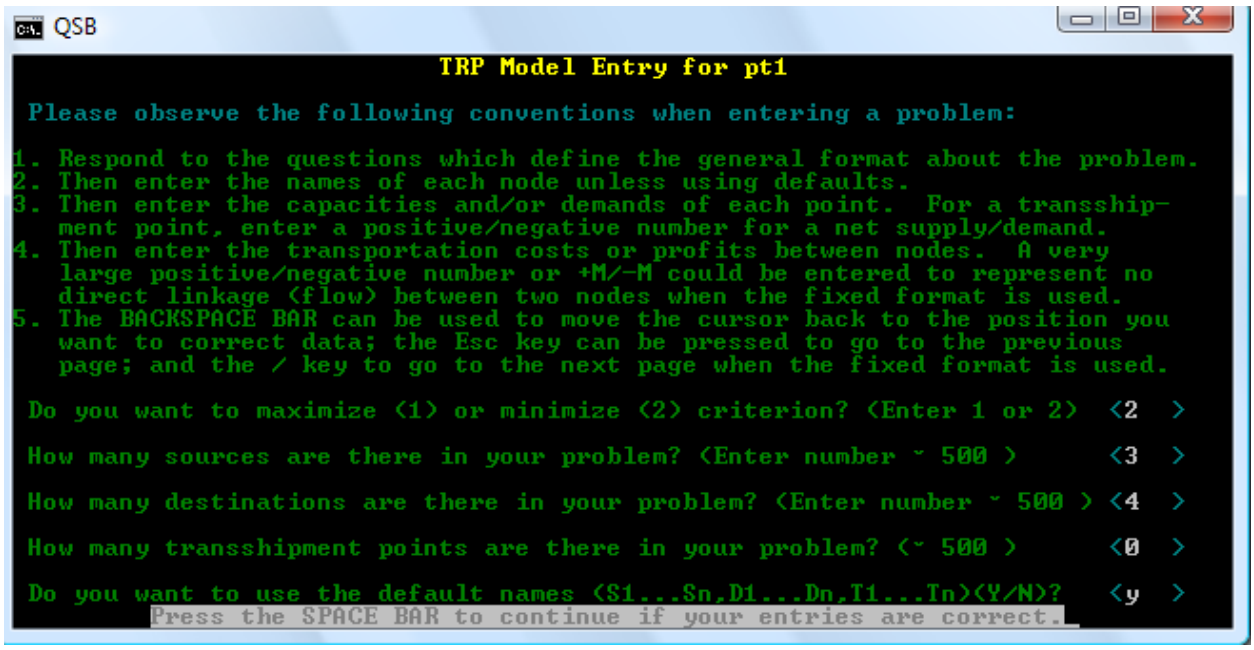
Valoarea funcţiei obiectiv f pentru soluţia optimă va fi :

min f = 1. 115 + 1. 25 + 2.10 + 1. 110 + 1. 60 1. 80 = 410 u. m.

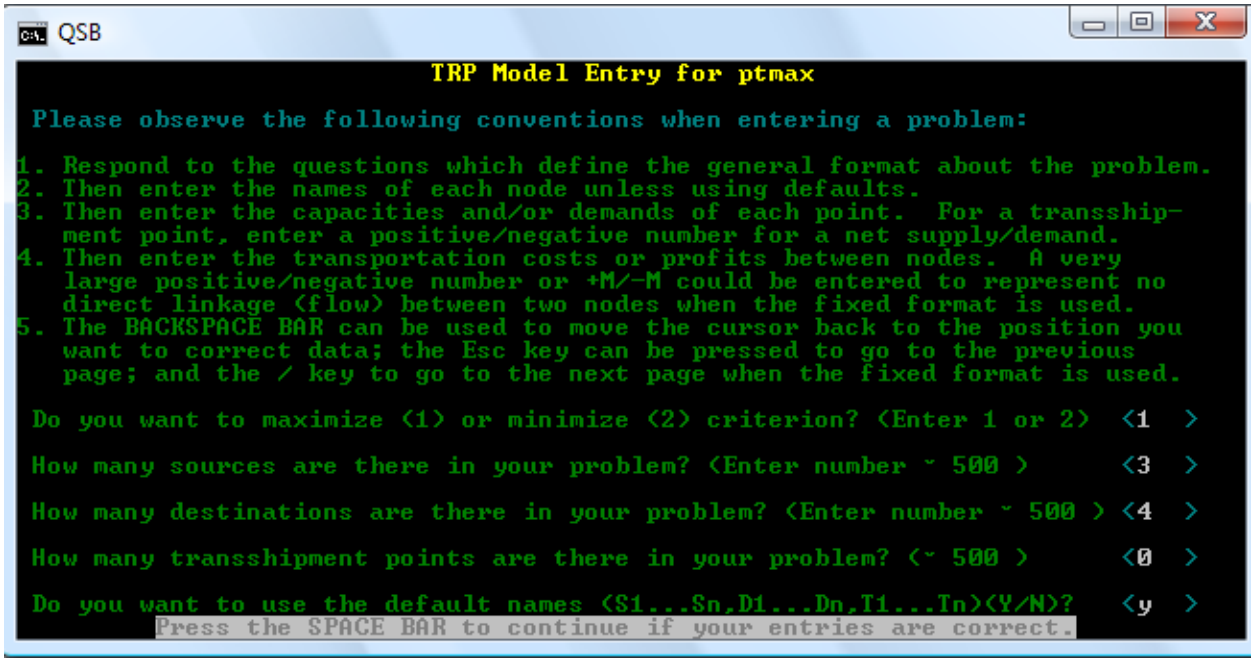
Ecrane QSB de rezolvare.







Se va determina cu programul Qsb soluţia defavorabilă, considerând pentru problema de transport dată de tabelul nr.4. 2 obiectivul max f. Soluţia problemei de transport de maximizare în acest caz este în tabelul nr. 4.4 şi max f = 920 u. m.



Tabelul nr. 4.4

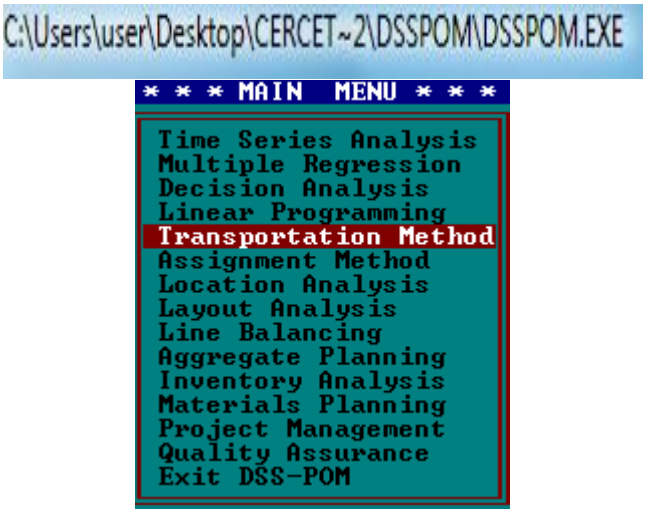
3 90	2 50	1 0	1 0
2 0	1 0	3 115	1 65
1 0	2 60	3 0	1 20

$f \in [f_{min} , f_{max}]$

Rezultă $f \in [410, 920]$

Evident că este preferabilă soluţia optimă f_{min} = 410 unităţi monetare, dar în situaţia cea mai nefavorabilă costul total al transportului este f_{max} = 920 unităţi monetare (u.m.).

Se poate utiliza şi programul DSSPOM pentru a determina min f.



4.1.2. REZOLVAREA PROBLEMEI DE TRANSPORT NEECHILIBRATE

4.1.2.1. CAZUL CEREREA < OFERTA

Se consideră problema de transport de minimizare dată în tabelul nr.4.5 , cu cererea mai mică decât oferta. Deci: $\sum_{j=1}^{n} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Tabelul nr.4.5

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil (Oferta) a_i
A_1	C_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Necesar (Cererea) b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Problema de transport neechilibrată, cu cererea mai mică decât oferta, se echilibrează prin introducerea unui consumator fictiv B_{n+1} care ar avea nevoie de cantitatea de produs b_{n+1} din relaţia (4.18), iar costurile sale unitare de transport sunt zero.

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4.18)$$

$$c_{i,\, n+1} = 0 \text{ , } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Practic, la tabelul nr. 4.5 al problemei neechilibrate se mai adaugă o coloană pentru consumatorul fictiv, rezultând tabelul nr. 4.6.

Tabelul nr. 4.6.

A_i \ B_j	B_1	B_2	...	B_n	B_{n+1}	Disponibil (Oferta) a_i
A_1	C_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	0	a_1
A_2	C_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	0	a_2
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	0	a_m
Necesar (Cererea) b_j	b_1	b_2	...	b_n	b_{n+1}	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$

Se determină soluţia optimă a problemei de transport modificată şi echilibrată dată de tabelul nr. 4.6, iar soluţia optimă a problemei de transport iniţiale neechilibrate, cu cererea mai mică decât oferta, se obţine renunţând la consumatorul fictiv B_{n+1}, adică se taie coloana sa din tabelul soluţiei optime.

Exemplul nr. 4.2. Cererea < Oferta

Se consideră problema de transport de minimizare dată în tabelul nr. 4.7 , cu cererea mai mică decât oferta.

Tabelul nr.4.7

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	2	1	3	2	150
A_2	1	2	3	1	150
A_3	3	2	1	2	200
Cererea b_j	90	75	95	140	500 400

Pentru echilibrarea problemei de transport din tabelul nr.4.7 se introduce un consumator fictiv B_5, rezultând tabelul nr. 4.8, care ar avea nevoie de cantitatea

$b_5 = 500 - 400 = 100$, iar costurile sale unitare de transport sunt zero, $c_{i5} = 0$, i = 1, 2 , 3.

Tabelul nr.4.8

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Oferta a_i
A_1	2 0	1 50	3 0	2 0	0 100	150, 50, 0
A_2	1 90	2 0	3 0	1 60	0 0	150, 60, 0
A_3	3 0	2 25	1 95	2 80	0 0	200, 105, 80, 0
Cererea b_j	90 0	75 25 0	95 0	140 80 0	100 0	S = 500

Valoarea funcţiei obiectiv f pe soluţia de bază din tabelul nr.4.8 este f = 455 u. m.

Se determină o soluţie de bază prin metoda costului minim pe linie.

Variabilele de bază sunt: VB = {X_{12} , X_{15} , X_{21} , X_{24} , X_{32} , X_{33} , X_{34} }

m + n - 1 = 3 + 5 – 1 = 7 , sunt şapte variabile pozitive, deci este soluţie de bază nedegenerată.

Se rezolvă cu programul Qsb, rezultând soluţia optimă din tabelul nr. 4.9.

(X^1_{optim}) Tabelul nr.4. 9.

2 0	1 75	3 0	2 0	0 75
1 90	2 0	3 0	1 60	0 0
3 0	2 0	1 95	2 80	0 25

Valoarea funcţiei obiectiv f pe soluţia optimă este f = 480 u. m.

min f = 480 u. m.

Se revine la problema de transport neechilibrată iniţială prin renunţarea la ultima coloană corespunzătoare consumatorului fictiv B_5 în tabelul nr. 4.9, rezultând soluţia optimă a problemei iniţiale în tabelul nr.4. 10.

(X^1_{optim}) Tabelul nr.4.10

2 0	1 75	3 0	2 0
1 90	2 0	3 0	1 60
3 0	2 0	1 95	2 80

Deci, depozitul A_1 va vinde doar 75 unităţi de produs din 150 disponibile, depozitul A_2 va vinde tot ce poate oferi : 150 unităţi de produs, iar depozitul A_3 va vinde 175 unităţi de produs din 200 disponibile.

min f = 480 u.m.

4.1.2.2. CAZUL CEREREA > OFERTA

Se consideră problema de transport de minimizare dată în tabelul nr.4.11 , cu cererea mai mare decât oferta. Deci $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Tabelul nr.4.11

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil (Oferta) a_i
A_1	C_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Necesar (Cererea) b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Problema de transport neechilibrată, cu cererea mai mare decât oferta, se echilibrează prin introducerea unui depozit fictiv A_{m+1} care ar avea de oferit cantitatea de produs a_{m+1} din relaţia (4.19) , iar costurile sale unitare de transport sunt zero.

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (4.19)$$

$$c_{m+1,\,j} = 0 \text{ , } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Practic, la tabelul nr. 4.11 al problemei neechilibrate, cu cererea mai mare decât oferta, se mai adaugă o linie pentru depozitul fictiv A_{m+1} ca în tabelul nr. 4.12.

Tabelul nr. 4.12

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil (Oferta) a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
A_{m+1}	0	0	…	0	a_{m+1}
Necesar (Cererea) b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Se determină soluţia optimă a problemei de transport echilibrată dată de tabelul nr.4.12, iar soluţia optimă a problemei de transport iniţiale neechilibrate din tabelul nr.4.11 , cu cererea mai mare decât oferta, se obţine renunţând la depozitul fictiv A_{m+1}, adică se taie linia sa din tabelul soluţiei optime.

Exemplul nr. 4.3. Cererea > Oferta

Se consideră problema de transport de minimizare dată în tabelul nr. 4.13 , cu cererea mai mare decât oferta.

Tabelul nr.4.13

A_i / B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	4	2	3	1	150
A_2	2	5	1	3	175
A_3	3	1	2	4	125
Cererea b_j	100	120	140	165	450 525

Pentru echilibrarea problemei de transport se introduce în tabelul nr.4.14 un depozit fictiv A_4 care ar avea oferta sa, cantitatea $a_4 = 525 – 450 = 75$, iar costurile sale unitare de transport sunt zero, $c_{4j} = 0$, j = 1, 2 , 3, 4, 5.

Tabelul nr. 4.14

A_i / B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	4 0	2 0	3 0	1 150	150, 0
A_2	2 35	5 0	1 140	3 0	175, 35, 0
A_3	3 5	1 120	2 0	4 0	125, 5, 0
A_4	0 60	0 0	0 0	0 15	75, 15, 0
Cererea b_j	100 65 60 0	120 0	140 0	165 15 0	525

Se determină o soluţie de bază prin metoda costului minim pe linie.

Valoarea funcţiei obiectiv f pe soluţia de bază este f = 495 u.m.

Variabilele de bază sunt: VB = {X_{14} , X_{21} , X_{23}, X_{31} , X_{32} , X_{41} , X_{44}}

m + n - 1 = 4 + 4 – 1 = 7 , sunt şapte variabile pozitive, deci este soluţie de bază nedegenerată.

Soluţia din tabelul nr.4.14 este optimă, notată cu X^1_{optim} , min f = 495 u. m.

Se revine la problema de transport neechilibrată iniţială prin renunţarea la ultima linie corespunzătoare depozitului A_4 rezultând soluţia optimă din tabelul nr. 4.15.

Tabelul nr.4.15

A_i / B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	4 0	2 0	3 0	1 150	150
A_2	2 35	5 0	1 140	3 0	175
A_3	3 5	1 120	2 0	4 0	125
Cererea b_j	100	120	140	165	

min f = 495 u. m.

Consumatorul B_1 primeşte 35 unităţi de produs, deşi avea nevoie de 100; consumatorul B_2 primeşte 120 unităţi de produs, exact cât are nevoie; consumatorul B_3 primeşte 140 unităţi de produs, exact cât are nevoie; consumatorul B_4 primeşte 150 unităţi de produs, deşi avea nevoie de 165.

4. 2. PROBLEMA DE TRANSPORT DE MAXIMIZARE

Există probleme practice al căror model matematic este acelaşi cu al problemei de transport de minimizare, dar care cer maximizarea funcţiei obiectiv.

Dacă în problema de transport considerată în relaţiile (4.8) – (4.11) se consideră ca şi criteriu de optimizare criteriul de maximizare a funcţiei obiectiv f, se obţine modelul matematic al problemei de transport de maximizare, dată de relaţiile (4.20).

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_{ij} = a_i}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{X_{ij} = b_j}\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mathbf{X_{ij} \geq 0}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \mathbf{(4.20)}$$

$$\mathbf{f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . X_{ij}}$$

$$\mathbf{\max f(X)}$$

unde: $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$, $X = (X_{ij})$, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n;

Se presupune că problema de transport de maximizare (4.20) este echilibrată, este adevărată relaţia (4.21).

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \textbf{(4. 21)}$$

Problema de transport de maximizare (4.20) se rezolvă asemănător cu problema de transport de minimizare, în două etape. În prima etapă se determină o soluţie de bază a problemei (4.20) cu una din metodele:

- metoda colţului nord-vest, care este aceeaşi cu cea analizată la problema de transport de minimizare;
- metodele costului minim pe linie, pe coloană sau pe ansamblu matrice costuri, se înlocuiesc cu metodele profitului (venitului, costului) maxim pe linie, pe coloană sau pe ansamblu matrice a profitului (venitului, costurilor), deci se alege profitul (venitul, costul) maxim pe linie, pe coloană sau pe ansamblu matrice, pentru a determina variabila cu care se începe găsirea soluţiei de bază.

În etapa a doua se utilizează soluţia de bază determinată în prima etapă, aplicând algoritmul potenţialelor pentru problema de maximizare.

Observaţie.

Dacă se rezolvă problema de transport de maximizare (4.20), obţinându-se soluţia optimă

$$X^{max} = (X_{ij}^{max}) , i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n;$$

şi valoarea maximă a funcţiei obiectiv este f_{max} , apoi considerăm problema de transport de minimizare obţinută din relaţiile (4.20), dar se cere min f şi i se determină soluţia optimă (de minimizare, nedorită)

$$X^{min} = (X_{ij}^{min}) , i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n;$$

cu valoarea minimă a funcţiei obiectiv f_{min} , se obţine intervalul de încadrare a profitului total f,

$$f \in [f_{min} , f_{max}]$$

Evident că este preferabilă soluţia optimă f_{max} , dar în situaţia cea mai nefavorabilă profitul (venitul) total este f_{min} .

Exemplul nr. 4.5. Prezentare teoretică

Problema de transport de maximizare –maximizarea profitului

În fabricile (secţiile, atelierele) F_1, F_2 , …, F_m se pot fabrica produsele din tipurile P_1 , P_2 , … , P_n . În cele m fabrici (secţii, ateliere) condiţiile de fabricaţie sunt diferite, deci cele n tipuri de produse se pot fabrica cu costuri de producţie diferite, rezultând un profit diferit la fabricarea şi vânzarea aceluiaşi tip de produs, egal cu c_{ij} pentru produsul P_j fabricat în F_i . Oferta lui F_i este capacitatea sa maximă de producţie egală cu a_i , i = 1, 2, ..., m, iar cererea produsului P_j este egală cu b_j , j = 1, 2, ..., n, conform tabelului nr.4.22. Trebuie să se determine cantitatea care trebuie să se fabrice din fiecare produs în fiecare fabrică (secţie, atelier) astfel încât profitul să fie maxim. Se va rezolva prin problema de transport de maximizare.

Tabelul nr.4.22

P_j / F_i	P_1	P_2	...	P_n	Capacitatea maximă de producţie (Disponibil, Oferta) a_i
F_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
F_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
F_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Necesar (Cererea) b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Se va rezolva prin modelul matematic al problemei de transport de maximizare, dat de relaţiile (4.33). Se notează cu X_{ij} cantitatea din produsul P_j ce se va fabrica în fabrica (secţia, atelierul) F_i , i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n. Se presupune ca Oferta = Cererea, = . Modelul matematic este o problemă de transport de maximizare.

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_{ij} = a_i}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{X_{ij} = b_j}\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mathbf{X_{ij} \geq 0}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (4.33)$$

$$\mathbf{f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . X_{ij}}$$

$$\mathbf{max\ f(X)}$$

unde: $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$, $X = (X_{ij})$, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n;

Problema concretă

În fabricile (secţiile, atelierele) F_1, F_2 , F_3 se pot fabrica produsele din tipurile P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 . În cele trei fabrici (secţii, ateliere) condiţiile de fabricaţie sunt diferite, deci cele cinci tipuri de produse se pot fabrica cu costuri de producţie diferite, rezultând un profit diferit la fabricarea şi vânzarea aceluiaşi tip de produs, conform tabelului nr. 4.23. Profitul unitar obţinut prin fabricarea şi vânzarea produsului P_j fabricat în fabrica (secţia, atelierul) F_i este egal cu c_{ij} , i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5. Profitul unitar, oferta şi cererea sunt date în tabelul nr. 4.23. Să se determine cantitatea care trebuie să se fabrice din fiecare produs în fiecare fabrică (secţie, atelier) astfel încât profitul să fie maxim.

Se determină soluţia de bază prin metoda profitului maxim pe linie

Se notează cu X_{ij} cantitatea din produsul P_j ce se va fabrica în fabrica (secţia, atelierul) F_i , i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5.

Modelul matematic:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 175$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 225$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 200$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 130$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 90$$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 120$
$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 180$
$X_{15} + X_{25} + X_{35} = 80$
$X_{ij} \geq 0$, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5
$f = 2.X_{11} + 3.X_{12} + \ldots + 4.X_{35}$
max f

Tabelul nr.4.23

P_j / F_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Capacitatea maximă de producţie (Oferta) a_i
F_1	2 0	3 0	1 0	4 175	3 0	175, 0
F_2	1 0	2 90	4 120	3 5	1 10	225, 105, 100, 10, 0
F_3	4 130	2 0	1 0	2 0	4 70	200, 70, 0
Cererea (Necesar) b_j	130 0	90 0	120 0	180 5 0	80 70 0	S = 600

Valoarea funcţiei obiectiv f pe soluţia de bază determinată este f = 2185 u. m. Variabilele de bază sunt: VB = {X_{14} , X_{22} , X_{23}, X_{24} , X_{25} , X_{31}, X_{35}}
m + n - 1 = 3 + 5 – 1 = 7 , sunt şapte variabile pozitive, deci este soluţie de bază nedegenerată.

Tabelul nr.4.24. Soluţia optimă

2 0	3 0	1 0	4 165	3 10
1 0	2 90	4 120	3 15	1 0
4 130	2 0	1 0	2 0	4 70

Valoarea lui f pe noua soluţie de bază este: f = 2195 u. m.

VB = {X_{14} , X_{15} , X_{22} , X_{23}, X_{24} , X_{31}, X_{35}}
S-a obţinut soluţia optimă (prin calcul sau cu programul Qsb) în tabelul nr.4.24 , max f = 2195.
$Z_{12} = 0$, optim dublu, a doua soluţie optimă se obţine prin introducerea în bază a lui X_{12}

Tabelul nr.4.25. Soluţia optimă

2 0	3 90	1 0	4 75	3 10
1 0	2 0	4 120	3 105	1 0
4 130	2 0	1 0	2 0	4 70

max f = 2195 u. m.

Dacă în problema de transport din tabelul nr. 4.23 se va considera min f, se va determina soluţia pesimă, cea mai defavorabilă şi nedorită, cu cel mai mic profit în condiţiile date (prin calcul sau cu programul Qsb), din tabelul nr. 4.26 şi min f = 925 u. m.,

Tabelul nr.4.26

2 55	3 0	1 120	4 0	3 0
1 75	2 70	4 0	3 0	1 80
4 0	2 20	1 0	2 180	4 0

deci,

$$f \in [\, f_{min} , f_{max} \,]$$

rezultă:

$$f \in [\, 925 , 2195 \,] ,$$

evident că este dorită şi preferată soluţia optimă max f = 2195 u. m.

Pe calculatoare se pot utiliza pentru rezolvarea problemei de transport (echilibrată sau neechilibrată, de minimizare sau de maximizare) programele:

- Qsb, modulul Transshipment problem;
- Dsspom, modulul Transportation Method;
- QM;
- Lindo sau alte programe.

4. 3. PROBLEMA DE TRANSPORT CU RUTE INTERZISE (BLOCATE)

Există situaţii practice în care anumite rute între furnizori şi consumatori nu pot fi folosite la un moment dat, numindu-le rute interzise sau blocate, dar trebuie rezolvată problema de transport. Rezolvarea problemei de transport cu rute interzise (blocate) se face cu problema de transport de minimizare clasică, obişnuită, dar se modifică costurile unitare de transport ale rutelor interzise (blocate), atribuindu-le valori mai mari decât toate costurile c_{ij} pentru ca algoritmul să ocolească rutele interzise. De exemplu, dacă din depozitul A_k nu se poate transporta în punctul de consum B_r , se va atribui lui c_{kr} o valoare mare care verifică: $c_{kr} > c_{ij}$, i = 1, 2, …, m ; j = 1, 2, …, n. Variabila X_{kr} nu va fi de bază nici în soluţia de bază iniţială, nici pe parcursul iteraţiilor algoritmului.

Observaţie

Dacă sunt verificate inegalităţile:

$$a_k > \frac{1}{2} . \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$$b_r > \frac{1}{2} . \sum_{j=1}^{n} b_j$$

, atunci ruta A_k , B_r nu poate fi evitată oricât de mare ar fi valoarea c_{kr} atribuită costului unitar corespunzător. Trebuie căutat încă un furnizor sau consumator pentru rezolvarea problemei.

Exemplul nr. 4.4.

Se consideră problema de transport de minimizare dată în tabelul nr.4.7 , pe care o reluăm în tabelul nr.4.16, considerând că ruta de la A_1 la B_3 este interzisă. Se va atribui un

cost mai mare lui c_{13} decât toate costurile din tabel, de exemplu se pune $c_{13} = 99$ în tabelul nr. 4.17 .

Tabelul nr.4.16

A_i / B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3	2	**1**	1	140
A_2	2	1	3	1	180
A_3	1	2	3	1	80
Cererea b_j	90	110	115	85	S = 400

Tabelul nr.4. 17

A_i / B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3 0	2 55	**99** **0**	1 85	140, 55, 0
A_2	2 10	1 55	3 115	1 0	180, 125, 115, 0
A_3	1 80	2 0	3 0	1 0	80, 0
Cererea b_j	90 10 0	110 55 0	115 0	85 0	S = 400

Se determină o soluţie de bază în tabelul nr.4.17 prin metoda costului minim pe ansamblu matrice. Variabilele de bază sunt: VB = $\{X_{12}$, X_{14} , X_{21}, X_{22} , X_{23} , $X_{31}\}$, deci X_{13} nu este variabilă de bază. Valoarea funcţiei obiectiv f pe soluţia de bază este f = 695 u.m. Se rezolvă problema de transport din tabelul nr.4.17 cu programul Qsb şi rezultă că soluţia de bază din tabelul nr. 4.17 este optimă. Ruta din A_1 la B_3 este evitată, nu este folosită, min f = 695 u. m.

Laborator: se vor face diverse modificări ale coeficienţilor problemelor de transport şi rezolvarea problemelor respective. Se pot analiza şi rezolva probleme concrete propuse de studenţi.

4. 4. PROBLEMA DE TRANSPORT CU CAPACITĂŢI LIMITATE

4. 4.1. PROBLEMA DE TRANSPORT CU CAPACITĂŢI LIMITATE MONOOBIECTIV

Există probleme de transport cu limitări ale capacităţilor de transport pe anumite rute. Un produs omogen este stocat în depozitele (localităţile) A_1 , A_2 , …, A_m respectiv în cantităţile a_1 , a_2 , …, a_m şi trebuie transportat în centrele de consum (magazine, firme, localităţi) B_1 , B_2 , …, B_n unde este cerut respectiv în cantităţile b_1 , b_2 , …, b_n . Costul transportului unei unităţi de produs din depozitul A_i la centrul de consum B_j este egal cu c_{ij} unităţi monetare, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n. Capacitatea maximă de transport din depozitul A_i în centrul de consum B_j este egală cu d_{ij} , i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n.. Se pune problema determinării cantităţilor de produs ce urmează să fie transportate de la depozite la centrele de consum, astfel încât să nu depăşească disponibilul (oferta), cererea să fie satisfăcută, capacitatea rutei să nu fie depăşită şi costul total al transportului să fie minim.

Se presupune că:

$a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} > 0$, $d_{ij} > 0$, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n;

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} \geq b_j \quad , \quad j = 1, 2,...,n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \geq a_i \quad , \quad i = 1, 2,..., m ;$$

Se va presupune că cererea este egală cu oferta, deci problema de transport cu capacităţi limitate este echilibrată:

.

Se notează cu X_{ij} cantitatea de produs ce va fi transportată din A_i în B_j ,

$$X = (X_{ij}), i = 1, 2,..., m; \quad j = 1, 2,..., n.$$

Schematic transportul va fi reprezentat astfel:

$$A_i , a_i \xrightarrow[X_{ij}]{c_{ij} , d_{ij}} B_j , b_j$$

Modelul matematic al problemei de transport cu capacităţi limitate este în relaţiile (4. 45).

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i , \; i = 1, 2, . . ., m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j , \; j = 1, 2, . . ., n;$$

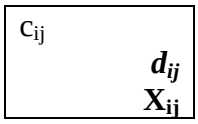
$$0 \leq X_{ij} \leq d_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, . . ., m; \; j = 1, 2, . . ., n; \qquad \textbf{(4.45)}$$

$$X_{ij} \geq 0 , \; i = 1, 2, . . ., m; \; j = 1, 2, . . ., n;$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . X_{ij}$$

$$\min f(X)$$

Problema de transport cu capacităţi limitate se poate pune într-un tabel de transport ca la problema de transport de minimizare clasică, dar în aceeaşi celulă (i, j) a tabelului se pun c_{ij}, d_{ij}, X_{ij} .



Rezolvarea problemei de transport cu capacităţi limitate se poate face în două etape, se determină o soluţie de bază (metoda colţului Nord-Vest, metoda costului minim pe linie, metoda costului minim pe coloană, metoda costului minim pe matricea costurilor) prin o metodă modificată şi apoi se aplică algoritmul potenţialelor.

Altă rezolvare a problemei de transport cu capacităţi limitate (care este o problemă de programare liniară de o formă particulară) este prin algoritmii simplex primal sau dual cu care se rezolvă problemele de programare liniară.

O altă rezolvare a problemei de transport cu capacităţi limitate se poate face prin programare liniară prin redenumirea variabilelor cu doi indici prin variabile cu un indice şi apoi se utilizează un program pe calculator, de exemplu Qsb, modulul *integer linear programming*. Sunt posibile două variante de introducere a variabilelor.
De exemplu, se notează:

$$Y_1 = X_{11} \text{ , } Y_2 = X_{12} \text{ etc.}$$

Sau a doua variantă, la întrebarea programului Qsb:

Do you want to use default variable names (X1, X2, ..., Xn) (Y/N)?

Se va răspunde N, apoi când apare mesajul:

Enter the variable names using ...

Se vor introduce numele variabilelor: X11, X12, X13 etc.

Deci, $X11 = X_{11}$, $X12 = X_{12}$ etc.

Analog cu cele de mai sus, o altă rezolvare a problemei de transport cu capacităţi limitate se poate face cu programul Qsb, modulul *linear programming*, prin redenumirea variabilelor cu doi indici prin variabile cu un indice.

Exemplul nr. 4.5.

Un produs omogen este stocat în depozitele (localităţile) A_1 , A_2 , A_3 respectiv în cantităţile a_i , i = 1, 2, 3; şi trebuie transportat în centrele de consum (magazine, firme, localităţi) B_1 , B_2 , B_3 , B_4 unde este cerut respectiv în cantităţile b_j , j = 1, 2, 3, 4. Costul transportului unei unităţi de produs din depozitul A_i la centrul de consum B_j este egal cu c_{ij} unităţi monetare, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4. Capacitatea maximă de transport din depozitul A_i în centrul de consum B_j este egală cu d_{ij} , i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4. Oferta, cererea, limitările de capacitate de transport şi costurile unitare de transport sunt date în tabelul nr. 4.18. Se pune problema determinării cantităţilor de produs ce urmează să fie transportate de la depozite la centrele de consum, astfel încât să nu depăşească disponibilul (oferta), cererea să fie satisfăcută, capacitatea rutei să nu fie depăşită şi costul total al transportului să fie minim.

Tabelul nr. 4.18

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3 ***20***	2 ***10***	1 ***60***	1 ***85***	140
A_2	2 ***70***	1 ***110***	3 ***50***	1 ***50***	180
A_3	1 ***20***	2 ***30***	3 ***60***	1 ***30***	80
Cererea b_j	90	110	115	85	S = 400

Problema de transport cu capacităţi limitate din tabelul nr. 4.18 este echilibrată,
cererea = oferta = S = 400
şi sunt verificate condiţiile de existenţă a soluţiilor:

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} \geq b_j \quad , \quad j = 1, 2,...,n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \geq a_i \quad , \quad i = 1, 2,..., m ;$$

$d_{11} + d_{21} + d_{31} = 20 + 70 + 20 = 110 > b_1 = 90$ etc.
Se vor da trei rezolvări.

Soluţia 1.

Se va scrie modelul matematic similar celui din relaţiile (4.45) pentru datele concrete, apoi se va rezolva cu programul Qsb, modulul *linear programming*.

X11 + X12 + X13 + X14 = 140
X21 + X22 + X23 + X24 = 180
X31 + X32 + X33 + X34 = 80
X11 + X21 + X31 = 90
X12 + X22 + X32 = 110
X13 + X23 + X33 = 115
X14 + X24 + X34 = 85
$0 \leq$ X11 ≤ 20
$0 \leq$ X12 ≤ 10
$0 \leq$ X13 ≤ 60
$0 \leq$ X14 ≤ 85
$0 \leq$ X21 ≤ 70
$0 \leq$ X22 ≤ 110
$0 \leq$ X23 ≤ 50
$0 \leq$ X24 ≤ 50
$0 \leq$ X31 ≤ 20
$0 \leq$ X32 ≤ 30
$0 \leq$ X33 ≤ 60
$0 \leq$ X34 ≤ 30
XIJ ≥ 0, I = 1, 2, 3; J = 1, 2, 3, 4;
f = 3.X11 + 2.X12 + 1.X13 + 1.X14 + 2.X21 + 1.X22 + 3.X23 + 1.X24 + 1.X31 +
+2.X32 + 3.X33 + 1.X34
min f

Sunt 12 variabile şi 19 restricţii care se introduc în programul Qsb.

Tabelul nr. 4.19. Soluţia optimă

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3 ***20*** **0**	2 ***10*** **0**	1 ***60*** **60**	1 ***85*** **80**	140
A_2	2 ***70*** **70**	1 ***110*** **90**	3 ***50*** **20**	1 ***50*** **0**	180
A_3	1 ***20*** **20**	2 ***30*** **20**	3 ***60*** **35**	1 ***30*** **5**	80
Cererea b_j	90	110	115	85	S = 400

Se lansează programul Qsb, modulul linear programming.
Se prezintă ecranele programului Qsb pentru rezolvarea acestei probleme.
Se obţine soluţia optimă din tabelul nr.4.19 în 15 iteraţii,
min f = 600,
X11 = 0, X12 = 0, X13 = 60, X14 = 80,
X21 = 70, X22 = 90, X23 = 20, X24 = 0,
X31 = 20, X32 = 20, X33 = 35, X34 = 5.

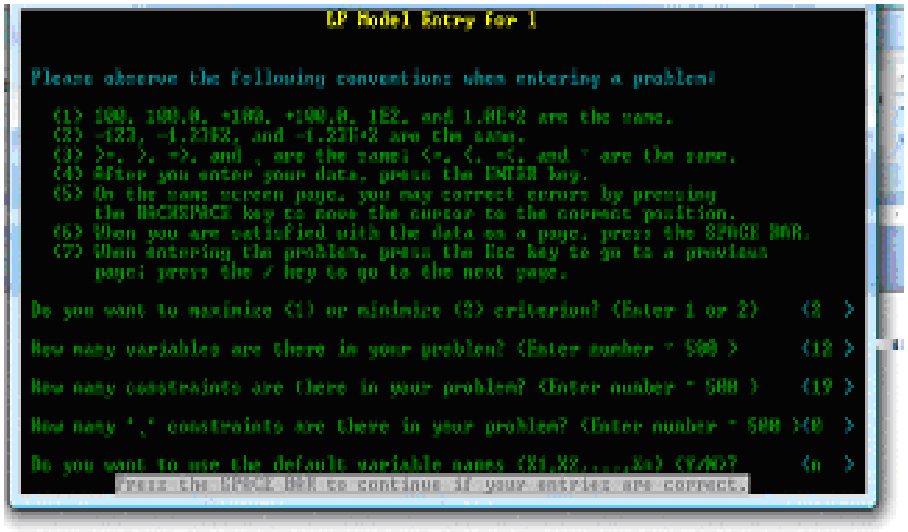


Fig.4.1.

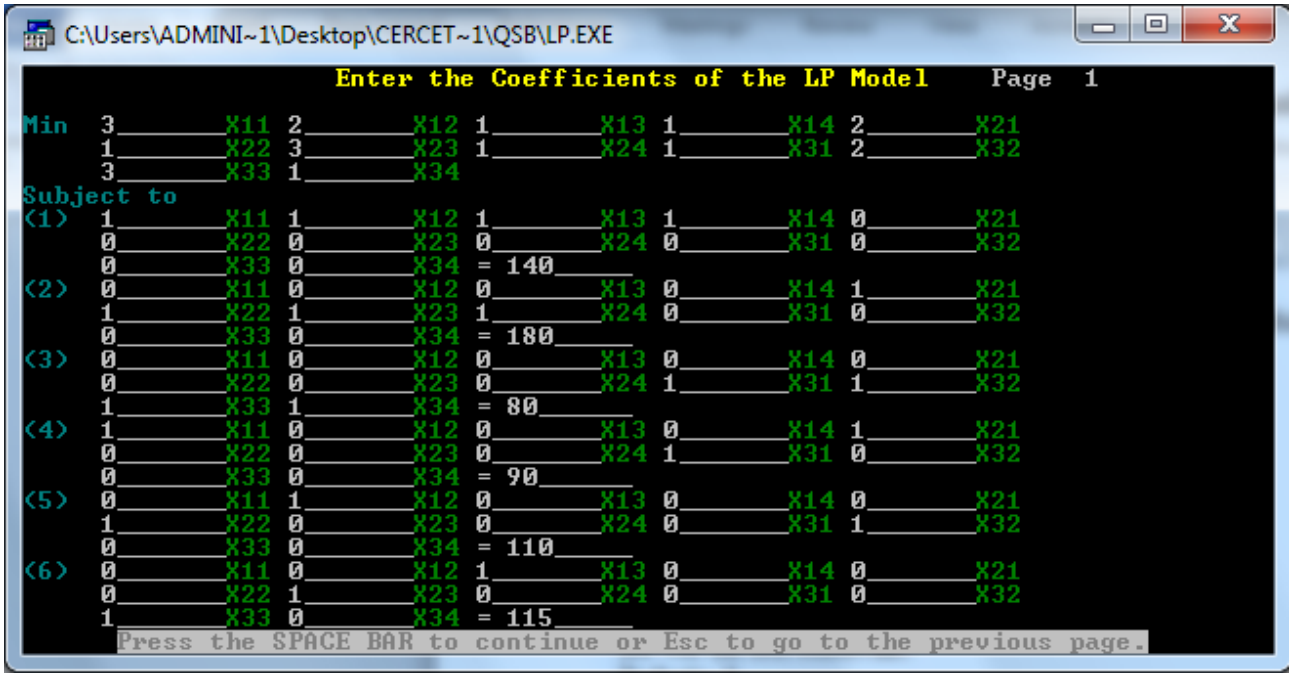

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Enter the Coefficients of the LP Model Page 1
Min 3 X11 2 X12 1 X13 1 X14 2 X21
1 X22 3 X23 1 X24 1 X31 2 X32
3 X33 1 X34
Subject to
(1) 1 X11 1 X12 1 X13 1 X14 0 X21
0 X22 0 X23 0 X24 0 X31 0 X32
0 X33 0 X34 = 140
(2) 0 X11 0 X12 0 X13 0 X14 1 X21
1 X22 1 X23 1 X24 0 X31 0 X32
0 X33 0 X34 = 180
(3) 0 X11 0 X12 0 X13 0 X14 0 X21
0 X22 0 X23 0 X24 1 X31 1 X32
1 X33 1 X34 = 80
(4) 1 X11 0 X12 0 X13 0 X14 1 X21
0 X22 0 X23 0 X24 1 X31 0 X32
0 X33 0 X34 = 90
(5) 0 X11 1 X12 0 X13 0 X14 0 X21
1 X22 0 X23 0 X24 0 X31 1 X32
0 X33 0 X34 = 110
(6) 0 X11 0 X12 1 X13 0 X14 0 X21
0 X22 1 X23 0 X24 0 X31 0 X32
1 X33 0 X34 = 115
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.

Fig.4.2.

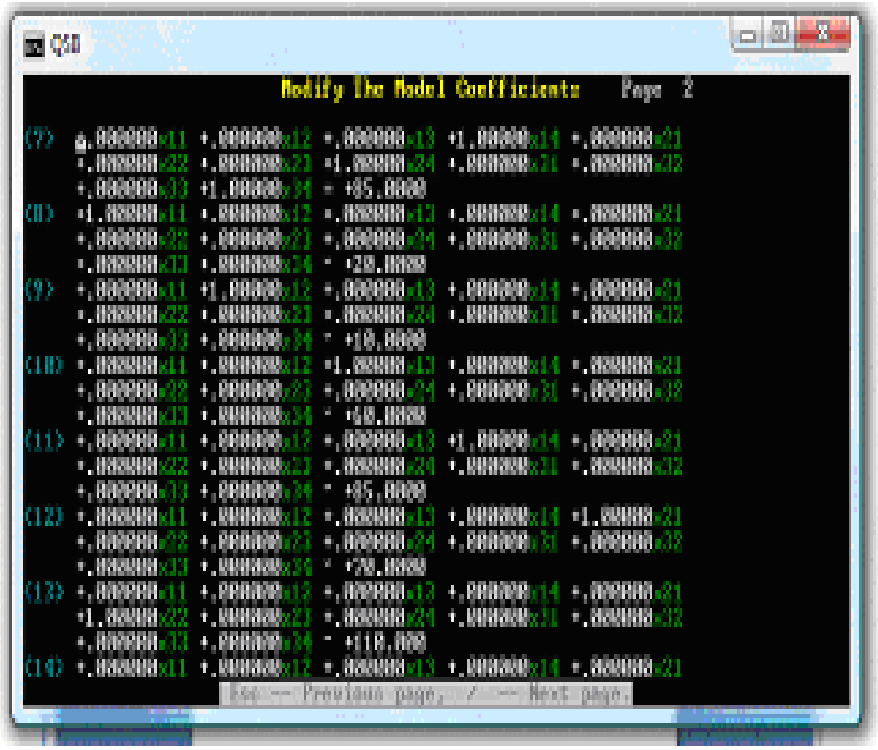

Modify the Model Coefficients Page 2

Fig.4.3.

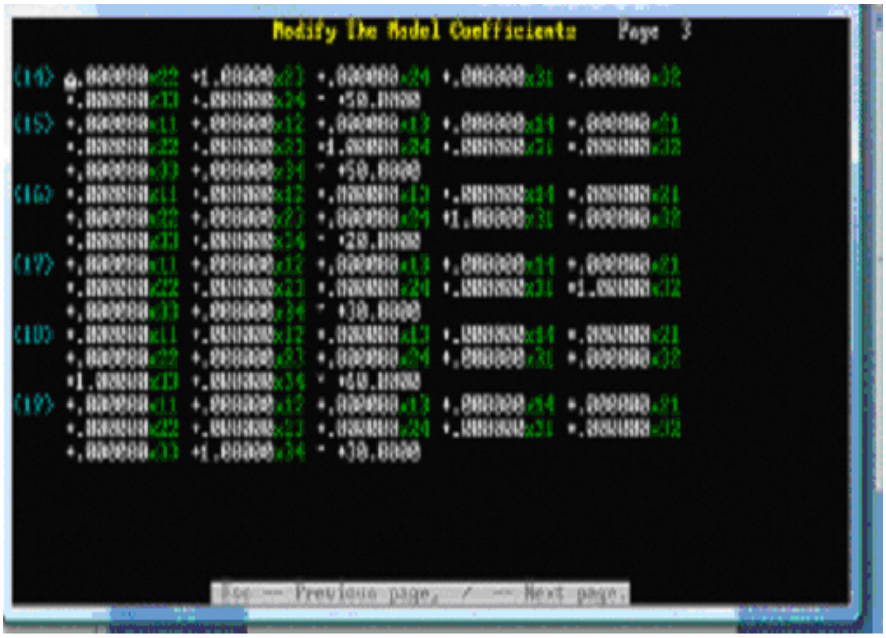


Fig.4.4.

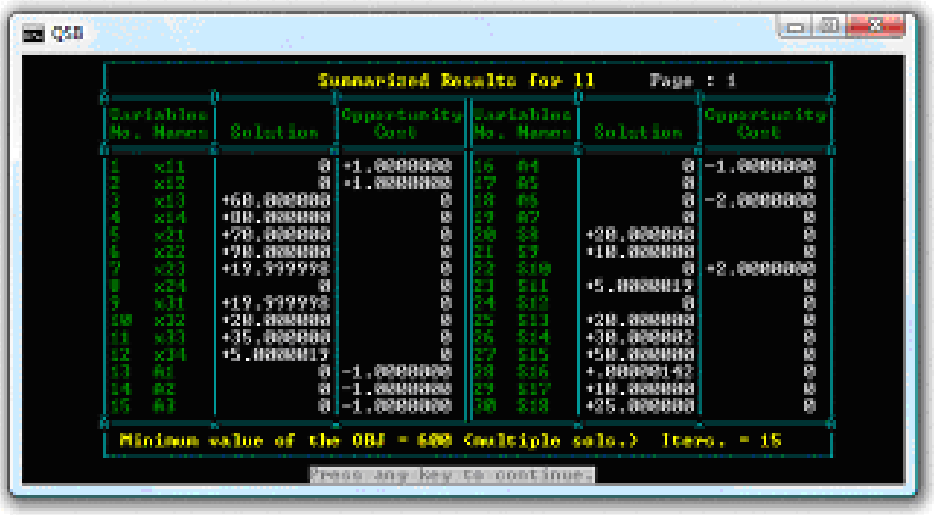


Fig.4.5.

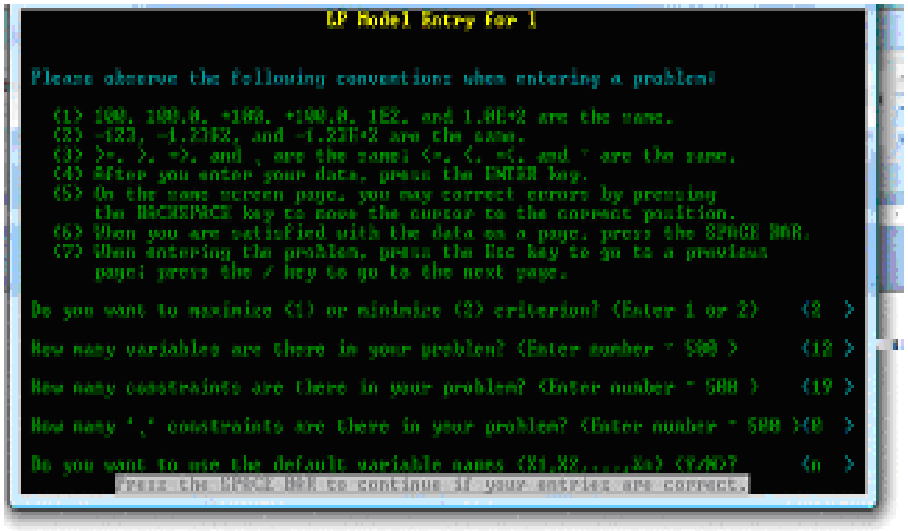
Soluţia 1b.

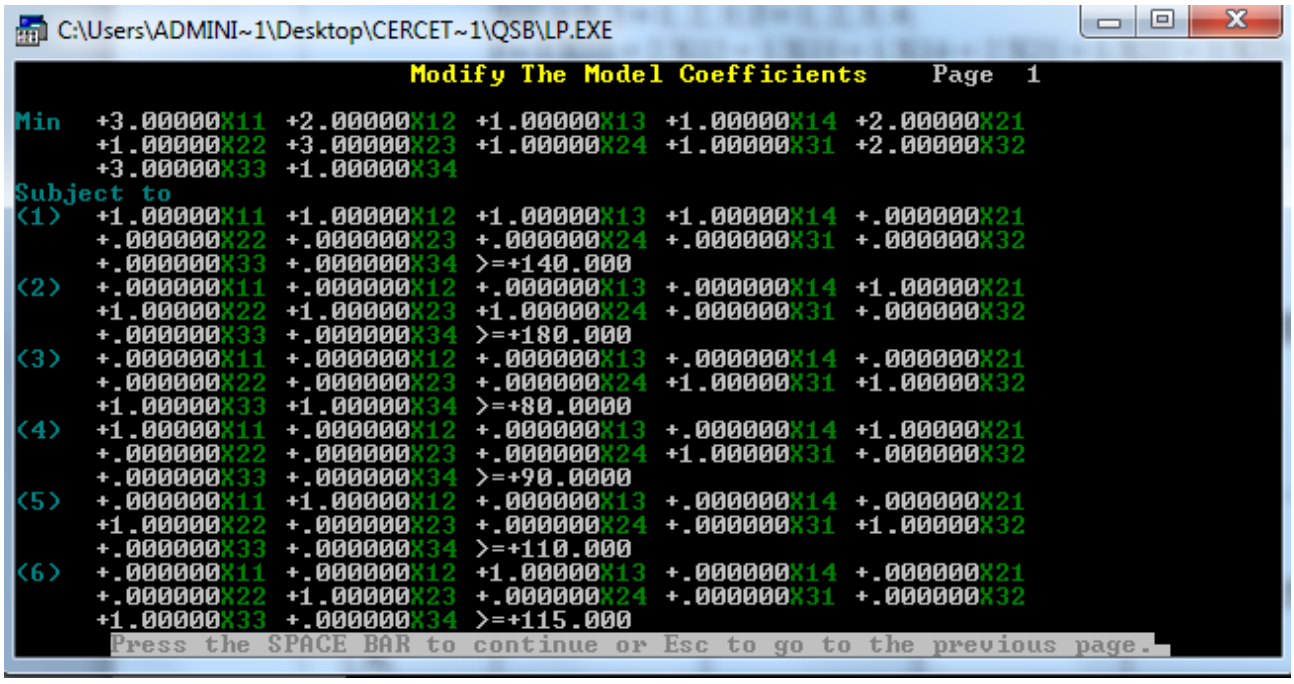
Daca nu se obtine solutie optima din cauza egalitatilor din primele 7 restrictii, erori de rotunjire, se inlocuiesc egalitatile cu inegalitati >= . Se lansează programul Qsb, modulul linear programming sau integer linear programming. Sunt 12 variabile şi 19 restricţii care se introduc în programul Qsb.

2. Varianta cu inegalitati

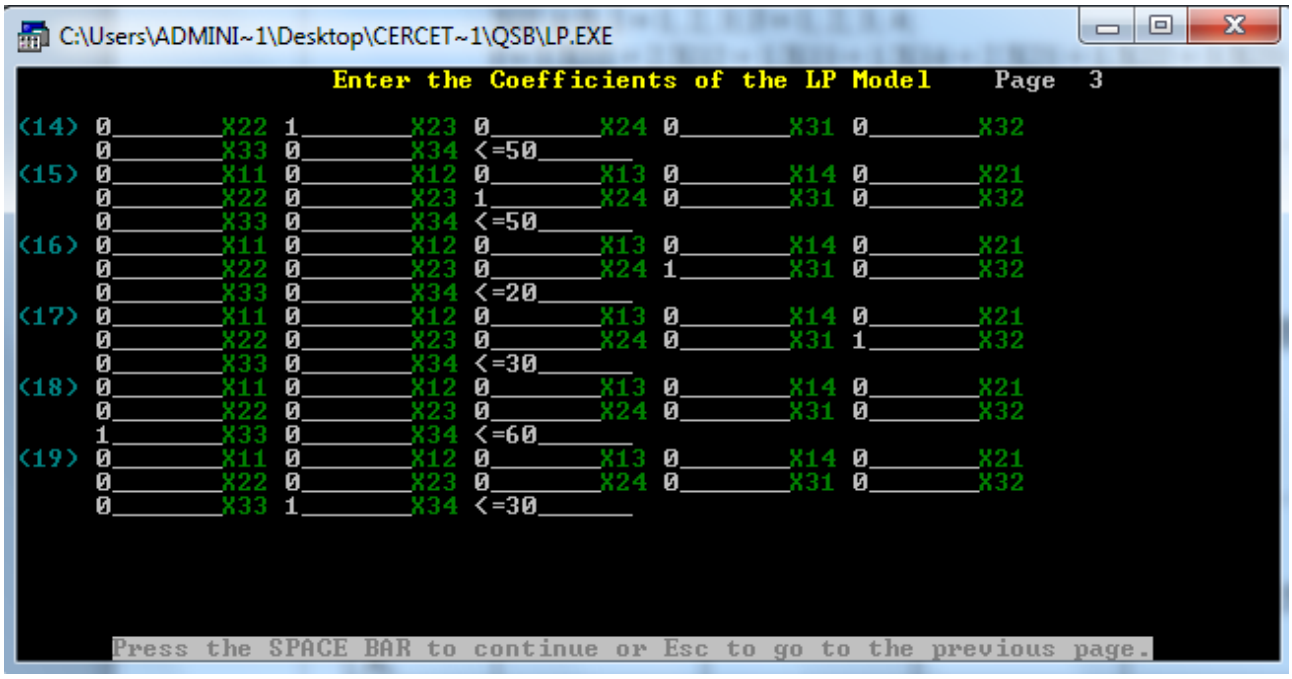
X11 + X12 + X13 + X14 >= 140
X21 + X22 + X23 + X24 >= 180
X31 + X32 + X33 + X34 >= 80
X11 + X21 + X31 >= 90
X12 + X22 + X32 >= 110
X13 + X23 + X33 > = 115
X14 + X24 + X34 >= 85

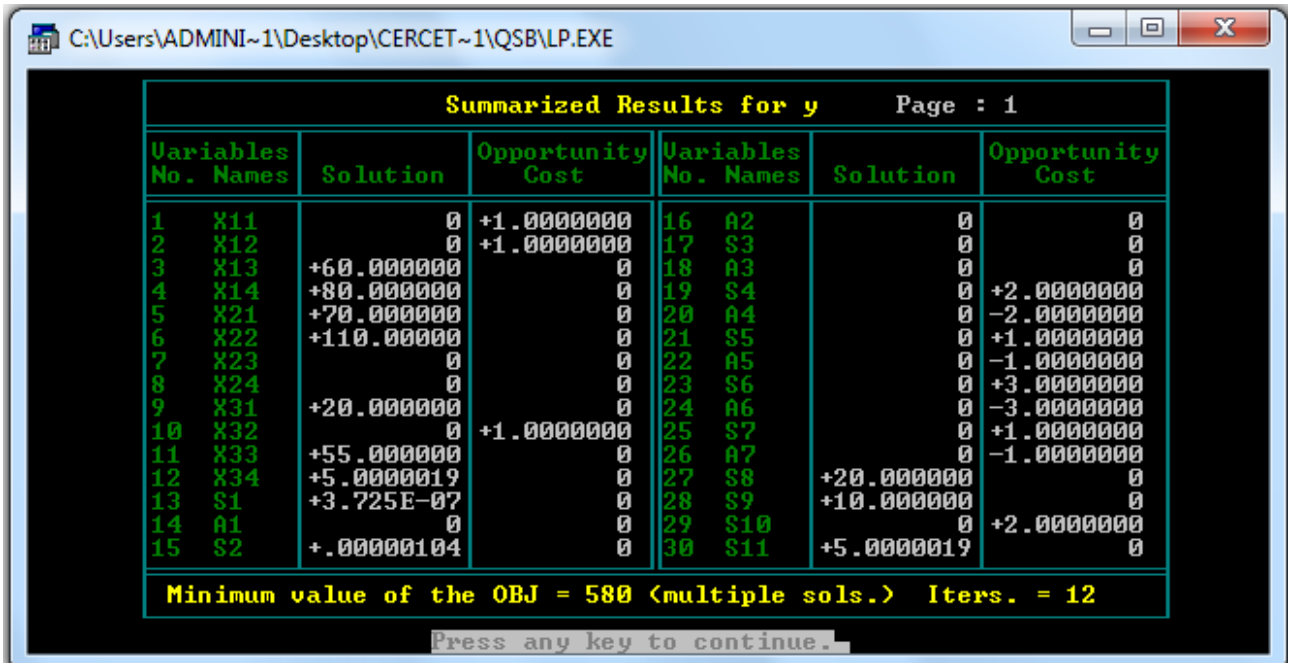
$0 \le X11 \le 20$
$0 \le X12 \le 10$
$0 \le X13 \le 60$
$0 \le X14 \le 85$
$0 \le X21 \le 70$
$0 \le X22 \le 110$
$0 \le X23 \le 50$
$0 \le X24 \le 50$
$0 \le X31 \le 20$
$0 \le X32 \le 30$
$0 \le X33 \le 60$
$0 \le X34 \le 30$
$XIJ \ge 0$, I = 1, 2, 3; J = 1, 2, 3, 4;
f = 3.X11 + 2.X12 + 1.X13 + 1.X14 + 2.X21 + 1.X22 + 3.X23 + 1.X24 + 1.X31 + +2.X32 + 3.X33 + 1.X34
min f





C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 2
(7) .000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +1.00000X14 +.000000X21
+.000000X22 +.000000X23 +1.00000X24 +.000000X31 +.000000X32
+.000000X33 +1.00000X34 ≥ +85.0000
(8) +1.00000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
+.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
+.000000X33 +.000000X34 ≤ +20.0000
(9) +.000000X11 +1.00000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
+.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
+.000000X33 +.000000X34 ≤ +10.0000
(10) +.000000X11 +.000000X12 +1.00000X13 +.000000X14 +.000000X21
+.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
+.000000X33 +.000000X34 ≤ +60.0000
(11) +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +1.00000X14 +.000000X21
+.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
+.000000X33 +.000000X34 ≤ +85.0000
(12) +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +1.00000X21
+.000000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
+.000000X33 +.000000X34 ≤ +70.0000
(13) +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
+1.00000X22 +.000000X23 +.000000X24 +.000000X31 +.000000X32
+.000000X33 +.000000X34 ≤ +110.000
(14) +.000000X11 +.000000X12 +.000000X13 +.000000X14 +.000000X21
Esc -- Previous page, / -- Next page.


C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Enter the Coefficients of the LP Model Page 3
(14) 0 X22 1 X23 0 X24 0 X31 0 X32
0 X33 0 X34 <=50
(15) 0 X11 0 X12 0 X13 0 X14 0 X21
0 X22 0 X23 1 X24 0 X31 0 X32
0 X33 0 X34 <=50
(16) 0 X11 0 X12 0 X13 0 X14 0 X21
0 X22 0 X23 0 X24 1 X31 0 X32
0 X33 0 X34 <=20
(17) 0 X11 0 X12 0 X13 0 X14 0 X21
0 X22 0 X23 0 X24 0 X31 1 X32
0 X33 0 X34 <=30
(18) 0 X11 0 X12 0 X13 0 X14 0 X21
0 X22 0 X23 0 X24 0 X31 0 X32
1 X33 0 X34 <=60
(19) 0 X11 0 X12 0 X13 0 X14 0 X21
0 X22 0 X23 0 X24 0 X31 0 X32
0 X33 1 X34 <=30
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.



Tabelul nr. 4.19a1. Soluţia optimă

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3 ***20*** **0**	2 ***10*** **0**	1 ***60*** **60**	1 ***85*** **80**	140
A_2	2 ***70*** **70**	1 ***110*** **110**	3 ***50*** **0**	1 ***50*** **0**	180
A_3	1 ***20*** **20**	2 ***30*** **0**	3 ***60*** **55**	1 ***30*** **5**	80
Cererea b_j	90	110	115	85	S = 400

Min f =580

Soluţia 1 cuprinde erori de rotunjire. Se alege **soluţia 1b** care este rezolvarea problemei, min f = 580.

Se poate determina soluţia defavorabilă, cerând max f , cu aceleaşi restricţii.

Max f = 965

$f \in$ **[580, 965]**

Soluţia 2.

Din cauza erorilor de trunchiere, aproximare, rotunjire, nu se obţine întotdeauna soluţia optimă când restricţiile sunt cu egalităţi sau problema nu are soluţie. Se înlocuiesc egalităţile cu inegalităţi duble cu valori din vecinătatea lui a_i , respectiv b_j . Se elimină erorile de rotunjire, considerând:

$a_i \in [a_i - 0.1, a_i + 0.1]$, $b_j \in [b_j - 0.1, b_j + 0.1]$

Se rezolvă cu programul Qsb, modulul *integer linear programming.*

$X11 + X12 + X13 + X14 \leq 140.1$

$X11 + X12 + X13 + X14 \geq 139.9$

$X21 + X22 + X23 + X24 \leq 180.1$
$X21 + X22 + X23 + X24 \geq 179.9$

$X31 + X32 + X33 + X34 \leq 80.1$
$X31 + X32 + X33 + X34 \geq 79.9$

$X11 + X21 + X31 \leq 90.1$
$X11 + X21 + X31 \geq 89.9$

$X12 + X22 + X32 \leq 110.1$
$X12 + X22 + X32 \geq 109.9$

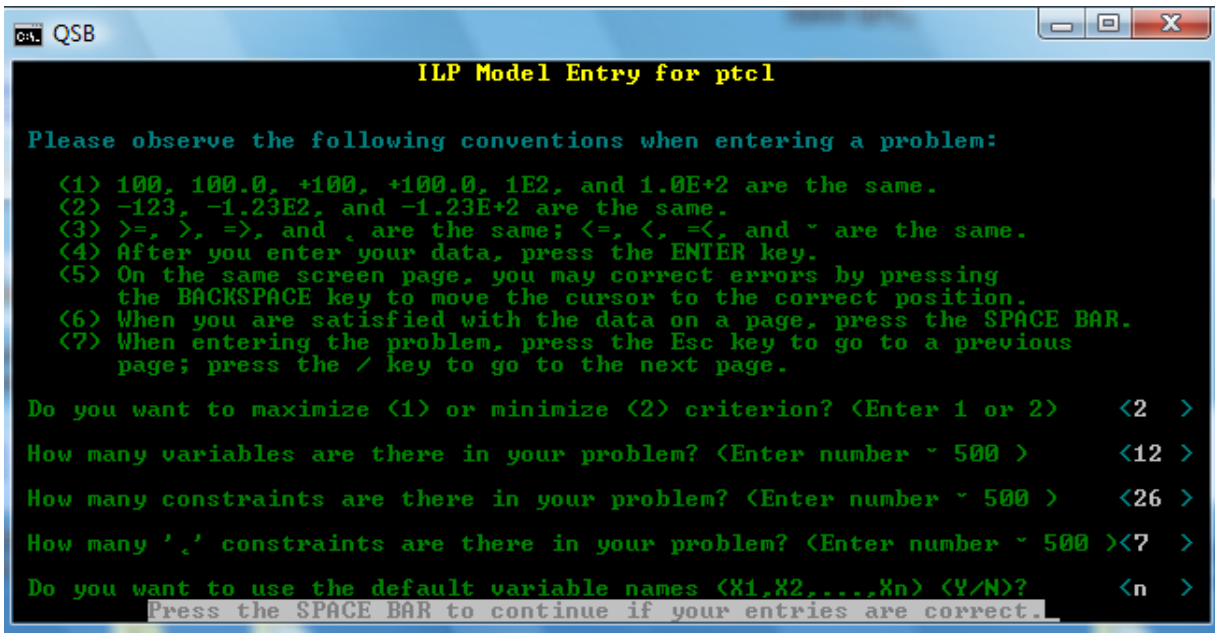
$X13 + X23 + X33 \leq 115.1$
$X13 + X23 + X33 \geq 114.9$

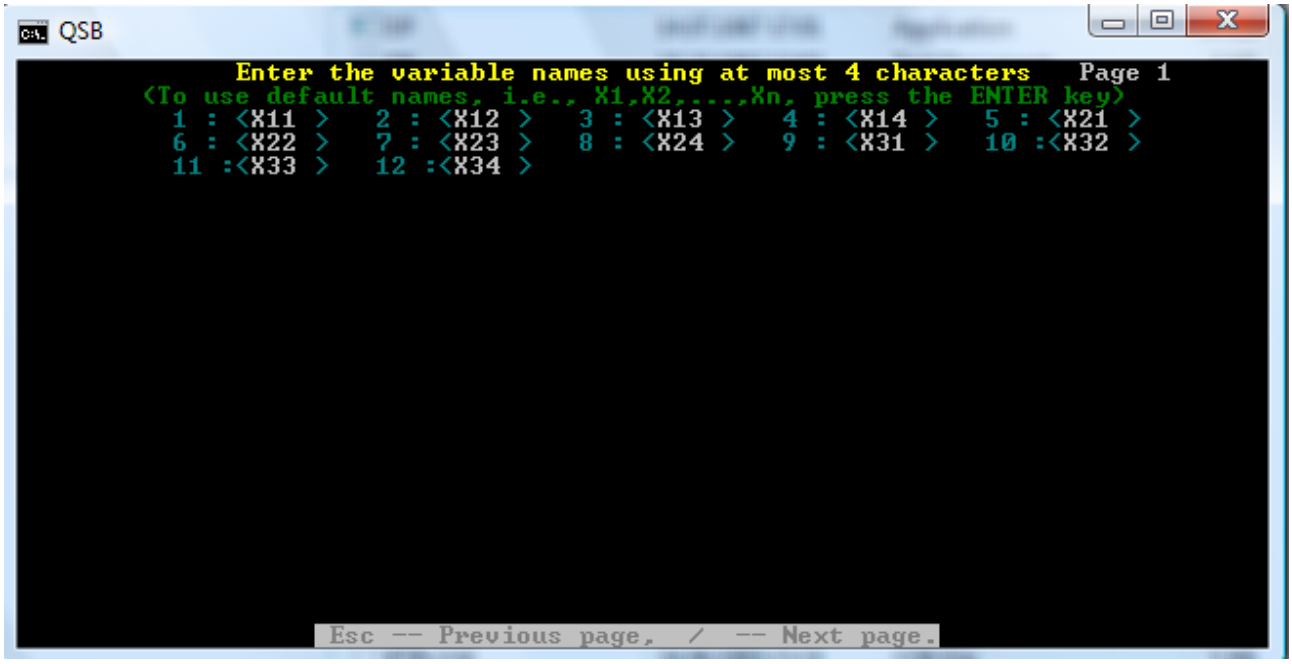
$X14 + X24 + X34 \leq 85.1$
$X14 + X24 + X34 \geq 84.9$

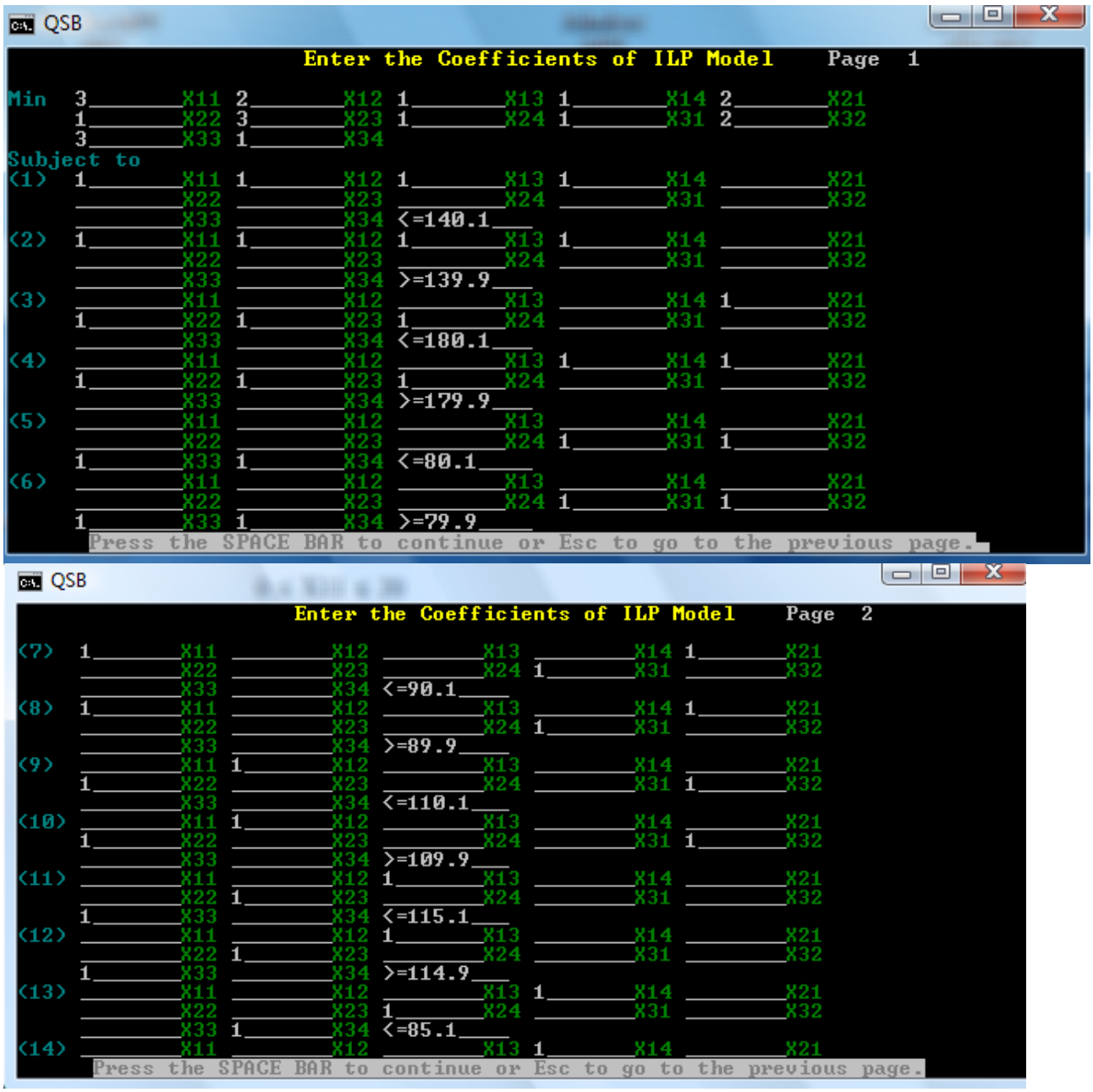
$0 \leq X11 \leq 20$
$0 \leq X12 \leq 10$
$0 \leq X13 \leq 60$
$0 \leq X14 \leq 85$
$0 \leq X21 \leq 70$
$0 \leq X22 \leq 110$
$0 \leq X23 \leq 50$
$0 \leq X24 \leq 50$
$0 \leq X31 \leq 20$
$0 \leq X32 \leq 30$
$0 \leq X33 \leq 60$
$0 \leq X34 \leq 30$

$XIJ \geq 0$, $XIJ \in \mathbf{Z}$, $I = 1, 2, 3$; $J = 1, 2, 3, 4$;
$f = 3.X11 + 2.X12 + 1.X13 + 1.X14 + 2.X21 + 1.X22 + 3.X23 + 1.X24 + 1.X31 +$
$+2.X32 + 3.X33 + 1.X34$
min f

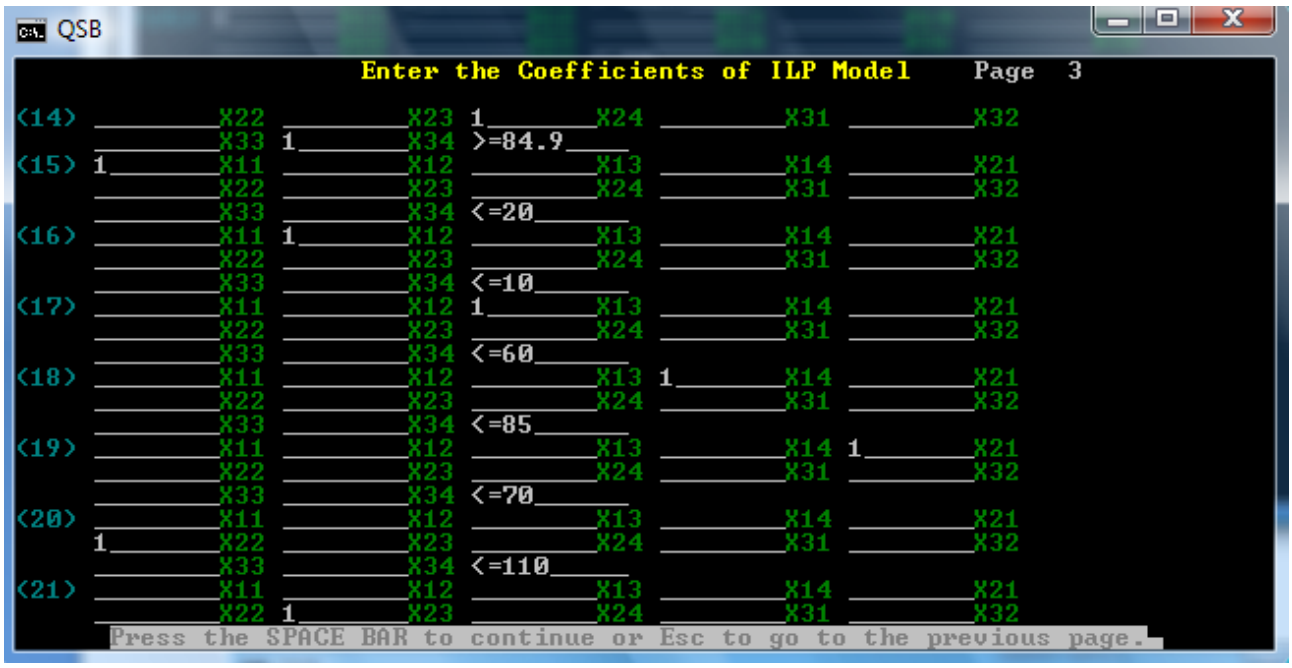
Sunt 12 variabile şi 26 de restricţii care se introduc în programul Qsb.

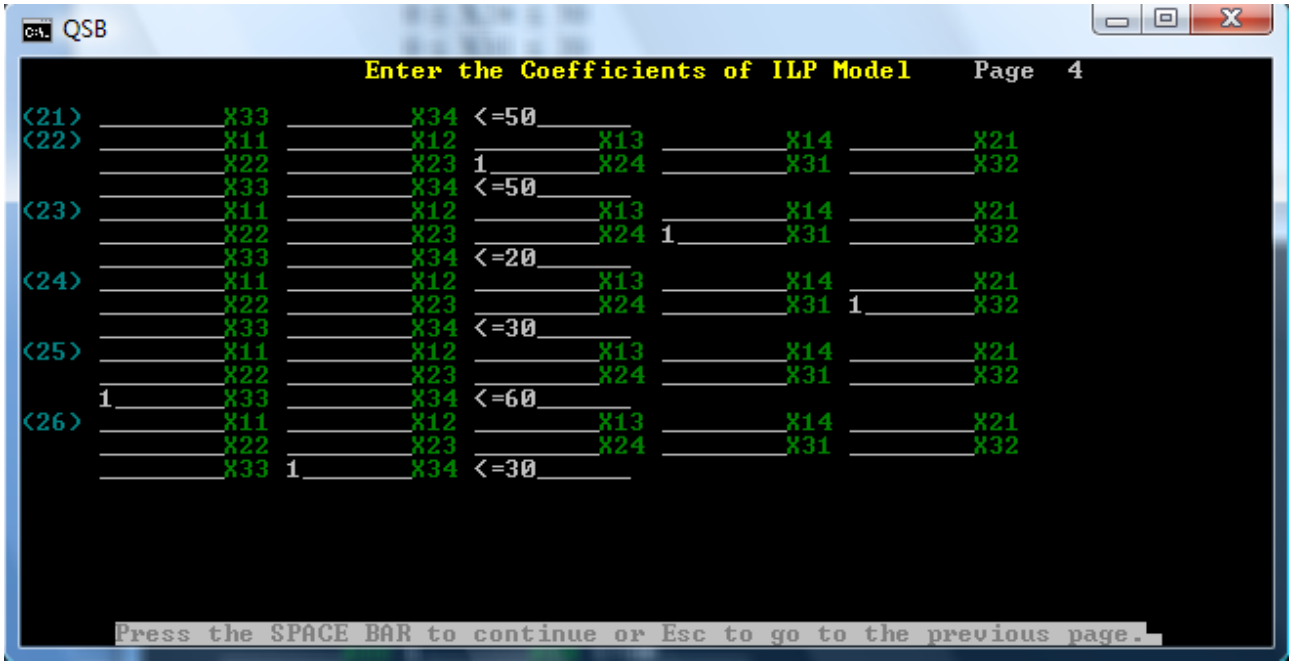

QSB
ILP Model Entry for ptcl
Please observe the following conventions when entering a problem:
(1) 100, 100.0, +100, +100.0, 1E2, and 1.0E+2 are the same.
(2) -123, -1.23E2, and -1.23E+2 are the same.
(3) >=,), =), and ¸ are the same; <=, <, =<, and ¯ are the same.
(4) After you enter your data, press the ENTER key.
(5) On the same screen page, you may correct errors by pressing
the BACKSPACE key to move the cursor to the correct position.
(6) When you are satisfied with the data on a page, press the SPACE BAR.
(7) When entering the problem, press the Esc key to go to a previous
page; press the / key to go to the next page.
Do you want to maximize (1) or minimize (2) criterion? (Enter 1 or 2) <2 >
How many variables are there in your problem? (Enter number ¯ 500) <12 >
How many constraints are there in your problem? (Enter number ¯ 500) <26 >
How many '¸' constraints are there in your problem? (Enter number ¯ 500)<7 >
Do you want to use the default variable names (X1,X2,...,Xn) (Y/N)? <n >
Press the SPACE BAR to continue if your entries are correct.

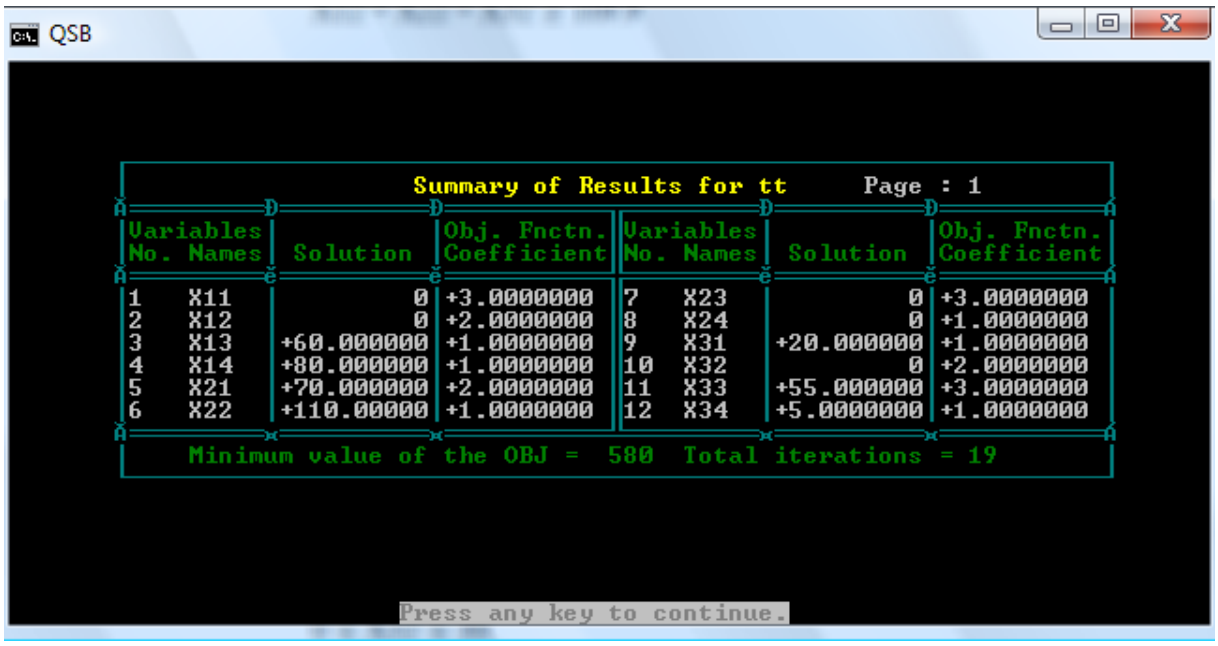

QSB
Enter the variable names using at most 4 characters Page 1
(To use default names, i.e., X1,X2,...,Xn, press the ENTER key)
1 : <X11 > 2 : <X12 > 3 : <X13 > 4 : <X14 > 5 : <X21 >
6 : <X22 > 7 : <X23 > 8 : <X24 > 9 : <X31 > 10 :<X32 >
11 :<X33 > 12 :<X34 >
Esc -- Previous page, / -- Next page.


QSB
Enter the Coefficients of ILP Model Page 1
Min 3 X11 2 X12 1 X13 1 X14 2 X21
1 X22 3 X23 1 X24 1 X31 2 X32
3 X33 1 X34
Subject to
(1) 1 X11 1 X12 1 X13 1 X14 X21
X22 X23 X24 X31 X32
X33 X34 <=140.1
(2) 1 X11 1 X12 1 X13 1 X14 X21
X22 X23 X24 X31 X32
X33 X34 >=139.9
(3) X11 X12 X13 X14 1 X21
1 X22 1 X23 1 X24 X31 X32
X33 X34 <=180.1
(4) X11 X12 X13 1 X14 1 X21
1 X22 1 X23 1 X24 X31 X32
X33 X34 >=179.9
(5) X11 X12 X13 X14 X21
X22 X23 X24 1 X31 1 X32
1 X33 1 X34 <=80.1
(6) X11 X12 X13 X14 X21
X22 X23 X24 1 X31 1 X32
1 X33 1 X34 >=79.9
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.

QSB
Enter the Coefficients of ILP Model Page 2
(7) 1 X11 X12 X13 X14 1 X21
X22 X23 X24 1 X31 X32
X33 X34 <=90.1
(8) 1 X11 X12 X13 X14 1 X21
X22 X23 X24 1 X31 X32
X33 X34 >=89.9
(9) X11 1 X12 X13 X14 X21
1 X22 X23 X24 X31 1 X32
X33 X34 <=110.1
(10) X11 1 X12 X13 X14 X21
1 X22 X23 X24 X31 1 X32
X33 X34 >=109.9
(11) X11 X12 1 X13 X14 X21
X22 1 X23 X24 X31 X32
1 X33 X34 <=115.1
(12) X11 X12 1 X13 X14 X21
X22 1 X23 X24 X31 X32
1 X33 X34 >=114.9
(13) X11 X12 X13 1 X14 X21
X22 X23 1 X24 X31 X32
X33 1 X34 <=85.1
(14) X11 X12 X13 1 X14 X21
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.


QSB
Enter the Coefficients of ILP Model Page 3
(14) _____X22 _____X23 1_____X24 _____X31 _____X32
_____X33 1_____X34 >=84.9____
(15) 1_____X11 _____X12 _____X13 _____X14 _____X21
_____X22 _____X23 _____X24 _____X31 _____X32
_____X33 _____X34 <=20_____
(16) _____X11 1_____X12 _____X13 _____X14 _____X21
_____X22 _____X23 _____X24 _____X31 _____X32
_____X33 _____X34 <=10_____
(17) _____X11 _____X12 1_____X13 _____X14 _____X21
_____X22 _____X23 _____X24 _____X31 _____X32
_____X33 _____X34 <=60_____
(18) _____X11 _____X12 _____X13 1_____X14 _____X21
_____X22 _____X23 _____X24 _____X31 _____X32
_____X33 _____X34 <=85_____
(19) _____X11 _____X12 _____X13 _____X14 1_____X21
_____X22 _____X23 _____X24 _____X31 _____X32
_____X33 _____X34 <=70_____
(20) _____X11 _____X12 _____X13 _____X14 _____X21
1_____X22 _____X23 _____X24 _____X31 _____X32
_____X33 _____X34 <=110_____
(21) _____X11 _____X12 _____X13 _____X14 _____X21
_____X22 1_____X23 _____X24 _____X31 _____X32
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.


QSB
Enter the Coefficients of ILP Model Page 4
(21) _____X33 _____X34 <=50_____
(22) _____X11 _____X12 _____X13 _____X14 _____X21
_____X22 _____X23 1_____X24 _____X31 _____X32
_____X33 _____X34 <=50_____
(23) _____X11 _____X12 _____X13 _____X14 _____X21
_____X22 _____X23 _____X24 1_____X31 _____X32
_____X33 _____X34 <=20_____
(24) _____X11 _____X12 _____X13 _____X14 _____X21
_____X22 _____X23 _____X24 _____X31 1_____X32
_____X33 _____X34 <=30_____
(25) _____X11 _____X12 _____X13 _____X14 _____X21
_____X22 _____X23 _____X24 _____X31 _____X32
1_____X33 _____X34 <=60_____
(26) _____X11 _____X12 _____X13 _____X14 _____X21
_____X22 _____X23 _____X24 _____X31 _____X32
_____X33 1_____X34 <=30_____
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.



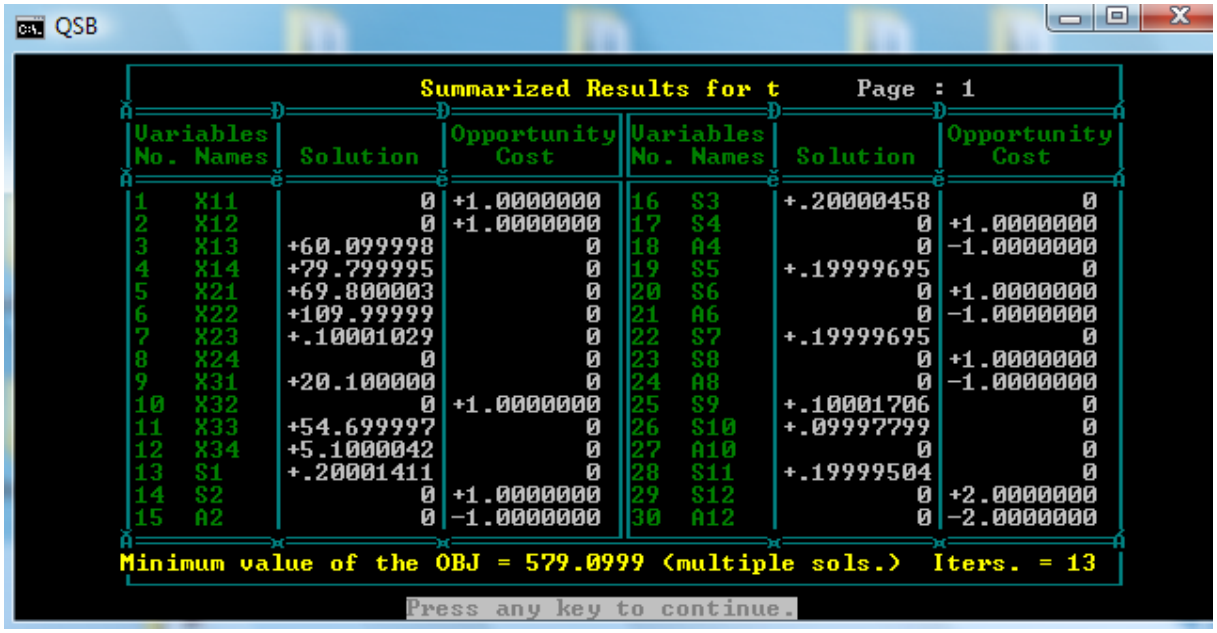
Soluţia optimă:
X11 = 0 ; X12 = 0 ; X13 = 60 ; X14 = 80 ;
X21 = 70 ; X22 = 110 ; X23 = 0 ; X24 = 0;
X31 = 20 ; X32 = 0 ; X33 = 55 ;X34 = 5 ;
Min f = 580 .
Soluţia 1 cuprinde erori de rotunjire. Se alege **soluţia 2** care este rezolvarea problemei, min f = 580.

Tabelul nr. 4.19A. Soluţia optimă

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta a_i
A_1	3 ***20*** **0**	2 ***10*** **0**	1 ***60*** **60**	1 ***85*** **80**	140
A_2	2 ***70*** **70**	1 ***110*** **110**	3 ***50*** **0**	1 ***50*** **0**	180
A_3	1 ***20*** **20**	2 ***30*** **0**	3 ***60*** **55**	1 ***30*** **5**	80
Cererea b_j	90	110	115	85	S = 400

Soluţia 3.

Soluţia optimă neîntreagă – obţinută cu programul Qsb, modulul *linear programming.*
X11 = 0 ; X12 = 0 ; X13 = 60.099998 ; X14 = 79.799995 ;
X21 = 69.800003 ; X22 = 109.99999 ; X23 = 0.10001029 ; X24 = 0;
X31 = 20.1 ; X32 = 0 ; X33 = 54.699997 ;X34 = 5.1000042 ;
Min f = 579.0999 . Se fac rotunjiri si se pune in table.



Din cele patru rezolvări se alege **soluţia 1b sau 2** , min f = 580 , care este rezolvarea problemei.

4.4.2. PROBLEMA DE TRANSPORT CU CAPACITĂŢI LIMITATE MULTIOBIECTIV

Problema de transport cu capacităţi limitate poate fi şi multiobiectiv, deci cu mai multe funcţii obiectiv care pot fi contradictorii.

Un produs omogen este stocat în depozitele (localităţile) A_1 , A_2 , …, A_m respectiv în cantităţile a_1 , $a_{2\ ,\ ...,}\ a_m$ şi trebuie transportat în centrele de consum (magazine, firme, localităţi) B_1 , B_2 , …, B_n unde este cerut respectiv în cantităţile b_1 , b_2 , …, b_n . Costul transportului unei unităţi de produs din depozitul A_i la centrul de consum B_j este egal cu c_{ij} unităţi monetare, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n. Capacitatea maximă de transport din depozitul A_i în centrul de consum B_j este egală cu d_{ij} , i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n.. Pentru fiecare rută A_i , B_j timpul de transport este egal cu t_{ij} , i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n.

Se pune problema determinării cantităţilor de produs ce urmează să fie transportate de la depozite la centrele de consum, astfel încât să nu depăşească disponibilul (oferta), cererea să fie satisfăcută, capacitatea rutei să nu fie depăşită şi să se optimizeze trei funcţii obiectiv, astfel:

f_1 = costul total al transportului să fie minim;

f_2 = timpul total de transport să fie minim;

f_3 = cantitatea care se transportă să se maximizeze.

Se presupune că:

$$a_i \geq 0\ ,\ b_j \geq 0\ ,\ c_{ij} > 0\ ,\ d_{ij} > 0,\ t_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2,..., m\ ;\ j = 1, 2,...,n;$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} \geq b_j \quad , \quad j = 1, 2,...,n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \geq a_i \quad , \quad i = 1, 2,..., m\ ;$$

Se va presupune că cererea este egală cu oferta, deci problema de transport cu capacităţi limitate este echilibrată:

.

Se notează cu X_{ij} cantitatea de produs ce va fi transportată din A_i în B_j ,

$$X = (\ X_{ij}\ ),\ i = 1, 2,..., m;\quad j = 1, 2,..., n.$$

Modelul matematic este cel din relaţiile (4. 46).

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i , \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j , \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$0 \le X_{ij} \le d_{ij} \;\; , \;\; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(4.46)}$$

$$X_{ij} \ge 0 , \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . X_{ij}$$

$$f_2(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} . X_{ij}$$

$$f_3(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$$

$\min f_1(X)$
$\min f_2(X)$
$\max f_3(X)$

$X = (X_{ij}), \; i = 1, 2,..., m; \;\; j = 1, 2,..., n.$

Problema din relaţiile (4.46) se poate rezolva prin metoda maximizării utilităţii globale.

4. 3.3. REZOLVAREA PROBLEMEI DE TRANSPORT CU CAPACITĂŢI LIMITATE MULTIOBIECTIV PRIN METODA MAXIMIZĂRII UTILITĂŢII GLOBALE

Se consideră modelul matematic al problemei de transport cu capacităţi limitate multiobiectiv din relaţiile (4.47).

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i , \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j , \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$0 \le X_{ij} \le d_{ij} \;\; , \;\; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(4.47)}$$

$$X_{ij} \ge 0 , \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . X_{ij}$$

$$f_2(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} . X_{ij}$$

$$f_3(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$$

$\min f_1(X)$
$\min f_2(X)$
$\max f_3(X)$

unde

$X = (X_{ij}), i = 1, 2,..., m; \quad j = 1, 2,..., n.$

X_{ij} este cantitatea transportată din A_i în B_j ;

Etapa 1.
Pentru fiecare funcţie obiectiv $f_k(X)$ se determină soluţia optimă a problemei de transport cu capacităţi limitate cu o funcţie obiectiv, k = 1, 2, 3.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i , \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j , \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$0 \le X_{ij} \le d_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(4.48)}$$

$$X_{ij} \ge 0 , \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . X_{ij}$$

$\min f_1(X)$

cu soluţia optimă X^{*1} ;

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i , \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j , \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$0 \le X_{ij} \le d_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(4.49)}$$

$$X_{ij} \ge 0 , \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f_2(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} . X_{ij}$$

$\min f_2(X)$

cu soluţia optimă X^{*2} ;

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i , \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j , \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$0 \le X_{ij} \le d_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(4.50)}$$

$$X_{ij} \ge 0 \, , \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f_3(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$$

max $f_3(X)$

cu soluţia optimă X^{*3}.

Pentru fiecare funcţie obiectiv $f_k(X)$ se determină soluţia pesimă (nonoptimă, opusă valorii optime, cea mai defavorabilă) X^{-k} a problemei de transport cu o funcţie obiectiv, k = 1, 2, 3.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \, , \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \, , \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$0 \le X_{ij} \le d_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(4.51)}$$

$$X_{ij} \ge 0 \, , \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f_1(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, . \, X_{ij}$$

max $f_1(X)$

cu soluţia pesimă X^{-1} ;

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \, , \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \, , \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$0 \le X_{ij} \le d_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(4.52)}$$

$$X_{ij} \ge 0 \, , \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f_2(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} . X_{ij}$$

max $f_2(X)$

cu soluţia pesimă X^{-2} ;

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \, , \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \, , \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$0 \le X_{ij} \le d_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(4.53)}$$

$$X_{ij} \ge 0 \, , \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f_3(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$$

min $f_3(X)$

cu soluţia pesimă X^{-3}.

Se notează: O_k = Optimum $f_k(X) = f_k(X^{*k})$

P_k = Pesim $f_k(X) = f_k(X^{-k})$

k = 1, 2, 3.

Deci: $O_1 = \min f_1(X) = f_1(X^{*1})$

$O_2 = \min f_2(X) = f_2(X^{*2})$

$O_3 = \max f_3(X) = f_3(X^{*3})$

$P_1 = \max f_1(X) = f_1(X^{-1})$

$P_2 = \max f_2(X) = f_2(X^{-2})$

$P_3 = \min f_3(X) = f_3(X^{-3})$

Etapa 2.

Pentru valorile optime şi pesime ale funcţiilor obiectiv se dau utilităţile acestor valori de către decident în tabelul nr. 4.42.

Valoarea optimă O_k are utilitatea U_k , k = 1, 2, 3.

Valoarea pesimă P_k are utilitatea U_{3+k} , k = 1, 2, 3.

Tabelul nr. 4.42 Utilităţile valorilor optime şi pesime

O_k / P_k	O_1	O_2	O_3	P_1	P_2	P_3
U_k	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6

Dacă o situaţie este mai convenabilă, utilitatea sa va fi mai mare şi

$U_k > U_{3+k}$, k = 1, 2, 3;

deoarece valoarea optimă O_k este preferată valorii pesime P_k , k = 1, 2, 3.

Etapa 3.

Se transformă funcţiile obiectiv $f_1(X)$, $f_2(X)$, $f_3(X)$ în funcţii utilitate $F_1(X)$, $F_2(X)$, $F_3(X)$, astfel:

$$F_k(X) = \alpha_k \cdot f_k(X) + \beta_k ,$$

se face: $X = X^{*k}$ si $X = X^{-k}$

Se obţin şi se rezolvă trei sisteme de ecuaţii liniare cu două necunoscute α_k şi β_k , k = 1, 2, 3.

$$\alpha_k \cdot O_k + \beta_k = U_k$$

$$\alpha_k \cdot P_k + \beta_k = U_{3+k} \quad , \quad k = 1, 2, 3.$$

Se obţin α_k şi β_k :

$$\alpha_k = \frac{U_k - U_{3*k}}{O_k - P_k}$$

$$\beta_k = \frac{U_{3*k}.O_k - U_k.P_k}{O_k - P_k}$$

Se calculează $F_k(X)$

$$F_k(X) = \alpha_k \cdot f_k(X) + \beta_k = \frac{U_k - U_{3*k}}{O_k - P_k}.f_k(X) + \frac{U_{3*k}.O_k - U_k.P_k}{O_k - P_k}$$

k = 1, 2, 3.

Etapa 4.

Se construieşte funcţia obiectiv sinteză F(X),

$$F(X) = F_1(X) + F_2(X) + F_3(X) = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{U_k - U_{3*k}}{O_k - P_k} . f_k(X) + \frac{U_{3*k} . O_k - U_k . P_k}{O_k - P_k} \right) = \dots$$

Se rezolvă problema de transport monoobiectiv:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i , \; i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j , \; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$0 \le X_{ij} \le d_{ij} \;\; , \;\; i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n; \qquad \textbf{(4.54)}$$

$$X_{ij} \ge 0 , \; i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$F(X) = \left(\frac{U_1 - U_4}{O_1 - P_1} . \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . X_{ij} + \frac{U_4 . O_1 - U_1 . P_1}{O_1 - P_1} \right) + \left(\frac{U_2 - U_5}{O_2 - P_2} . \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} . X_{ij} + \right.$$

$$\left. + \frac{U_5 . O_2 - U_2 . P_2}{O_2 - P_2} \right) + \left(\frac{U_3 - U_6}{O_3 - P_3} . \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + \frac{U_6 . O_3 - U_3 . P_3}{O_3 - P_3} \right)$$

Max F(X)

Se obţine soluţia optimă de maximă utilitate $X^* = (X^*_{ij})$.
Se calculează cele trei funcţii obiectiv în soluţia optimă obţinută X^*: $f_1(X^*)$, $f_2(X^*)$, $f_3(X^*)$.

Observaţie.

Funcţia obiectiv sinteză F(X) poate fi obţinută şi altfel:

$$F(X) = k_1 . F_1(X) + k_2 . F_2(X) + k_3 . F_3(X) = \dots$$

k_1 , k_2 , k_3 sunt coeficienţi de importanţă ale funcţiilor obiectiv f_i , $k_i > 0$, i = 1, 2, 3.

Metode matematice de modelare a fluxurilor materiale – C4

4.5. PROBLEMA DE TRANSPORT CU CENTRE INTERMEDIARE

Un produs se află în m depozite iniţiale A_1 , A_2 , …, A_m , respectiv în cantităţile a_1, a_2 , …, a_m şi trebuie transportat în depozitele (centrele) intermediare D_1 , D_2 , …, D_p , care au capacităţile (cererea 1) respectiv egale cu d_1 , d_2 , …, d_p . Din depozitele intermediare produsul trebuie transportat pe piaţă în centrele de consum B_1 , B_2 , …, B_n , care au cererea (cererea 2) respectiv egală cu b_1 , b_2 ,…, b_n . Costul unitar de transport din depozitul A_i în depozitul intermediar D_k este c_{ik} , iar costul transportului din depozitul intermediar D_k în centrul de consum B_j este q_{kj} . Datele problemei sunt sintetizate în tabelele nr.4.27 şi nr. 4.28 .

Tabelul nr. 4.27

D_k / A_i	D_1	D_2	…	D_p	Oferta 1 a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1p}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2p}	a_2

…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mp}	a_m
Cererea 1 d_k	d_1	d_2	…	d_p	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ $\sum_{k=1}^{p} d_k$

Tabelul nr. 4.28

B_j / D_k	B_1	B_2	…	B_n	Oferta 2 d_k
D_1	q_{11}	q_{12}	…	q_{1p}	d_1
D_2	q_{21}	q_{22}	…	q_{2p}	d_2
…	…	…	…	…	…
D_p	q_{m1}	q_{m2}	…	q_{mp}	d_p
Cererea 2 b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{k=1}^{p} d_k$ $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Se cere să se determine ce cantitate se transportă din depozitele iniţiale A_i în depozitele intermediare D_k şi din depozitele intermediare D_k la centrele de consum B_j , i = 1, 2, …, m ; k = 1, 2, …, p; j = 1, 2, …, n, astfel încât costul total al transportului să fie minim.

Sunt verificate condiţiile:

$c_{ik} \geq 0$, $q_{kj} \geq 0$, $a_i \geq 0$, $d_k \geq 0$, $b_j \geq 0$, i = 1, 2, …, m ; k = 1, 2, …, p; j = 1, 2, …, n;

Se presupune ca problema este echilibrată: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{p} d_k = \sum_{j=1}^{n} b_j$

În prima etapă depozitele intermediare D_k reprezintă cererea, numită *cererea 1*, apoi acestea devin ofertă, numite *oferta 2* şi centrele de consum B_j sunt *cererea 2*.

Se notează cu X_{ik} cantitatea ce se transportă din depozitul iniţial A_i în depozitul intermediar D_k şi cu Y_{kj} cantitatea ce se transportă din depozitul intermediar D_k la centrele de consum B_j , i = 1, 2, …, m ; k = 1, 2, …, p; j = 1, 2, …, n.

Schematic transportul va fi reprezentat astfel:

$$A_i , a_i \xrightarrow[X_{ik}]{c_{ik}} D_k , d_k \xrightarrow[Y_{kj}]{q_{kj}} B_j , b_j$$

Modelul matematic pentru problema echilibrata este dat de relaţiile (4.22).

$$\sum_{k=1}^{p} X_{ik} = a_i \text{ , i = 1, 2, …, m;}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ik} = d_k \text{ , k = 1, 2, …, p;}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Y_{kj} = d_k \ , \text{k} = 1, 2, \ldots, \text{p}; \qquad \textbf{(4.22)}$$

$$\sum_{k=1}^{p} Y_{kj} = b_j \ , \text{j}= 1, 2, \ldots, \text{n};$$

$X_{ik} \geq 0$, $Y_{kj} \geq 0$, i = 1, 2, …, m; k = 1, 2, …, p; j= 1, 2, …, n;

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} c_{ik}.X_{ik} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} q_{kj}.Y_{kj}$$

min f

Rezolvarea problemei (4.22) se reduce la rezolvarea a două probleme de transport de minimizare (4.23) şi (4.24), acestea fiind independente .

$$\sum_{k=1}^{p} X_{ik} = a_i \ , \text{i} = 1, 2, \ldots, \text{m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ik} = d_k \ , \text{k} = 1, 2, \ldots, \text{p}; \qquad \textbf{(4.23)}$$

$X_{ik} \geq 0$, , i = 1, 2, …, m; k = 1, 2, …, p;

$$f_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} c_{ik}.X_{ik}$$

min f_1

$$\sum_{j=1}^{n} Y_{kj} = d_k \ , \text{k} = 1, 2, \ldots, \text{p};$$

$$\sum_{k=1}^{p} Y_{kj} = b_j \ , \text{j}= 1, 2, \ldots, \text{n}; \qquad \textbf{(4.24)}$$

$Y_{kj} \geq 0$, k = 1, 2, …, p; j= 1, 2, …, n;

$$f_2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} q_{kj}.Y_{kj}$$

min f_2

Problema de transport cu centre intermediare neechilibrată are modelul matematic cu inegalităţi, similar celui din relaţiile (4.1), (4.2), (4.3), (4.4).

Rezolvarea problemei de transport din relaţiile (4.22) constă în determinarea soluţiei optime pentru problemele de transport (4.23) şi (4.24).

Costul minimal problemei (4.22) va fi: min f = min f_1 + min f_2

Pe calculator se pot utiliza pentru rezolvarea problemei de transport cu centre intermediare programele:

- Qsb - modulul Transshipment problem;
- Dsspom - modulul Transportation Method;

sau cu alte programe.

Observaţie

1. Se poate determina şi **soluţia defavorabilă**, evident nedorită, prin rezolvarea problemei de transport cu centre intermediare de maximizare, deci aceleaşi restricţii **(**4.22), dar se cere max f, care se reduce la două probleme de transport clasice cu

restricţiile din (4.23) şi (4.24), dar se cere maximizarea funcţiilor obiectiv f_1 şi f_2 . Se rezolva cele două probleme de transport de maximizare, rezultă:

$\max f = \max f_1 + \max f_2 = f_{max}$.
Deci,

$$f \in [\, f_{min} , f_{max} \,]$$

2. Este posibil să existe nu numai un grup de depozite intermediare D_k , ci mai multe grupuri de depozite intermediare, de exemplu două: grupurile D_k , E_h , k = 1, 2, …, p; h= 1, 2, …, r;.

Vor fi trei tabele cu datele problemei, iar schematic transportul va fi reprezentat astfel:

$$A_i , a_i \xrightarrow[X_{ik}]{c_{ik}} D_k , d_k \xrightarrow[Z_{kh}]{t_{kh}} E_h , e_h \xrightarrow[Y_{hj}]{q_{hj}} B_j , b_j$$

Problema de transport cu centre intermediare în acest caz se va rezolva prin rezolvarea a trei probleme de transport de minimizare clasice:

$A_i , a_i \xrightarrow[X_{ik}]{c_{ik}} D_k , d_k$ - cu funcţia obiectiv f_1;

$D_k , d_k \xrightarrow[Z_{kh}]{t_{kh}} E_h , e_h$ - cu funcţia obiectiv f_2;

$E_h , e_h \xrightarrow[Y_{hj}]{q_{hj}} B_j , b_j$ - cu funcţia obiectiv f_3;

$\min f = \min f_1 + \min f_2 + \min f_3$

Exemplul nr. 4.6.

Un produs se află în m = 4 depozite A_1 , A_2 , A_3, A_4 , respectiv în cantităţile 100, 80, 190, 30 şi trebuie transportat în p = 2 centre intermediare D_1 , D_2 , care au capacităţile (cererea 1) respectiv egală cu 250 şi 150. Din depozitele intermediare D_1 , D_2 produsul trebuie transportat pe piaţă în centrele de consum B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 , care au cererea (cererea 2) respectiv egală cu 50, 80, 120, 60, 90. Costul unitar de transport din depozitul A_i în depozitul intermediar D_k este c_{ik} , iar costul transportului din depozitul intermediar D_k în centrul de consum B_j este q_{kj} . Costurile unitare de transport date de matricile C şi Q, oferta 1, oferta 2, cererea1 şi cererea 2 sunt sintetizate în tabelele nr.4.29 şi nr.4.30. Să se determine ce cantitate se transportă din depozitele iniţiale A_i în depozitele intermediare D_k şi din depozitele intermediare D_k la centrele de consum B_j , i = 1, 2, 3, 4 ;
k = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4, 5, astfel încât costul total al transportului să fie minim.

$C = (c_{ik})$, $Q = (q_{kj})$, i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4, 5.

Tabelul nr.4. 29

D_k / A_i	D_1	D_2	Oferta 1 a_i
A_1	5	7	100
A_2	8	6	80
A_3	9	4	190
A_4	10	5	30
Cererea 1 d_k	250	150	S = 400

Tabelul nr. 4.30

B_j / D_k	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Oferta 2 d_k
D_1	3	6	5	7	9	250
D_2	2	8	4	3	5	150
Cererea 2 b_j	50	80	120	60	90	S = 400

Schema transportului cu centre intermediare este:

$$A_1 , A_2 , A_3 , A_4 \xrightarrow[X_{ik}]{c_{ik}} D_1, D_2 \xrightarrow[Y_{kj}]{q_{kj}} B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5$$

Modelul matematic al problemei de transport cu centre intermediare este în acest caz concret:

$X_{11} + X_{12} = 100$
$X_{21} + X_{22} = 80$
$X_{31} + X_{32} = 190$
$X_{41} + X_{42} = 30$
$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 250$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 150$
$Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15} = 250$
$Y_{21} + Y_{22} + Y_{23} + Y_{24} + Y_{25} = 150$
$Y_{11} + Y_{21} = 50$
$Y_{12} + Y_{22} = 80$
$Y_{13} + Y_{23} = 120$
$Y_{14} + Y_{24} = 60$
$Y_{15} + Y_{25} = 90$

$X_{ik} \geq 0 , Y_{kj} \geq 0 , i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4, 5$
$f = f_1 + f_2$
min f
notaţiile sunt:
$f_1 = 5.X_{11} + 7.X_{12} + \ldots + 5.X_{42}$
$f_2 = 3.Y_{11} + 6.Y_{12} + \ldots + 5.Y_{25}$
$\min f = \min f_1 + \min f_2$

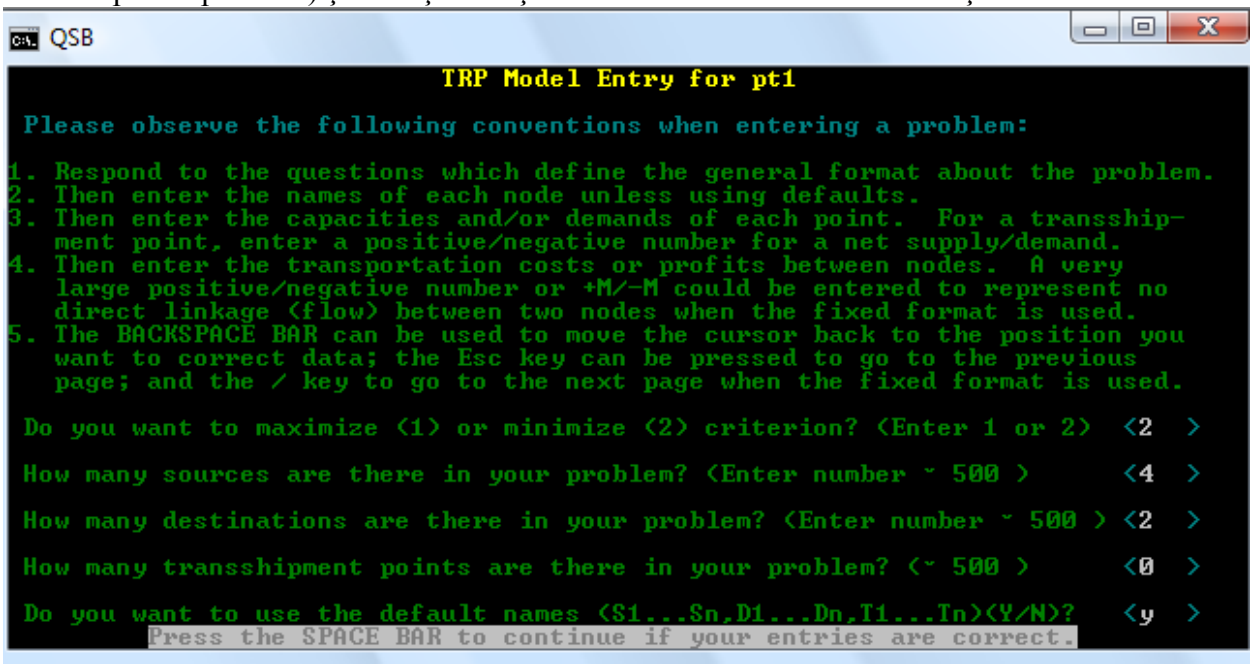
Rezolvarea problemei de transport cu centre intermediare se reduce la două probleme de transport clasice de minimizare cu funcţiile obiectiv f_1 şi f_2 .

$X_{11} + X_{12} = 100$
$X_{21} + X_{22} = 80$
$X_{31} + X_{32} = 190$
$X_{41} + X_{42} = 30$
$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 250$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 150$
$X_{ik} \geq 0 , i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2$
$f_1 = 5.X_{11} + 7.X_{12} + \ldots + 5.X_{42}$
min f_1

$Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15} = 250$

$Y_{21} + Y_{22} + Y_{23} + Y_{24} + Y_{25} = 150$
$Y_{11} + Y_{21} = 50$
$Y_{12} + Y_{22} = 80$
$Y_{13} + Y_{23} = 120$
$Y_{14} + Y_{24} = 60$
$Y_{15} + Y_{25} = 90$
$Y_{kj} \geq 0$, k = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4, 5
$f_2 = 3.Y_{11} + 6.Y_{12} + \ldots + 5.Y_{25}$
min f_2

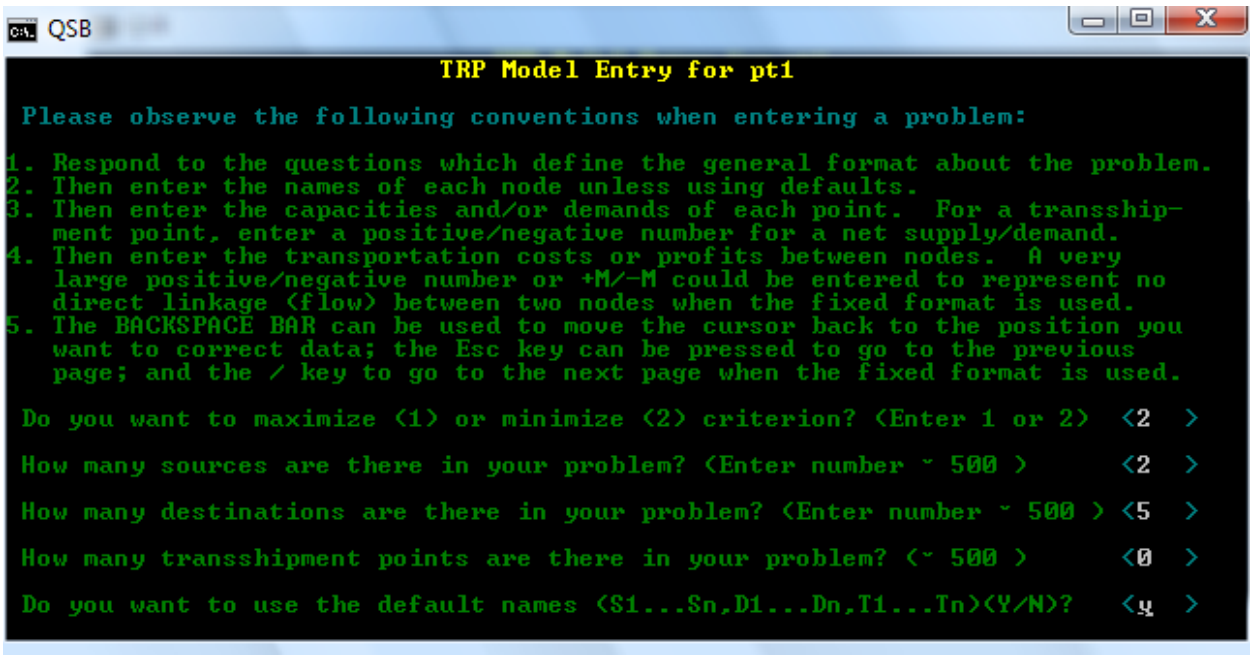
Se rezolvă cele două probleme de transport de minimizare cu programul Qsb (modulul Transshipment problem) şi se obţin soluţiile lor minime – tabelele nr. 4.31 şi 4.32.



Tabelul nr.4.31

D_k / A_i	D_1	D_2	Oferta 1 a_i
A_1	5 100	7 0	100
A_2	8 80	6 0	80
A_3	9 40	4 150	190
A_4	10 30	5 0	30
Cererea 1 d_k	250	150	S = 400

min f_1 = 2400 u. m.



Tabelul nr.4.32

B_j / D_k	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Oferta 2 d_k
D_1	3 50	6 80	5 120	7 0	9 0	250
D_2	2 0	8 0	4 0	3 60	5 90	150
Cererea 2 b_j	50	80	120	60	90	S = 400

min f_2 = 1860 u. m.
min f = min f_1 + min f_2 = 2400 + 1860 = 4260 u. m.

Se va determina şi **soluţia defavorabilă,** evident nedorită, prin rezolvarea problemei de transport cu centre intermediare de maximizare, deci aceleaşi restricţii dar se cere max f, care se reduce la două probleme de transport clasice de maximizare cu funcţiile obiectiv f_1 şi f_2 . Se rezolvă cele două probleme de transport de maximizare cu programul Qsb (modulul Transshipment problem) şi se obţin soluţiile lor maxime în tabelele nr. 4.31A şi nr.4.32 A.

Tabelul nr.4.31,A

D_k / A_i	D_1	D_2	Oferta 1 a_i
A_1	5 0	7 100	100
A_2	8 30	6 50	80
A_3	9 190	4 0	190
A_4	10 30	5 0	30
Cererea 1 d_k	250	150	S = 400

max f_1 = 3250 u. m.

Tabelul nr.4.32 A

B_j / D_k	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Oferta 2 d_k
D_1	3 0	6 0	5 100	7 60	9 90	250
D_2	2 50	8 80	4 20	3 0	5 0	150
Cererea 2 b_j	50	80	120	60	90	S = 400

max f_2 = 2550 u. m.
max f = max f_1 + max f_2 = 3250 + 2550 = 5800 u.m.
deci,

$$f \in [\, f_{min} , f_{max} \,]$$

rezultă:

$$f \in [4260 , 5800] ,$$

evident că este dorită şi preferată soluţia optimă min f = 4260 u. m.

4.6. PROBLEMA DE TRANSPORT TRIDIMENSIONALĂ

Problema de transport tridimensională constă în transportul din m depozite a p produse (materiale, materii prime) în n centre de consum (localităţi, magazii) şi minimizarea costului total al transportului.

În m localităţi (depozite) $A_1 , A_2 , \ldots , A_m$ se află p produse (materiale) $P_1 , P_2 , \ldots , P_p$ în cantităţile a_{ik} , i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . , p; şi se transportă în n centre de consum (localităţi, magazii) $B_1 , B_2 , \ldots , B_n$ unde cererea este în cantităţile b_{jk} , j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p. Deci, oferta în A_i este a_{ik} şi cererea în B_j este b_{jk} , iar costul unitar de transport a unităţii de produs P_k din A_i în B_j este c_{ijk} , i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p.

Se notează cu g_{ij} cantitatea maximă ce se poate transporta din A_i în B_j . Ce cantitate trebuie transportată din fiecare depozit şi fiecare produs la fiecare punct de consum, astfel încât costul total al transportului să fie minim.

Pentru rezolvare, se notează cu X_{ijk} cantitatea din produsul P_k transportată din A_i în B_j . Modelul matematic este în relaţiile (4.25).

Schematic:

$$A_{ik} , a_{ik} \xrightarrow[X_{ijk}]{c_{ijk} , g_{ij}} B_{jk} , b_{jk}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_{ijk} = a_{ik}} , i = 1, 2, . . ., m; k = 1, 2, . . ., p;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{X_{ijk} = b_{jk}} , j = 1, 2, . . ., n; k = 1, 2, . . . p;$$

$$\sum_{k=1}^{p} \mathbf{X_{ijk}} \leq \mathbf{g_{ij}} , i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n;$$

$\mathbf{X_{ijk}} \geq \mathbf{0}$, i =1,2, ..., m; j =1,2, ...,n; k =1, 2,..., p ; **(4.25)**

$$\mathbf{f(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \mathbf{c_{ijk}} \cdot \mathbf{X_{ijk}}$$

min f(X)

care este modelul problemei de transport tridimensională ce se rezolvă cu algoritmul de transport tridimensional.

Trebuie să fie îndeplinite condiţiile (4.25a).

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \quad , \text{k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m;} \qquad \textbf{(4.25a)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} g_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} \quad , \text{j = 1, 2, . . . , n;}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} b_{jk} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}$$

O altă rezolvare a problemei date de relaţiile (4.25) este prin transformarea problemei de transport tridimensională, deci cu trei indici, într-o problemă de programare liniară, în care variabilele vor avea un indice.

Astfel, se poate nota (sau altfel):

X111 = X_{111}, X112 = X_{112} etc., iar la întrebarea programului Qsb:

Do you want to use default variable names (X1, X2, ..., Xn) (Y/N)?

Se va răspunde N, apoi când apare mesajul:

Enter the variable names using ...

Se vor introduce numele variabilelor: X111, X112, X113 etc.
Sau se notează:

$Y_1 = X_{111}$, $Y_2 = X_{112}$ etc.
$\mathbf{s = m.n.(k - 1) + m.(j - 1) + i}$, **(4.26)**

$\mathbf{Y_s = X_{ijk}}$

unde: i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., p;

Sau se notează altfel.
Cu aceste notaţii se obţine o problemă de programare liniară cu m.n + m.p + n.p restricţii şi m.n.p variabile, care se poate rezolva utilizând programele calculator Qsb, Dsspom, Lindo sau alte programe.

Rezolvarea problemei de transport tridimensională se face prin programare liniară după redenumirea variabilelor cu trei indici prin variabile cu un indice, se utilizează un program pe calculator, de exemplu Qsb, modulul *linear programming* sau modulul *integer linear programming*.

Modelul matematic (4.25) se poate utiliza şi în logistica întreprinderii, pentru minimizarea costurilor de transport (intern sau extern) , considerând că se face aprovizionarea firmei din m depozite A_1, A_2,..., A_m, cu p tipuri de materii prime (materiale) P_1, P_2, . . . ,P_p,

pentru n secţii,ateliere sau magazii B_1, B_2 ,..., B_n . Modelul (4.25) se poate utiliza şi în minimizarea costurilor distribuţiei produselor firmei, considerând că în m ateliere A_1, A_2, . . . , A_m se fabrică (sau în m magazii sunt depozitate) p produse P_1, P_2, . . . , P_p , care se vor vinde (distribui) pe piaţă în punctele (magazinele) B_1, B_2, . . . , B_n .

Exemplul nr. 4.6.T3

În m = 3 localităţi (depozite) A_1 , A_2 , A_3 se află p = 2 produse (materiale) P_1 , P_2 în cantităţile a_{ik} , i = 1, 2, 3; k = 1, 2; şi se transportă în n = 4 centre de consum (localităţi, magazii) B_1 , B_2 , B_3 , B_4 în cantităţile b_{jk} , j = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2.
Deci, oferta este a_{ik} şi cererea b_{jk} , iar costul unitar de transport a unităţii de produs P_k din A_i în B_j este c_{ijk} , i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p; m = 3; n = 4 ; p = 2 .
Se notează cu g_{ij} cantitatea maximă ce se poate transporta din A_i în B_j . Ce cantitate trebuie transportată din fiecare depozit şi fiecare produs la fiecare punct de consum, astfel încât costul total al transportului să fie minim. Datele sunt in cele 3 tabele urmatoare.

Tabelul nr. 4.32 P1. Oferta a_{i1} , cererea b_{j1} si costurile de transport c_{ij1} pentru produsul P1

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta produsului P1 a_{i1}
A_1	3	6	1	2	100
A_2	2	4	3	1	180
A_3	1	2	3	5	150
Cererea produsului P1 b_{j1}	90	110	115	115	S1 = 430

Tabelul nr. 4.32.P2. Oferta a_{i2} , cererea b_{j2} si costurile de transport c_{ij2} pentru produsul P2

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Oferta produsului P2 a_{i2}
A_1	1	2	1	3	120
A_2	2	1	3	4	140
A_3	5	2	3	1	145
Cererea produsului P2 b_{j2}	90	125	115	75	S2 = 405

Tabelul nr. 4.32. gij . Valorile gij

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	***60***	***35***	***80***	***45***
A_2	***80***	***90***	***80***	***70***
A_3	***40***	***110***	***70***	***75***

Soluţia 1

Sunt 24 variabile si 26 restrictii. Se rezolva cu programul Qsb, modulul *linear programming* (sau alt program),. Se poate rezolva şi cu programul Qsb, modulul *integer linear programming.*

Modelul matematic:

X111 + X121 + X131 + X141 >= 100
X211 + X221 + X231 + X241 >= 180
X311 + X321 + X331 + X341 >= 150
X112 + X122 + X132 + X142 >= 120
X212 + X222 + X232 + X242 >= 140
X312 + X322 + X332 + X342 >= 145

X111 + X211 + X311 < = 90
X121 + X221 + X321 <= 110
X131 + X231 + X331 <= 115
X141 + X241 + X341 <= 115
X112 + X212 + X312 <= 90
X122 + X222 + X322 <= 125
X132 + X232 + X332 <= 115
X142 + X242 + X342 <= 75

X111 + X112 ≤ **6**0
X121 + X122 ≤ **35**
X131 + X132 ≤ **8**0
X141 + X142 ≤ **45**

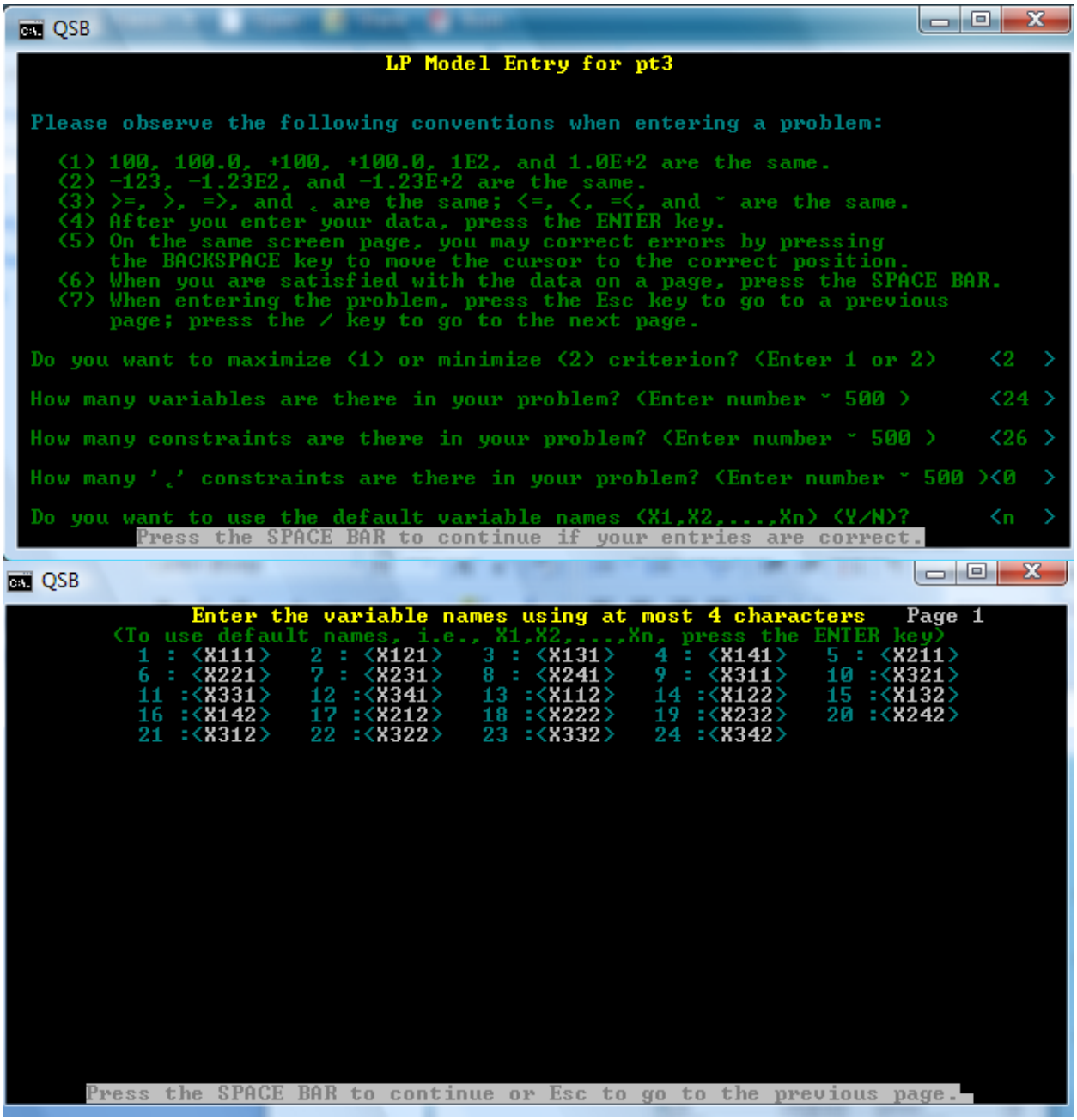
X211 + X212 ≤ **8**0
X221 + X222 ≤ **9**0
X231 + X232 ≤ **8**0
X241 + X242 ≤ **70**

X311 + X312 ≤ **4**0
X321 + X322 ≤ **11**0
X331 + X332 ≤ **7**0
X341 + X342 ≤ **75**

Xijk ≥ 0 , i =1,2, ..., m; j =1,2, ...,n; k =1, 2,..., p ; m = 3; n = 4 ; p = 2;
Xijk ∈ Z , i =1,2, ..., m; j =1,2, ...,n; k =1, 2,..., p ; m = 3; n = 4 ; p = 2;

f = 3.X111 + 6.X121 + X131 + 2.X141 + 2.X211 + 4.X221 + 3. X231 + X241 + X311 + +2.X321+ 3 . X331 + 5.X341 + X112 + 2.X122 + X132 + 3.X142 + 2.X212 + X222 + 3.X232+ + 4.X242 + 5.X312 + 2.X322 + 3.X332 + X342

Min f



Solutia optima:

Min f = 1405

X111 = 0 ; X121 = 0 ; X131 = 55 ; X141 = 45 ;

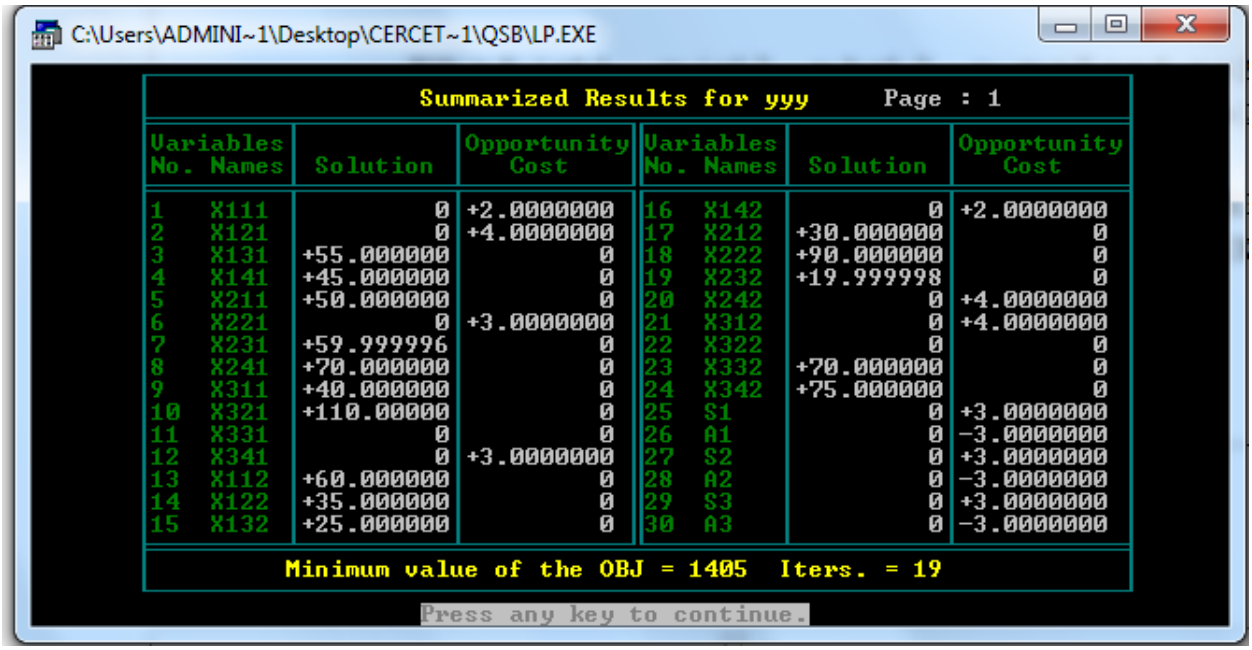
X211 = 50 ; X221 = 0 ; X231 = 60 ; X241 = 70 ;

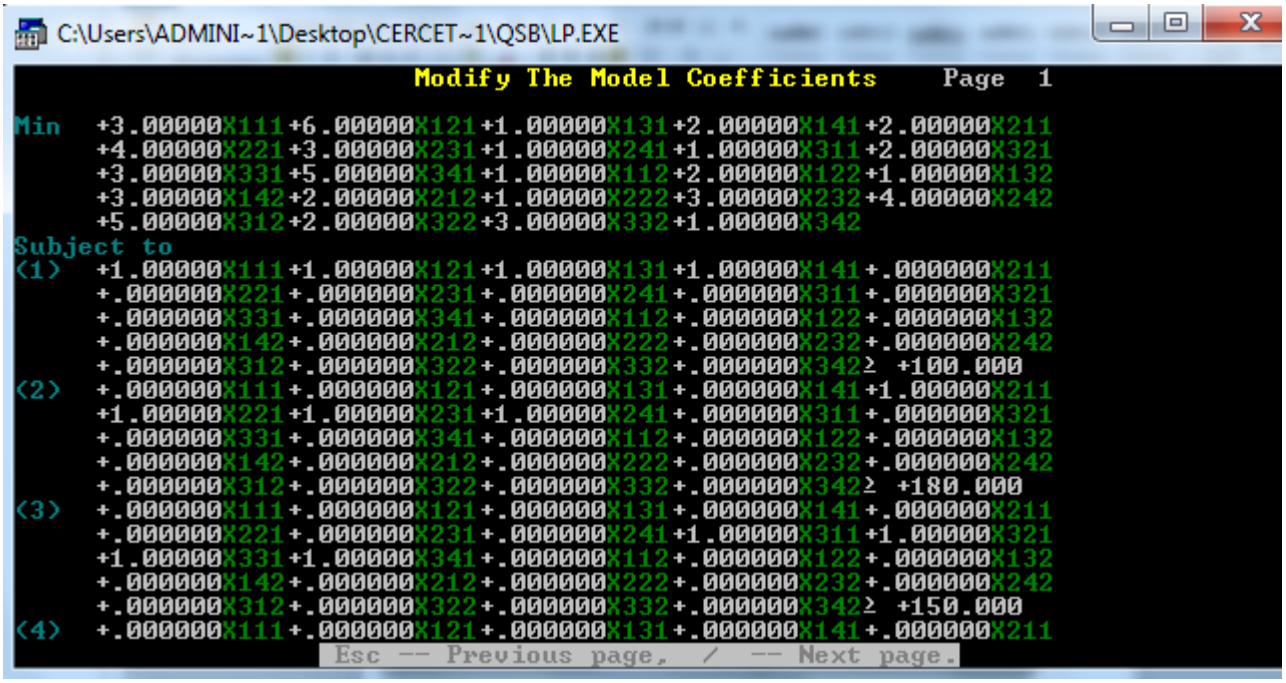
X311 = 40 ; X321 = 110 ; X331 = 0 ; X341 = 0 ;

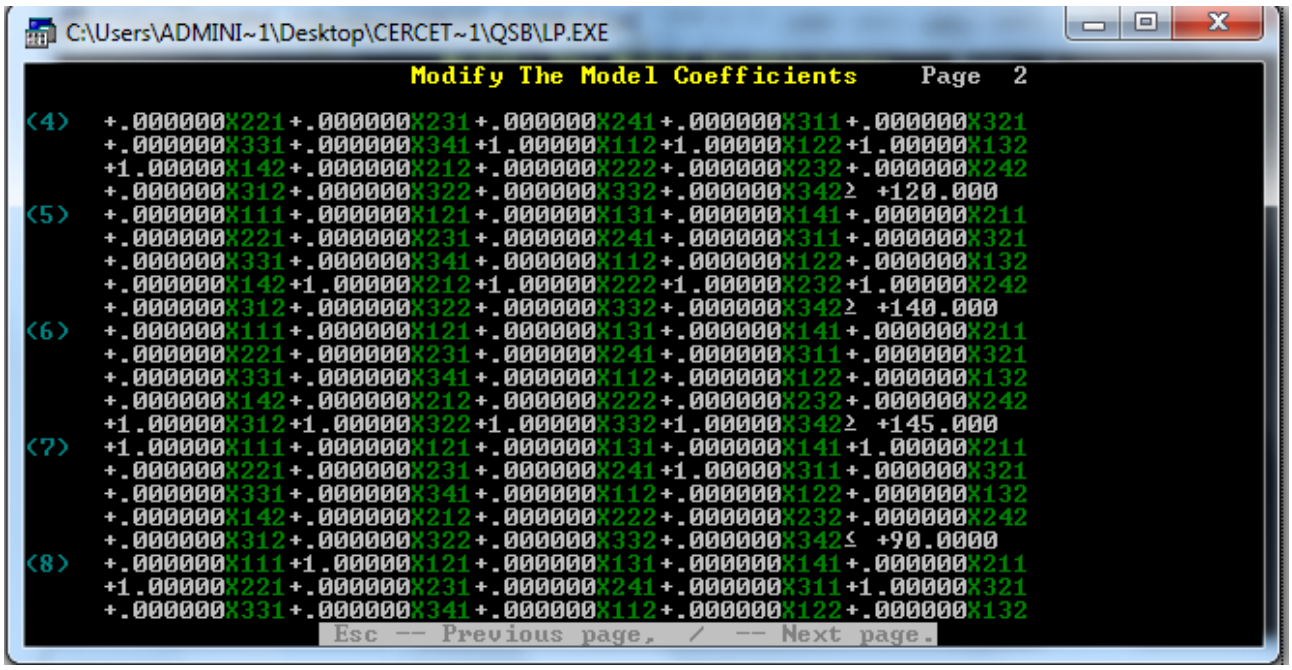
X112 = 60 ; X122 = 35 ; X132 = 25 ; X142 = 0 ;

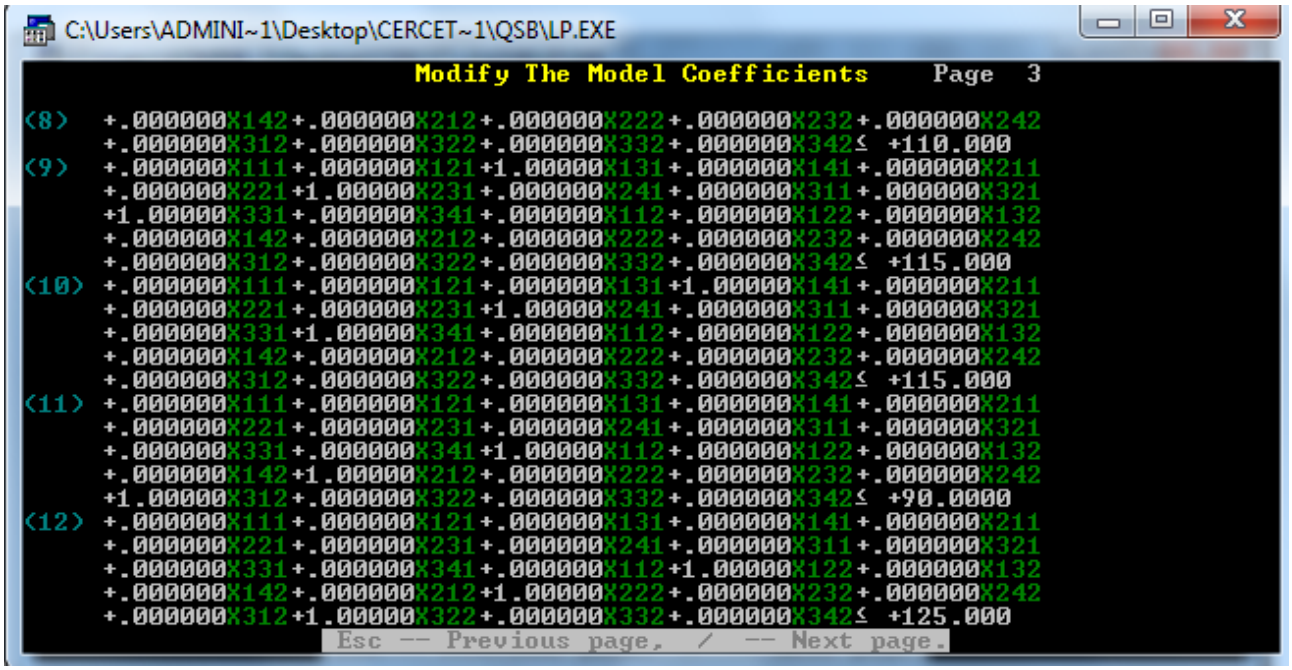
X212 = 30 ; X222 = 90 ; X232 = 20 ; X242 = 0 ;

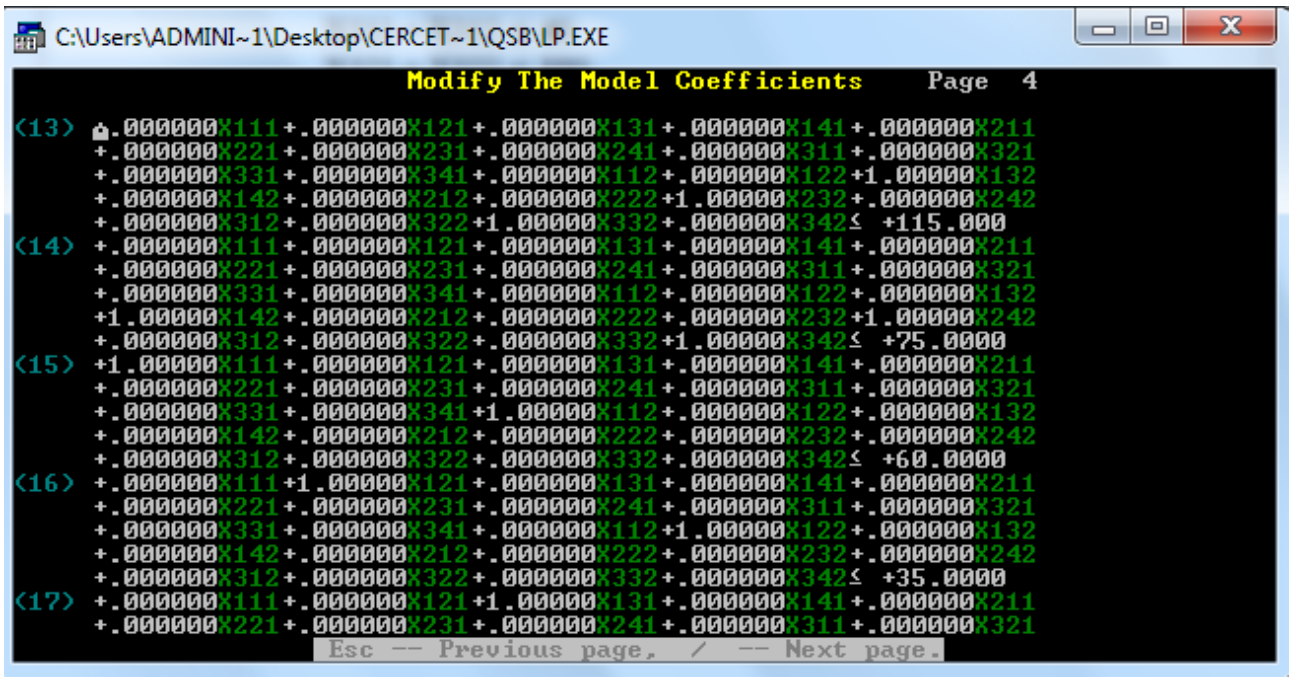
X312 = 0 ; X322 = 0 ; X332 = 70 ; X342 = 75 .

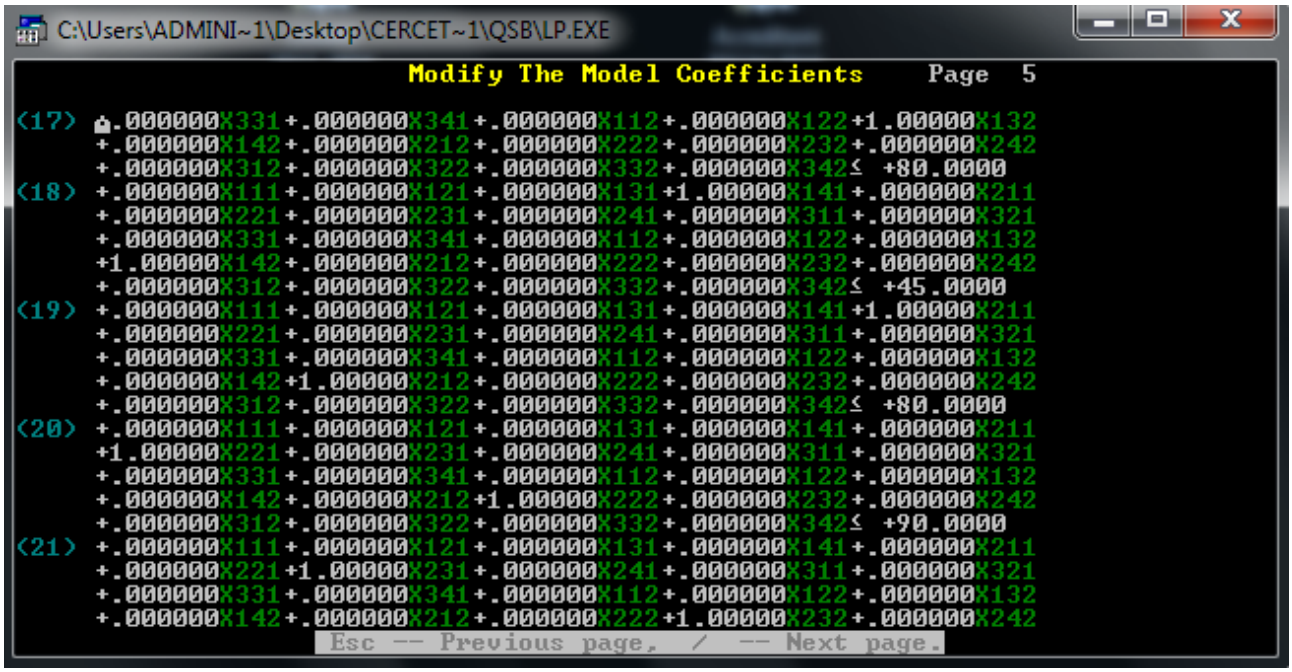


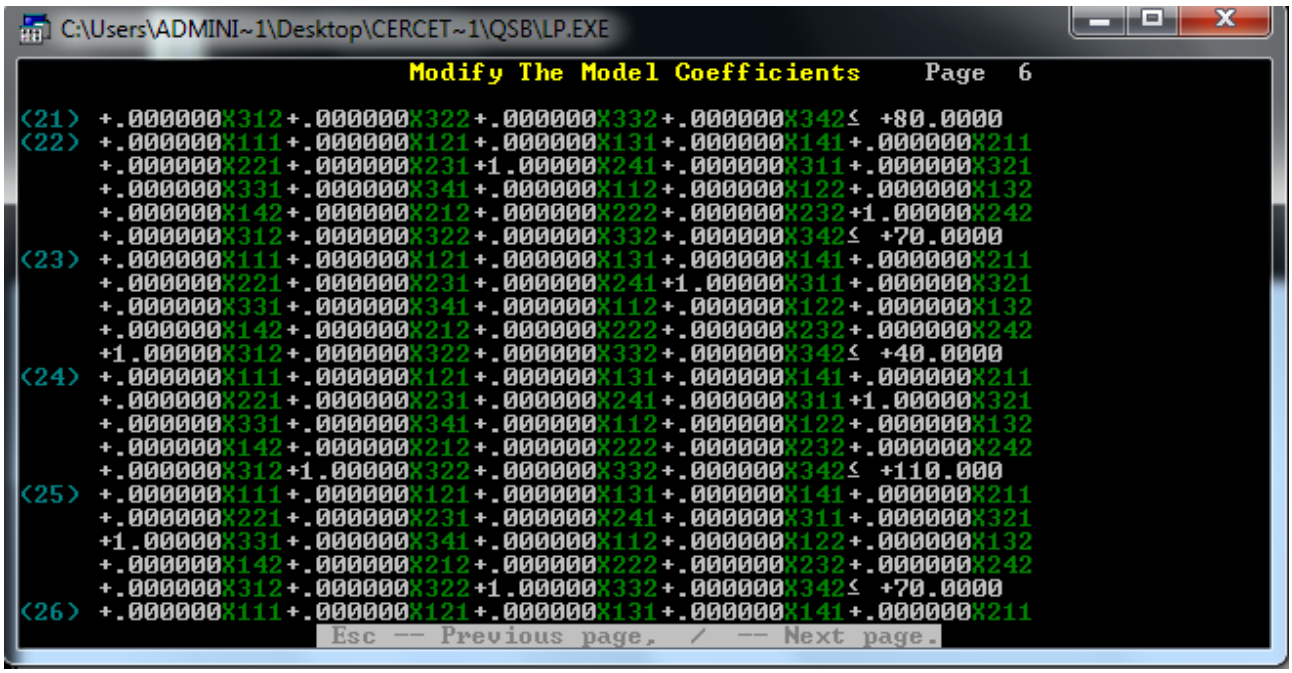


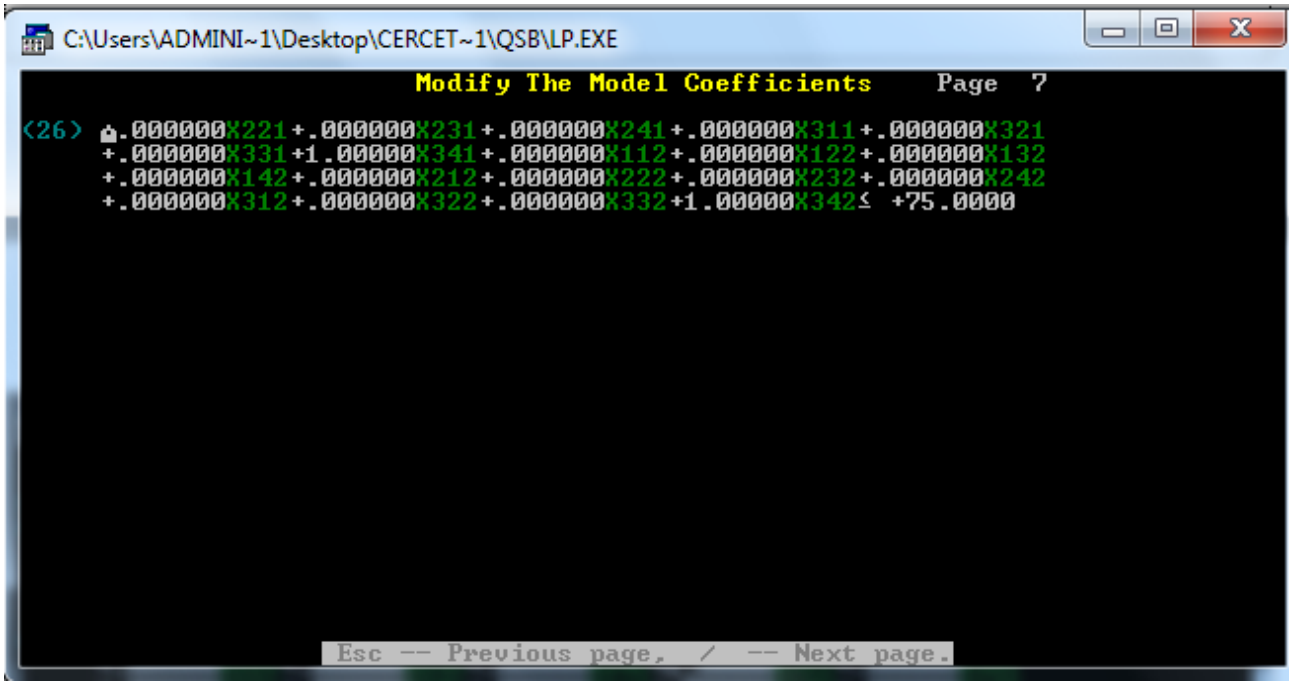

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 2
(4) +.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+1.00000X112+1.00000X122+1.00000X132
+1.00000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≥ +120.000
(5) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+1.00000X212+1.00000X222+1.00000X232+1.00000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≥ +140.000
(6) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+1.00000X312+1.00000X322+1.00000X332+1.00000X342≥ +145.000
(7) +1.00000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+1.00000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+1.00000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +90.0000
(8) +.000000X111+1.00000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+1.00000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+1.00000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
Esc -- Previous page, / -- Next page.

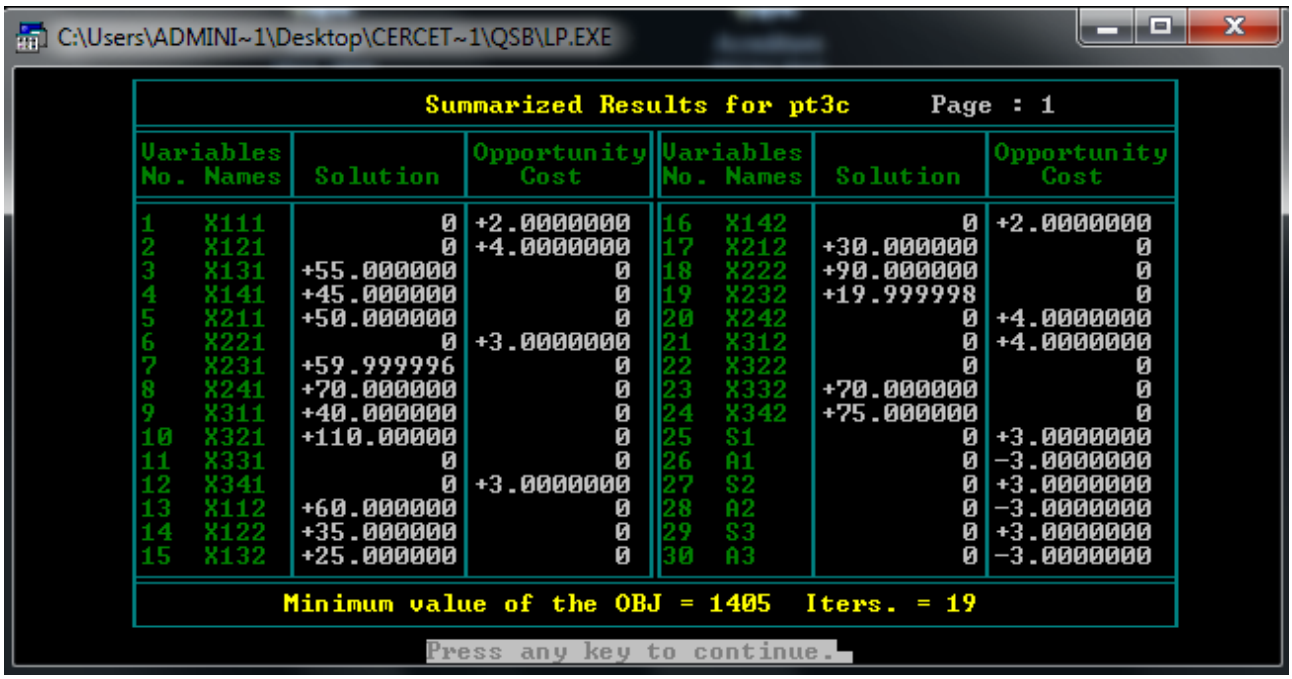

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 3
(8) +.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +110.000
(9) +.000000X111+.000000X121+1.00000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+1.00000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+1.00000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +115.000
(10) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+1.00000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+1.00000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+1.00000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +115.000
(11) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+1.00000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+1.00000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+1.00000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +90.0000
(12) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+1.00000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+1.00000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+1.00000X322+.000000X332+.000000X342≤ +125.000
Esc -- Previous page, / -- Next page.

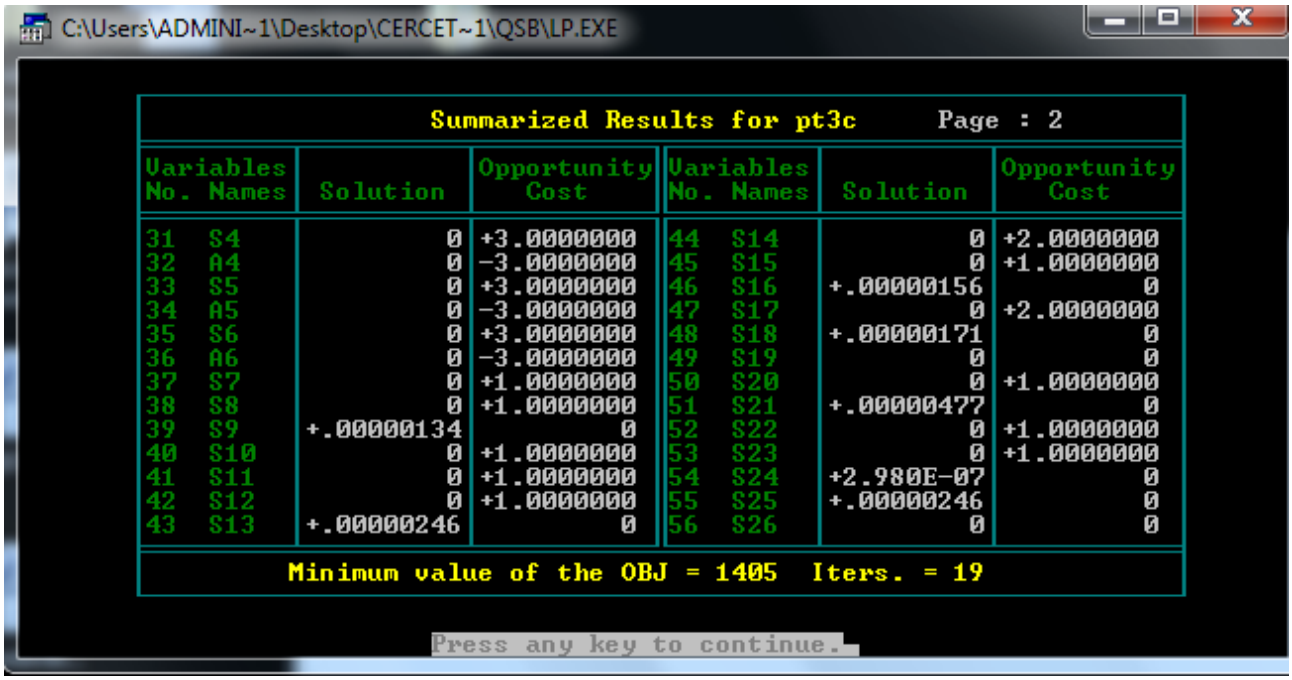

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 4
(13) .000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+1.00000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+1.00000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+1.00000X332+.000000X342≤ +115.000
(14) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+1.00000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+1.00000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+1.00000X342≤ +75.0000
(15) +1.00000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+1.00000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +60.0000
(16) +.000000X111+1.00000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+1.00000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +35.0000
(17) +.000000X111+.000000X121+1.00000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
Esc -- Previous page, / -- Next page.


C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 5
(17) .000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+1.00000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +80.0000
(18) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+1.00000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+1.00000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +45.0000
(19) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+1.00000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+1.00000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +80.0000
(20) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+1.00000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+1.00000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +90.0000
(21) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+1.00000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+1.00000X232+.000000X242
Esc -- Previous page, / -- Next page.


C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 6
(21) +.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +80.0000
(22) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+1.00000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+1.00000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +70.0000
(23) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+1.00000X311+.000000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+1.00000X312+.000000X322+.000000X332+.000000X342≤ +40.0000
(24) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+1.00000X321
+.000000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+1.00000X322+.000000X332+.000000X342≤ +110.000
(25) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
+.000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+1.00000X331+.000000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+1.00000X332+.000000X342≤ +70.0000
(26) +.000000X111+.000000X121+.000000X131+.000000X141+.000000X211
Esc -- Previous page, / -- Next page.


C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Modify The Model Coefficients Page 7
(26) .000000X221+.000000X231+.000000X241+.000000X311+.000000X321
+.000000X331+1.00000X341+.000000X112+.000000X122+.000000X132
+.000000X142+.000000X212+.000000X222+.000000X232+.000000X242
+.000000X312+.000000X322+.000000X332+1.00000X342≤ +75.0000
Esc -- Previous page, / -- Next page.





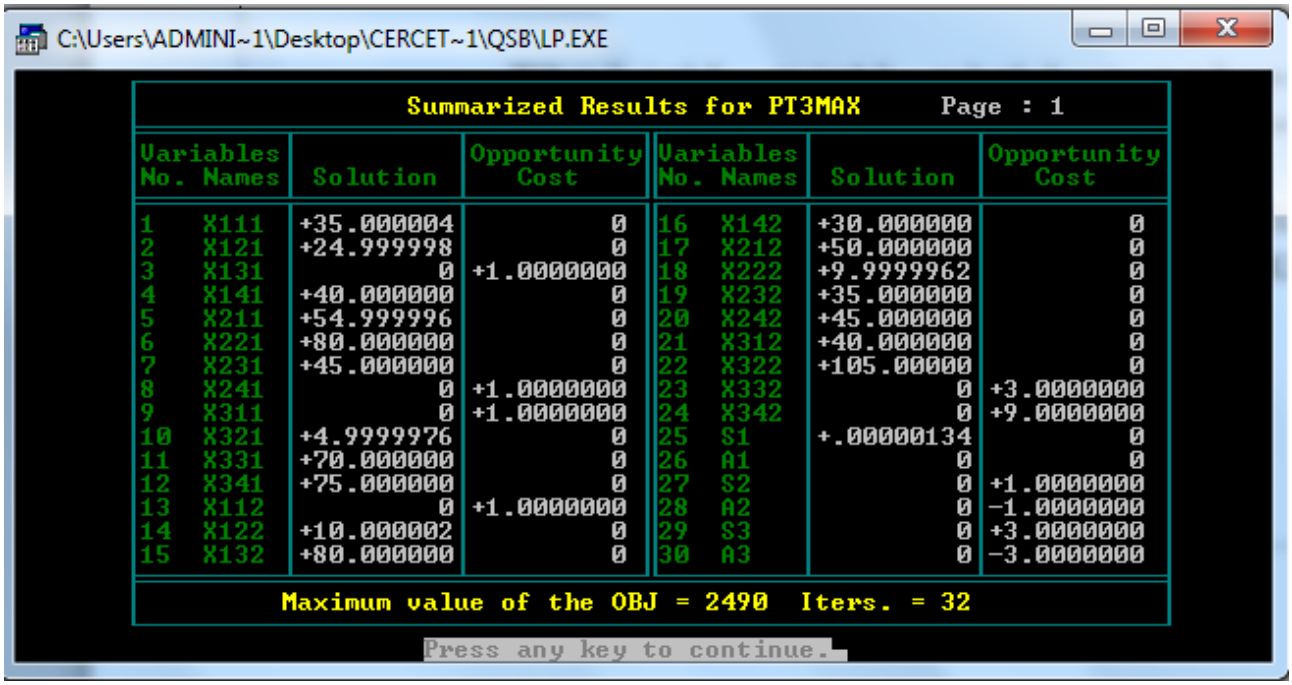
Se rezolva analog cu programul Qsb, modulul *integer linear programming.*

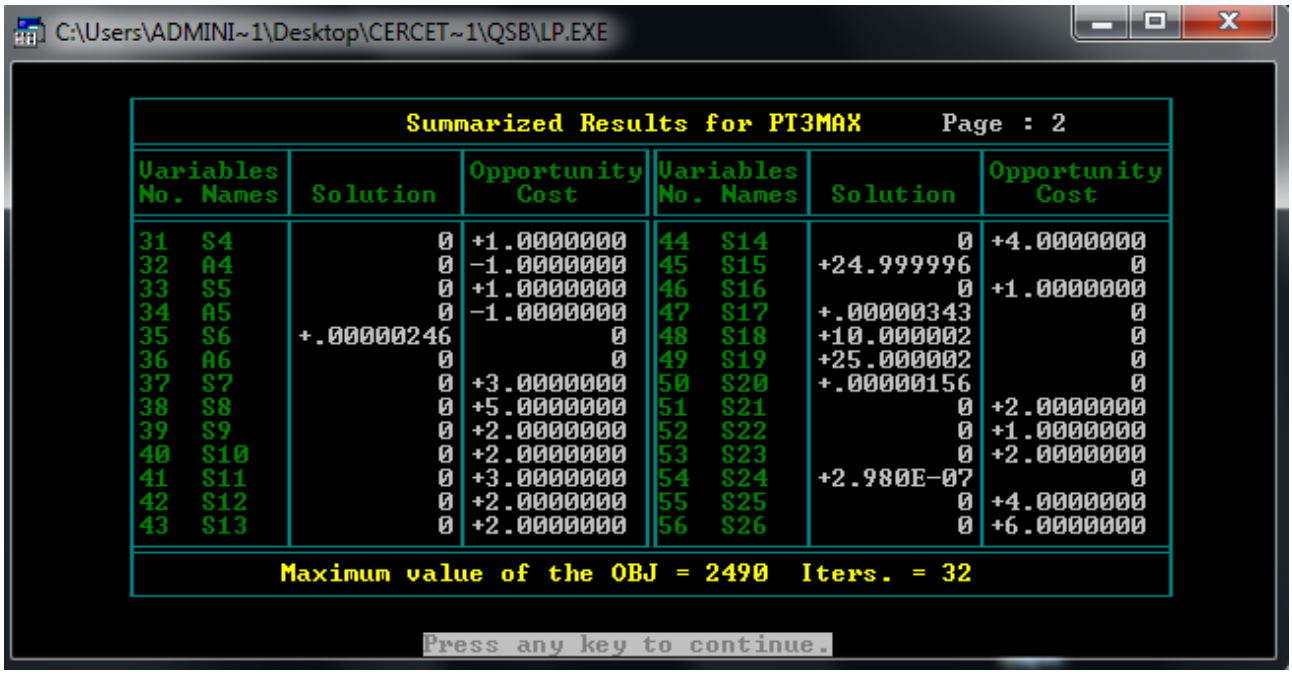
Soluţia defavorabilă:

Aceleasi ecuaţii, dar se cere max f.

Se obţine: max f = 2490

Evident, se doreşte **min f = 1405**





$f \in [1405, 2490]$

Soluţia defavorabilă:

Max f = 2490

X111 = 35 ; X121 = 25 ; X131 = 0 ; X141 = 40 ;

X211 = 55 ; X221 = 80 ; X231 = 45 ; X241 = 0 ;

X311 = 0 ; X321 = 5 ; X331 = 70 ; X341 = 75 ;

X112 = 0 ; X122 = 10 ; X132 = 80 ; X142 = 30 ;

X212 = 50 ; X222 = 10 ; X232 = 35 ; X242 = 45 ;
X312 = 40 ; X322 = 105 ; X332 = 0 ; X342 = 0 .

Soluţia 2

Din cauza erorilor de trunchiere, aproximare, rotunjire, nu se obţine întotdeauna soluţia optimă când restricţiile sunt cu egalităţi sau problema nu are soluţie. Se înlocuiesc egalităţile cu inegalităţi duble cu valori din vecinătatea lui a_{ik} , respectiv b_{jk} . Se elimină erorile de rotunjire, considerând:

$a_{ik} \in [a_{ik} - 0.1, a_{ik} + 0.1]$, $b_{jk} \in [b_{jk} - 0.1, b_{jk} + 0.1]$

Se rezolvă cu programul Qsb (sau alt program), modulul *integer linear programming.*

Se poate rezolva si cu programul Qsb , modulul *linear programming.*
Sunt 40 restricţii şi 24 variabile – PT3

Modelul matematic:

$$X111 + X121 + X131 + X141 \leq 100.1$$
$$X111 + X121 + X131 + X141 \geq 99.9$$

$$X211 + X221 + X231 + X241 \leq 180.1$$
$$X211 + X221 + X231 + X241 \geq 179.9$$

$$X311 + X321 + X331 + X341 \leq 150.1$$
$$X311 + X321 + X331 + X341 \geq 149.9$$

$$X112 + X122 + X132 + X142 \leq 120.1$$
$$X112 + X122 + X132 + X142 \geq 119.9$$

$$X212 + X222 + X232 + X242 \leq 140.1$$
$$X212 + X222 + X232 + X242 \geq 139.9$$

$$X312 + X322 + X332 + X342 \leq 145.1$$
$$X312 + X322 + X332 + X342 \geq 144.9$$

$$X111 + X211 + X311 \leq 90.1$$
$$X111 + X211 + X311 \geq 89.9$$

$$X121 + X221 + X321 \leq 110.1$$
$$X121 + X221 + X321 \geq 109.9$$

$$X131 + X231 + X331 \leq 115.1$$
$$X131 + X231 + X331 \geq 114.9$$

$$X141 + X241 + X341 \leq \mathbf{11}5.1$$
$$X141 + X241 + X341 \geq \mathbf{11}4.9$$

$$X112 + X212 + X312 \leq 90.1$$
$$X112 + X212 + X312 \geq 89.9$$

$$X122 + X222 + X322 \leq 125.1$$
$$X122 + X222 + X322 \geq 124.9$$

$$X132 + X232 + X332 \leq 115.1$$

X132 + X232 + X332 ≥ 114.9

X142 + X242 + X342 ≤ 75.1
X142 + X242 + X342 ≥ 74.9

X111 + X112 ≤ **6**0
X121 + X122 ≤ **35**

X131 + X132 ≤ **8**0

X141 + X142 ≤ **45**

X211 + X212 ≤ **8**0
X221 + X222 ≤ **9**0

X231 + X232 ≤ **8**0

X241 + X242 ≤ **70**

X311 + X312 ≤ **4**0
X321 + X322 ≤ **11**0

X331 + X332 ≤ **7**0

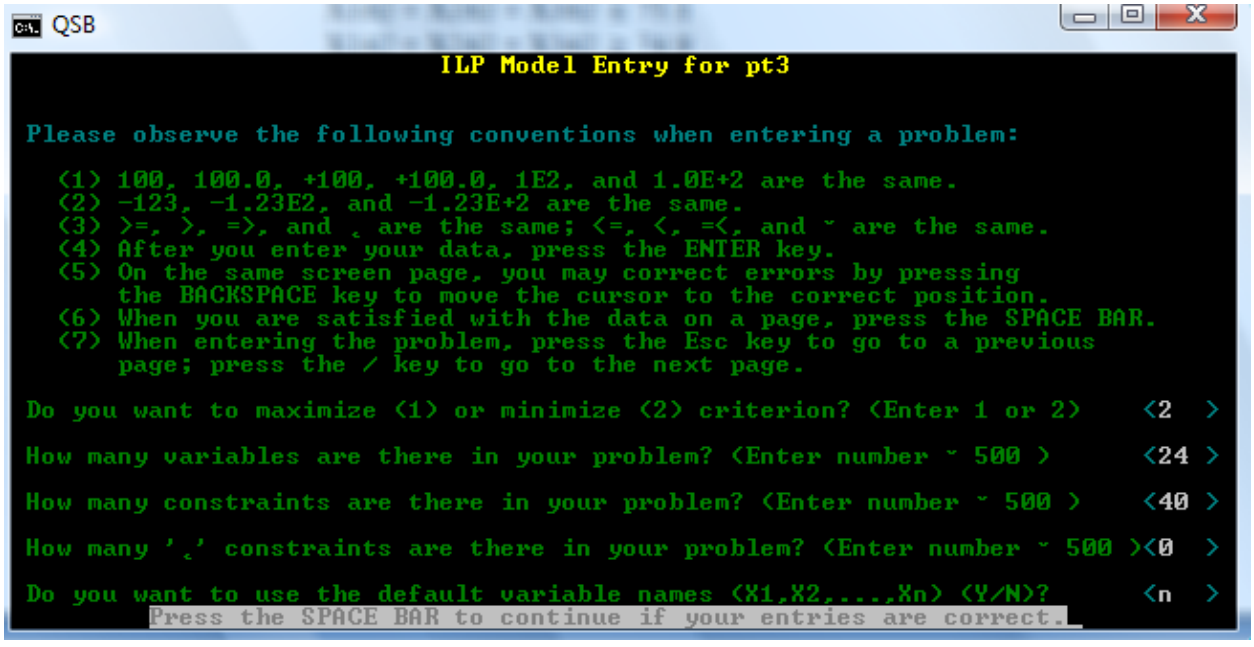
X341 + X342 ≤ **75**

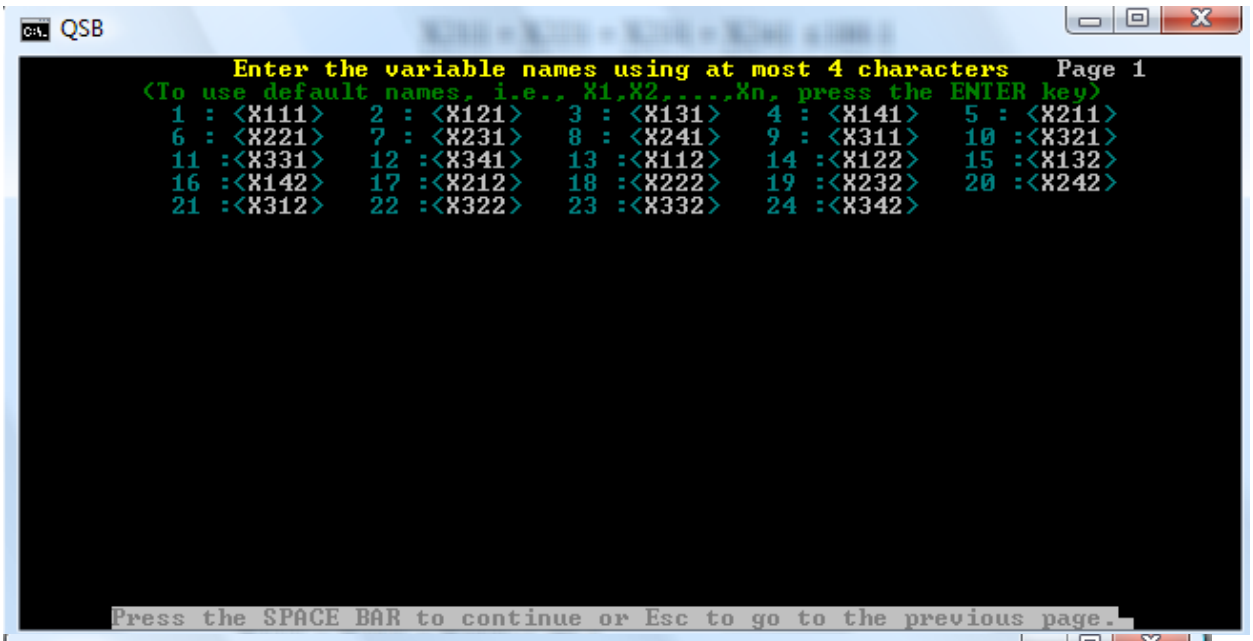
Xijk ≥ 0 , i =1,2, ..., m; j =1,2, ...,n; k =1, 2,..., p ; m = 3; n = 4 ; p = 2;

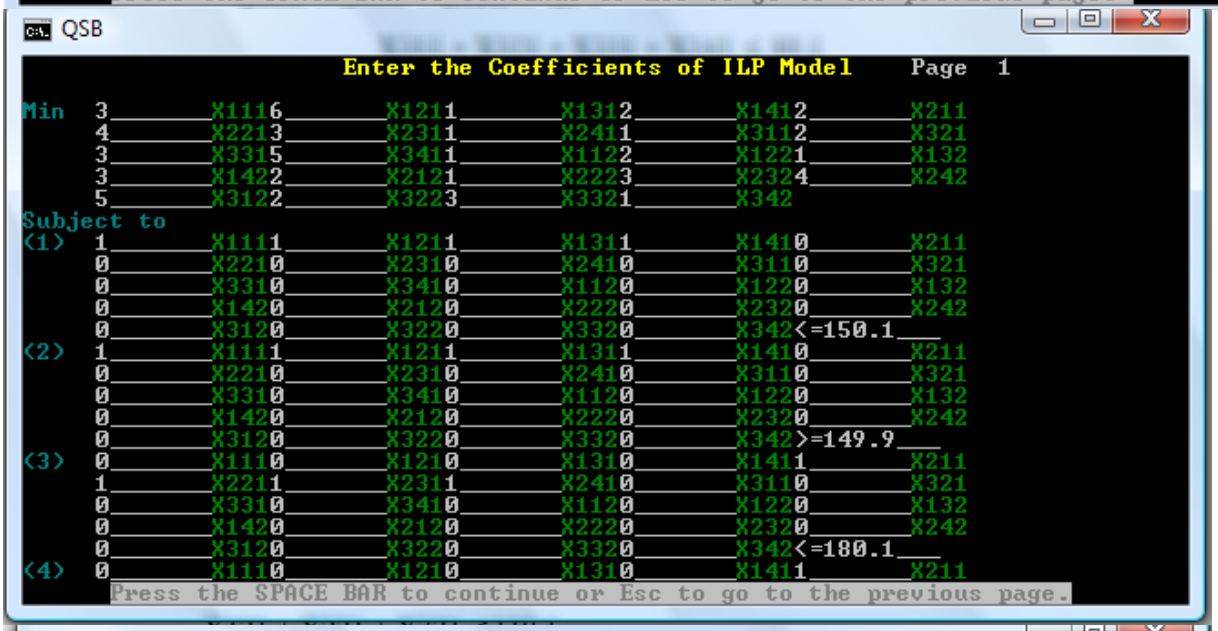
Xijk ∈ Z , i =1,2, ..., m; j =1,2, ...,n; k =1, 2,..., p ; m = 3; n = 4 ; p = 2;

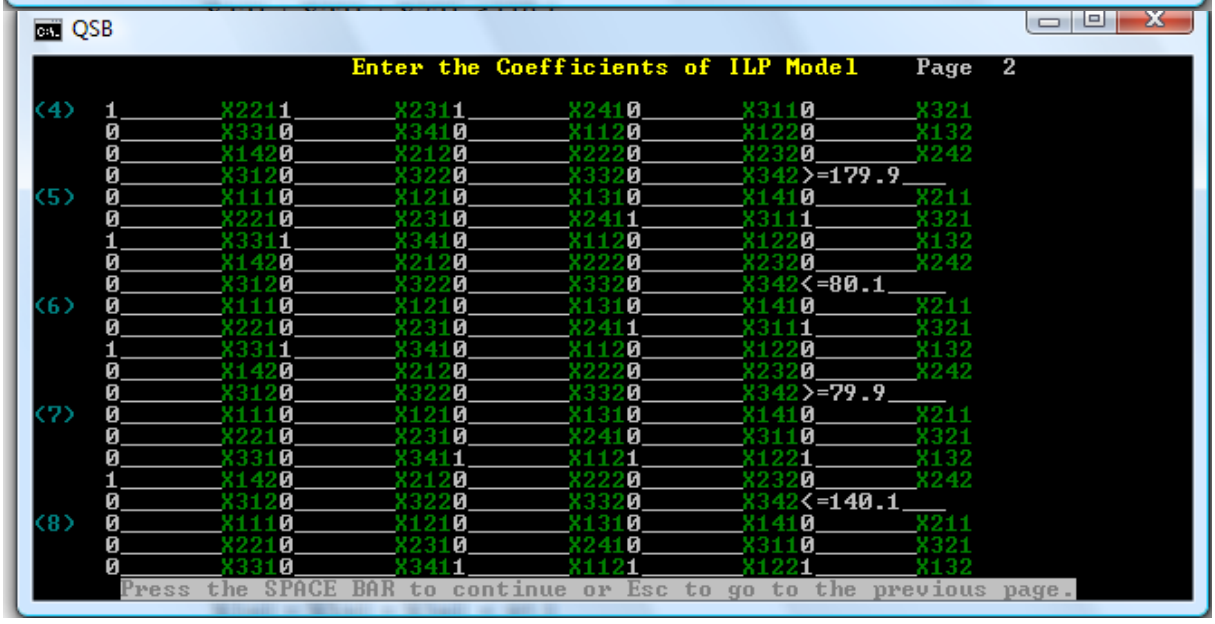
f = 3.X111 + 6.X121 + X131 + 2.X141 + 2.X211 + 4.X221 + 3. X231 + X241 + X311 + +2.X321+ 3 . X331 + 5.X341 + X112 + 2.X122 + X132 + 3.X142 + 2.X212 + X222 + 3.X232+ + 4.X242 + 5.X312 + 2.X322 + 3.X332 + X342

Min f




QSB
Enter the variable names using at most 4 characters Page 1
(To use default names, i.e., X1,X2,...,Xn, press the ENTER key)
1 : <X111> 2 : <X121> 3 : <X131> 4 : <X141> 5 : <X211>
6 : <X221> 7 : <X231> 8 : <X241> 9 : <X311> 10 :<X321>
11 :<X331> 12 :<X341> 13 :<X112> 14 :<X122> 15 :<X132>
16 :<X142> 17 :<X212> 18 :<X222> 19 :<X232> 20 :<X242>
21 :<X312> 22 :<X322> 23 :<X332> 24 :<X342>
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.


QSB
Enter the Coefficients of ILP Model Page 1
Min 3 X1116 X1211 X1312 X1412 X211
4 X2213 X2311 X2411 X3112 X321
3 X3315 X3411 X1122 X1221 X132
3 X1422 X2121 X2223 X2324 X242
5 X3122 X3223 X3321 X342
Subject to
(1) 1 X1111 X1211 X1311 X1410 X211
0 X2210 X2310 X2410 X3110 X321
0 X3310 X3410 X1120 X1220 X132
0 X1420 X2120 X2220 X2320 X242
0 X3120 X3220 X3320 X342<=150.1
(2) 1 X1111 X1211 X1311 X1410 X211
0 X2210 X2310 X2410 X3110 X321
0 X3310 X3410 X1120 X1220 X132
0 X1420 X2120 X2220 X2320 X242
0 X3120 X3220 X3320 X342>=149.9
(3) 0 X1110 X1210 X1310 X1411 X211
1 X2211 X2311 X2410 X3110 X321
0 X3310 X3410 X1120 X1220 X132
0 X1420 X2120 X2220 X2320 X242
0 X3120 X3220 X3320 X342<=180.1
(4) 0 X1110 X1210 X1310 X1411 X211
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.


QSB
Enter the Coefficients of ILP Model Page 2
(4) 1 X2211 X2311 X2410 X3110 X321
0 X3310 X3410 X1120 X1220 X132
0 X1420 X2120 X2220 X2320 X242
0 X3120 X3220 X3320 X342>=179.9
(5) 0 X1110 X1210 X1310 X1410 X211
0 X2210 X2310 X2411 X3111 X321
1 X3311 X3410 X1120 X1220 X132
0 X1420 X2120 X2220 X2320 X242
0 X3120 X3220 X3320 X342<=80.1
(6) 0 X1110 X1210 X1310 X1410 X211
0 X2210 X2310 X2411 X3111 X321
1 X3311 X3410 X1120 X1220 X132
0 X1420 X2120 X2220 X2320 X242
0 X3120 X3220 X3320 X342>=79.9
(7) 0 X1110 X1210 X1310 X1410 X211
0 X2210 X2310 X2410 X3110 X321
0 X3310 X3411 X1121 X1221 X132
1 X1420 X2120 X2220 X2320 X242
0 X3120 X3220 X3320 X342<=140.1
(8) 0 X1110 X1210 X1310 X1410 X211
0 X2210 X2310 X2410 X3110 X321
0 X3310 X3411 X1121 X1221 X132
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.

Etc.

4.7. PROBLEMA DE TRANSPORT TRIDIMENSIONALĂ MULTIOBIECTIV

Se va prezeta o generalizare în problema de transport tridimensională din paragraful 4.5 considerând mai multe funcţii obiectiv

Problema de transport tridimensională multiobiectiv constă în transportul din m depozite a p produse (materiale, materii prime) în n centre de consum (n magazii) şi optimizarea mai multor funcţii obiectiv.

În m depozite A_1 , A_2 , . . . , A_m se află p produse (materiale) P_1 , P_2 , . . . , P_p în cantităţile a_{ik} , i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . , p; şi se transportă în n centre de consum (magazii) B_1 , B_2 , . . . , B_n în cantităţile b_{jk} , j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p.

Deci, oferta este a_{ik} şi cererea b_{jk} , iar costul unitar de transport a unităţii de produs P_k din A_i în B_j este c_{ijk} , i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p.

Se vor considera trei funcţii obiectiv care trebuie optimizate:

- funcţia f_1 care reprezintă costul total al transportului, care se va minimiza;
- funcţia f_2 - timpul total de transport, care se va minimiza;
- funcţia f_3 - cantitatea de produse care se transportă, care se va maximiza.

Se notează cu:

- X_{ijk} cantitatea din produsul P_k transportată din A_i în B_j ;
- t_{ij} timpul total de transport din A_i în B_j ;
- g_{ij} cantitatea maximă ce se poate transporta din A_i în B_j ;
- α_{ijk} factor de transformare a produselor pentru a se putea aduna;
- $X = (X_{ijk})$;

unde i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p.

Modelul matematic corespunzător este dat de relaţiile (4.27).

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} = a_{ik} \quad , \text{ i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ijk} = b_{jk} \quad , \text{ j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{k=1}^{p} X_{ijk} \le g_{ij} \quad , \text{ i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n;} \qquad \textbf{(4.27)}$$

$$\mathbf{X_{ijk}} \ge \mathbf{0} \quad , \text{ i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, ... , p;}$$

$$\mathbf{f_1(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{ijk} . X_{ijk}$$

$$\mathbf{f_2(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} t_{ij} . X_{ijk}$$

$$\mathbf{f_3(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ijk} . X_{ijk}$$

min $f_1(X)$

min $f_2(X)$

max $f_3(X)$

Trebuie să fie îndeplinite condiţiile (4.28).

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \quad , \text{k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m;} \qquad \textbf{(4.28)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} g_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} \quad , \text{j = 1, 2, . . . , n;}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} b_{jk} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}$$

Rezolvarea se poate face prin maximizarea utilităţii globale.

4.8. REZOLVAREA PROBLEMEI DE TRANSPORT TRIDIMENSIONALĂ MULTIOBIECTIV PRIN METODA MAXIMIZĂRII UTILITĂŢII GLOBALE

Se consideră modelul matematic al problemei de transport tridimensională multiobiectiv din relaţiile (4.37).

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} = a_{ik} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ijk} = b_{jk} \quad , \text{j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{k=1}^{p} X_{ijk} \le g_{ij} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n;} \qquad \textbf{(4.37)}$$

$\mathbf{X_{ijk}} \ge \mathbf{0}$, i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, ... , p;

$$\mathbf{f_1(X)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{ijk}.X_{ijk}$$

$$\mathbf{f_2(X)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} t_{ij}.X_{ijk}$$

$$\mathbf{f_3(X)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} \alpha_{ijk}.X_{ijk}$$

min $f_1(X)$

min $f_2(X)$

max $f_3(X)$

unde: X_{ijk} este cantitatea din produsul P_k transportată din A_i în B_j ;

$X = (X_{ijk})$; i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p.

Etapa 1.

Pentru fiecare funcţie obiectiv $f_k(X)$ se determină soluţia optimă a problemei de transport cu o funcţie obiectiv, k = 1, 2, 3.

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ijk} = b_{jk} \quad , \text{j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} = a_{ik} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{k=1}^{p} X_{ijk} \le g_{ij} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n;} \qquad \textbf{(4.38)}$$

$\mathbf{X_{ijk}} \ge \mathbf{0}$, i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, ... , p;

$$\mathbf{f_1(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{ijk} . X_{ijk}$$

min $f_1(X)$

cu soluţia optimă X^{*1} ;

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ijk} = b_{jk} \quad , \text{j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} = a_{ik} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{k=1}^{p} X_{ijk} \le g_{ij} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n;} \qquad \textbf{(4.39)}$$

$\mathbf{X_{ijk}} \ge \mathbf{0}$, i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, ... , p;

$$\mathbf{f_2(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} t_{ij} . X_{ijk}$$

min $f_2(X)$

cu soluţia optimă X^{*2} ;

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ijk} = b_{jk} \quad , \text{j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} = a_{ik} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{k=1}^{p} X_{ijk} \le g_{ij} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n;} \qquad \textbf{(4.40)}$$

$\mathbf{X_{ijk}} \ge \mathbf{0}$, i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, ... , p;

$$\mathbf{f_3(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ijk} . X_{ijk}$$

max $f_3(X)$

cu soluţia optimă X^{*3}.

Pentru fiecare funcţie obiectiv $f_k(X)$ se determină soluţia pesimă (nonoptimă, opusă valorii optime, cea mai defavorabilă) X^{-k} a problemei de transport cu o funcţie obiectiv, k = 1, 2, 3.

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ijk} = b_{jk} \quad , \text{j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} = a_{ik} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{k=1}^{p} X_{ijk} \le g_{ij} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n;} \qquad \textbf{(4.41)}$$

$$\mathbf{X_{ijk}} \ge \mathbf{0} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, ... , p;}$$

$$\mathbf{f_1(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{ijk}.X_{ijk}$$

max $f_1(X)$

cu soluţia pesimă X^{-1} ;

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ijk} = b_{jk} \quad , \text{j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} = a_{ik} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{k=1}^{p} X_{ijk} \le g_{ij} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n;} \qquad \textbf{(4.42)}$$

$$\mathbf{X_{ijk}} \ge \mathbf{0} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, ... , p;}$$

$$\mathbf{f_2(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} t_{ij}.X_{ijk}$$

max $f_2(X)$

cu soluţia pesimă X^{-2} ;

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ijk} = b_{jk} \quad , \text{j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} = a_{ik} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . , p;}$$

$$\sum_{k=1}^{p} X_{ijk} \le g_{ij} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n;} \qquad \textbf{(4.43)}$$

$$\mathbf{X_{ijk}} \ge \mathbf{0} \quad , \text{i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, ... , p;}$$

$$\mathbf{f_3(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ijk}.X_{ijk}$$

min $f_3(X)$

cu soluţia pesimă X^{-3}.

Se notează: O_k = Optimum $f_k(X) = f_k(X^{*k})$

P_k = Pesim $f_k(X) = f_k(X^{-k})$

k = 1, 2, 3.

Deci: $O_1 = \min f_1(X) = f_1(X^{*1})$

$O_2 = \min f_2(X) = f_2(X^{*2})$

$O_3 = \max f_3(X) = f_3(X^{*3})$

$P_1 = \max f_1(X) = f_1(X^{-1})$

$P_2 = \max f_2(X) = f_2(X^{-2})$

$P_3 = \min f_3(X) = f_3(X^{-3})$

Etapa 2.

Pentru valorile optime şi pesime ale funcţiilor obiectiv se dau utilităţile acestor valori de către decident în tabelul nr. 4.43.

Valoarea optimă O_k are utilitatea U_k , k = 1, 2, 3.

Valoarea pesimă P_k are utilitatea U_{3+k} , k = 1, 2, 3.

Tabelul nr. 4.43 Utilităţile valorilor optime şi pesime

O_k / P_k	O_1	O_2	O_3	P_1	P_2	P_3
U_k	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6

Dacă o situaţie este mai convenabilă, utilitatea sa va fi mai mare şi

$U_k > U_{3+k}$, k = 1, 2, 3;

deoarece valoarea optimă O_k este preferată valorii pesime P_k , k = 1, 2, 3.

Etapa 3.

Se transformă funcţiile obiectiv $f_1(X)$, $f_2(X)$, $f_3(X)$ în funcţii utilitate $F_1(X)$, $F_2(X)$, $F_3(X)$, astfel:

$$F_k(X) = \alpha_k \cdot f_k(X) + \beta_k ,$$

se face: $X = X^{*k}$ si $X = X^{-k}$

Se obţin şi se rezolvă trei sisteme de ecuaţii liniare cu două necunoscute α_k şi β_k , k = 1, 2, 3.

$$\alpha_k \cdot O_k + \beta_k = U_k$$

$$\alpha_k \cdot P_k + \beta_k = U_{3+k} \quad , \quad k = 1, 2, 3.$$

Se obţin α_k şi β_k :

$$\alpha_k = \frac{U_k - U_{3*k}}{O_k - P_k}$$

$$\beta_k = \frac{U_{3*k} . O_k - U_k . P_k}{O_k - P_k}$$

Se calculează $F_k(X)$

$$F_k(X) = \alpha_k \cdot f_k(X) + \beta_k = \frac{U_k - U_{3*k}}{O_k - P_k} \cdot f_k(X) + \frac{U_{3*k} \cdot O_k - U_k \cdot P_k}{O_k - P_k}$$

k = 1, 2, 3.

Etapa 4.

Se construieşte funcţia obiectiv sinteză F(X),

$$F(X) = F_1(X) + F_2(X) + F_3(X) = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{U_k - U_{3*k}}{O_k - P_k} \cdot f_k(X) + \frac{U_{3*k} \cdot O_k - U_k \cdot P_k}{O_k - P_k} \right) = \ldots$$

Se rezolvă problema de transport tridimensională monoobiectiv:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ijk} = b_{jk} \quad , j = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, p;$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijk} = a_{ik} \quad , i = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, p;$$

$$\sum_{k=1}^{p} X_{ijk} \leq g_{ij} \quad , i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(4.44)}$$

$$\mathbf{X_{ijk}} \geq \mathbf{0} \quad , i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, p;$$

$$F(X) = \left(\frac{U_1 - U_4}{O_1 - P_1} \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{ijk} \cdot X_{ijk} + \frac{U_4 \cdot O_1 - U_1 \cdot P_1}{O_1 - P_1} \right) + \left(\frac{U_2 - U_5}{O_2 - P_2} \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} t_{ij} \cdot X_{ijk} + \right.$$

$$\left. + \frac{U_5 \cdot O_2 - U_2 \cdot P_2}{O_2 - P_2} \right) + \left(\frac{U_3 - U_6}{O_3 - P_3} \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ijk} \cdot X_{ijk} + \frac{U_6 \cdot O_3 - U_3 \cdot P_3}{O_3 - P_3} \right)$$

Max F(X)

Se obţine soluţia optimă de maximă utilitate $X^* = (X^*_{ijk})$.

Se calculează cele trei funcţii obiectiv în soluţia optimă obţinută X^*: $f_1(X^*)$, $f_2(X^*)$, $f_3(X^*)$.

Observaţie.

Funcţia obiectiv sinteză F(X) poate fi obţinută şi altfel:

$$F(X) = k_1 \cdot F_1(X) + k_2 \cdot F_2(X) + k_3 \cdot F_3(X) = \ldots$$

k_1 , k_2 , k_3 sunt coeficienţi de importanţă ale funcţiilor obiectiv f_i , $k_i > 0$, i = 1, 2, 3.

Se pot alege coeficienţii de importanţă k_1 , k_2 , k_3 astfel încât:

$k_i > 0$, i = 1, 2, 3;
$k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

4. 9. PROBLEMA DE TRANSPORT CU CAPACITĂŢI LIMITATE ŞI RUTE INTERZISE (BLOCATE)

Există în practica economică probleme de transport cu limitări superioare ale capacităţilor de transport, iar anumite rute sunt interzise (blocate).

Un produs omogen este stocat în depozitele (localităţile) A_1 , A_2 , …, A_m respectiv în cantităţile a_1 , $a_{2\ ,\ ...,}\ a_m$ şi trebuie transportat în centrele de consum (magazine, firme, localităţi) B_1 , B_2 , …, B_n unde este cerut respectiv în cantităţile b_1 , b_2 , …, b_n . Capacitatea maximă de transport din depozitul A_i în centrul de consum B_j este egală cu d_{ij} , i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n.. Există rute între o parte dintre furnizori şi anumiţi consumatori care nu pot fi folosite la un moment dat, numindu-le rute interzise sau blocate, iar acestea sunt date de limita de capacitate de transport pe ruta respectivă egală cu zero. Astfel, dacă ruta A_k, B_h este interzisă (blocată), atunci:

$$d_{kh} = 0 ,\ k \in \{1, 2, \ldots, m\}, h \in \{1, 2, \ldots, n\},\ m, n \in N^* .$$

Se pune problema determinării cantităţilor de produs ce urmează să fie transportate de la depozite la centrele de consum, astfel încât să nu depăşească disponibilul (oferta), cererea să fie satisfăcută, capacitatea rutei să nu fie depăşită, rutele interzise (blocate) să nu fie utilizate şi cantitatea totală transportată să fie maximă.

Se presupune că:

$$a_i \geq 0 , b_j \geq 0 , i = 1, 2,..., m; j = 1, 2,...,n;$$
$$d_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2,..., m; j = 1, 2,...,n;$$

Problema de transport cu limitări (superioare) ale capacităţilor de transport şi cu anumite rute interzise (blocate) se poate modela şi rezolva prin *programare liniară* şi prin *teoria grafurilor* (algoritmul Ford – Furkenson pentru determinarea fluxului maxim într-o reţea de transport). Se va prezenta ***modelarea şi rezolvarea prin programare liniară***.

În funcţie de relaţia dintre capacitatea rutelor, cerere şi ofertă, problema poate fi echilibrată sau neechilibrată, fiind rezolvabilă în toate situaţiile. Pentru ca oferta şi cererea să fie satisfăcute, trebuie să fie echilibrată şi să fie îndeplinite condiţiile:

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} \geq b_j \quad , \quad j = 1, 2,...,n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \geq a_i \quad , \quad i = 1, 2,..., m;$$

Problema de transport cu capacităţi limitate şi cu anumite rute interzise (blocate) este echilibrată, deci cererea este egală cu oferta, dacă:

.

Se notează cu K x H mulţimea indicilor rutelor interzise (blocate):

$K \times H = \{(k, h), d_{kh} = 0, k \in \{1, 2, \ldots, m\}, h \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$;

Se notează cu X_{ij} cantitatea de produs ce va fi transportată din A_i în B_j , i = 1, 2,..., m; j = 1, 2,...,n; $(i, j) \notin K \times H$;

$$X = (X_{ij}), i = 1, 2,..., m;\ j = 1, 2,..., n; (i, j) \notin K \times H$$

Schematic transportul va fi reprezentat astfel:

$$A_i , a_i \xrightarrow[X_{ij}]{d_{ij}} B_j , b_j$$

Modelul matematic al problemei de transport cu capacităţi limitate şi rute interzise (blocate) este o problemă de programare liniară, relaţiile (4. 55).

$$\sum_{j=1,(i,j)\notin KxH}^{n} X_{ij} \le a_i , \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1,(i,j)\notin KxH}^{m} X_{ij} \le b_j , \; j = 1, 2, \ldots, n; \; j \notin H \qquad \textbf{(4.55)}$$

$$0 \le X_{ij} \le d_{ij} , \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \; (i, j) \notin K \times H;$$

$$X_{ij} \ge 0 , \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \; (i, j) \notin K \times H;$$

$$f(X) = \sum_{i=1,(i,j)\notin KxH}^{m} \; \sum_{j=1, j\notin H}^{n} X_{ij}$$

$$\max f(X)$$

Problema de transport cu capacităţi limitate şi rute interzise (blocate) (4.55) se poate rezolva prin algoritmul simplex din programarea liniară sau cu un program pe calculator, de exemplu Qsb, modulul *linear programming* (sau modulul *integer linear programming)*, considerând că variabilele au un singur indice. La întrebarea programului Qsb:

Do you want to use default variable names (X1, X2, ..., Xn) (Y/N)?

Se va răspunde N, apoi când apare mesajul:

Enter the variable names using ...

Se vor introduce numele variabilelor: X11, X12, X13 etc., cele pentru care rutele sunt permise, deci $d_{ij} > 0$.

Problema de transport cu capacităţi limitate şi rute interzise (blocate) se poate pune într-un tabel de transport ca la problema de transport de minimizare clasică, dar în aceeaşi celulă (i, j) a tabelului se pun d_{ij} , X_{ij} . De fapt, variabilele care ar corespunde rutelor blocate pot fi considerate că au valoarea zero, dar nu se pun în modelul matematic (4.55) pentru a reduce numărul de variabile.

$\boldsymbol{d_{ij}}$
$\mathbf{X_{ij}}$

Observaţie

1. Problema de transport cu capacităţi limitate şi rute interzise (blocate) poate avea altă funcţie obiectiv în varianta monoobiectiv, de exemplu f_2 – costul total al transportului, care trebuie să fie minim, iar în acest caz trebuie să se cunoască costurile unitare de transport c_{ij} pentru rutele permise A_i , B_j . Rezolvarea sa în acest caz este tot prin programare liniară, dar este problemă de minim sau printr-un program pe calculator (Qsb sau alt program).

2. Problema de transport cu capacităţi limitate şi rute interzise (blocate) poate fi şi multiobiectiv, de exemplu funcţiile obiectiv pot fi:

f_1 - cantitatea totală transportată, trebuie să fie maximă;

f_2 – costul total al transportului, trebuie să fie minim.

Rezolvarea problemei multiobiectiv se poate face prin maximizarea utilităţii globale.

Exemplul nr. 4.7.

Tabelul nr.4.43

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Disponibil (Oferta) a_i
A_1	20	-	20	-	-	30
A_2	15	15	-	-	15	30

A_3	-	-	10	30	15	25
A_4	-	20	10	-	10	35
Necesar (Cererea) b_j	30	15	10	20	35	$S_1 = 120$ $S_2 = 110$

Un produs trebuie transportat de la m = 4 depozite A_1, A_2 , A_3 , A_4 la n = 5 centre de consum B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 folosind anumite rute de transport cu capacităţi limitate, iar alte rute sunt interzise (blocate). Cantităţile disponibile (oferta) în depozite, cantităţile necesare (cererea), limitările de capacitate ale rutelor de transport şi rutele interzise (blocate) sunt în tabelul nr. 4.43. Acolo unde nu există rută de transport între două localităţi, căsuţa respectivă a tabelului este liberă (sau -). Să se determine un plan de transport de la cele patru depozite la cele cinci centre de consum astfel încât cantitatea transportată să fie maximă.

Pentru căsuţele din tabel ce corespund rutelor blocate nu se consideră variabile X_{ij} , fiind considerate variabile cu un singur indice, sunt 11 variabile şi 20 de restricţii.

Modelul matematic:

$$X11 + X13 \leq 30$$
$$X21 + X22 + X25 \leq 30$$
$$X33 + X34 + X35 \leq 25$$
$$X42 + X43 + X45 \leq 35$$
$$X11 + X21 \leq 30$$
$$X22 + X42 \leq 15$$
$$X13 + X33 + X43 \leq 10$$
$$X34 \leq 20$$
$$X25 + X35 + X45 \leq 35$$
$$0 \leq X11 \leq 20$$
$$0 \leq X13 \leq 20$$
$$0 \leq X21 \leq 15$$
$$0 \leq X22 \leq 15$$
$$0 \leq X25 \leq 15$$
$$0 \leq X33 \leq 10$$
$$0 \leq X34 \leq 30$$
$$0 \leq X35 \leq 15$$
$$0 \leq X42 \leq 20$$
$$0 \leq X43 \leq 10$$
$$0 \leq X45 \leq 10$$
$$X11, X13, X21, X22, X25, X33, X34, X35, X42, X43, X45 \geq 0$$
$$f = X11 + X13 + X21 + X22 + X25 + X33 + X34 + X35 + X42 + X43 + X45$$
$$\max f$$

Se va rezolva cu programul Qsb, modulul *linear programming* (se poate rezolva si cu modulul *integer linear programming)*, iar soluţia optimă este cea din tabelul nr.4.44 (11 iteraţii).

Se obţine: max f = 105,

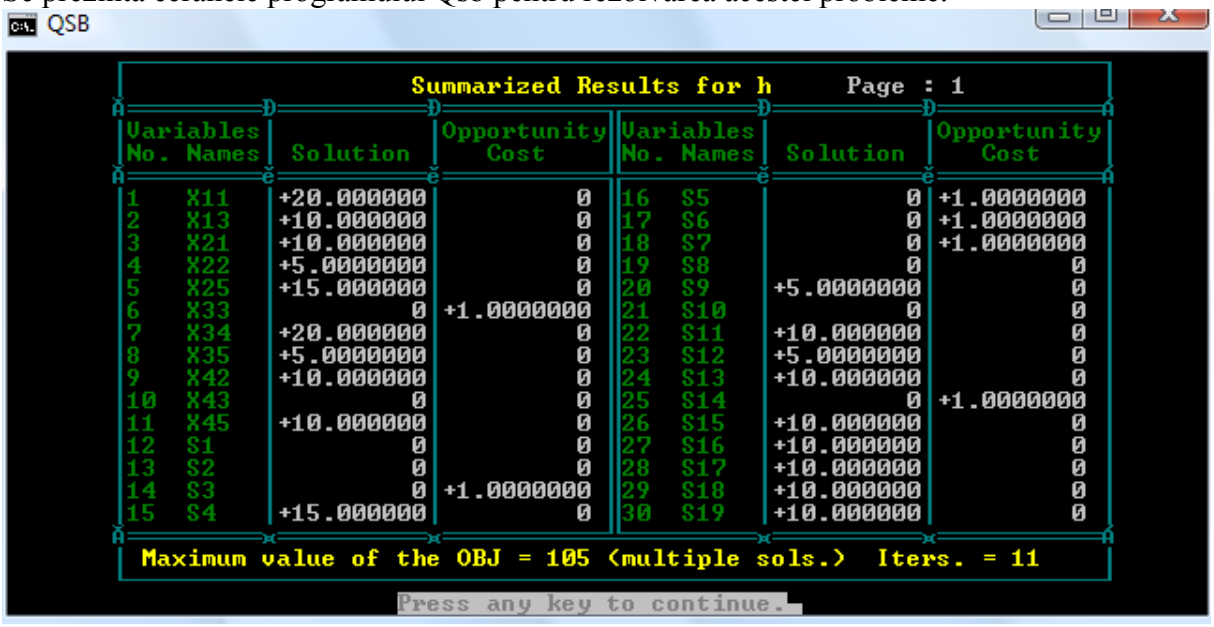
X11 = 20, X13 = 10, X21 = 10, X22 = 5, X25 = 15, X33 = 0, X34 = 20, X35 = 5, X42 = 10, X43 = 0, X45 = 10.

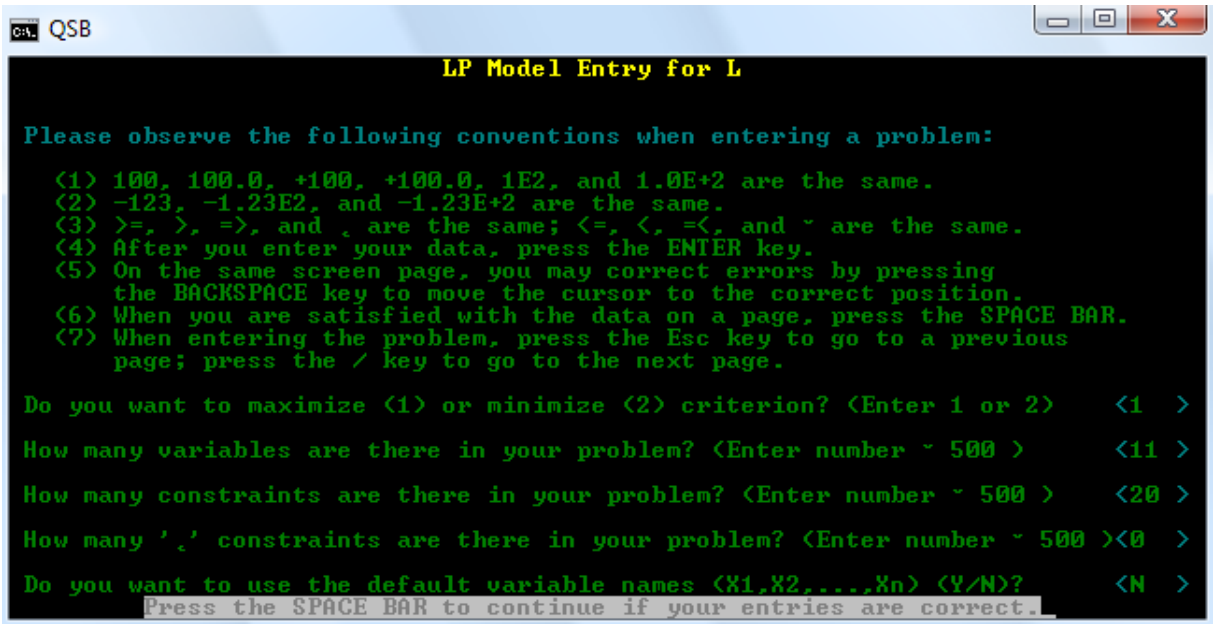
Tabelul nr.4.44

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Disponibil (Oferta) a_i
A_1	20 **20**	-	20 **10**	-	-	30
A_2	15 **10**	15 **5**	-	-	15 **15**	30

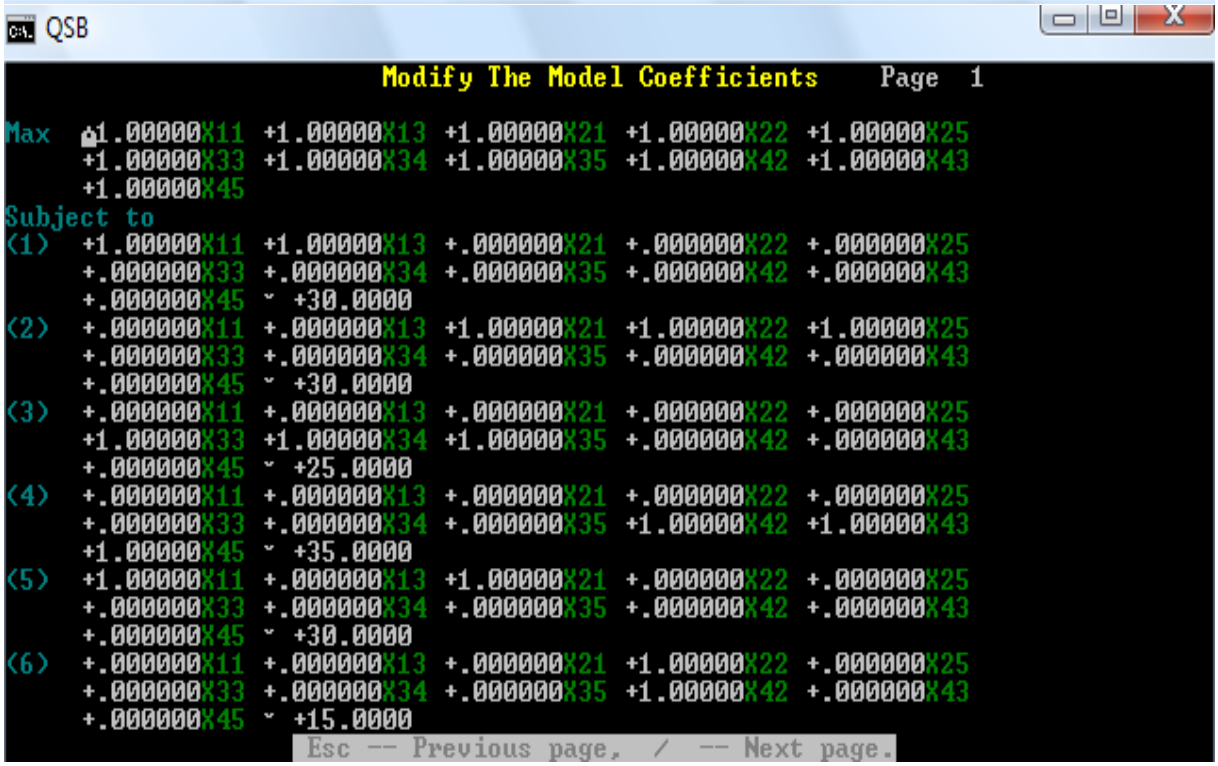
A_3	-	-	10 **0**	30 **20**	15 **5**	25
A_4	-	20 **10**	10 **0**	-	10 **10**	35
Necesar (Cererea) b_j	30	15	10	20	35	$S_1 = 120$ $S_2 = 110$

Se prezintă ecranele programului Qsb pentru rezolvarea acestei probleme.

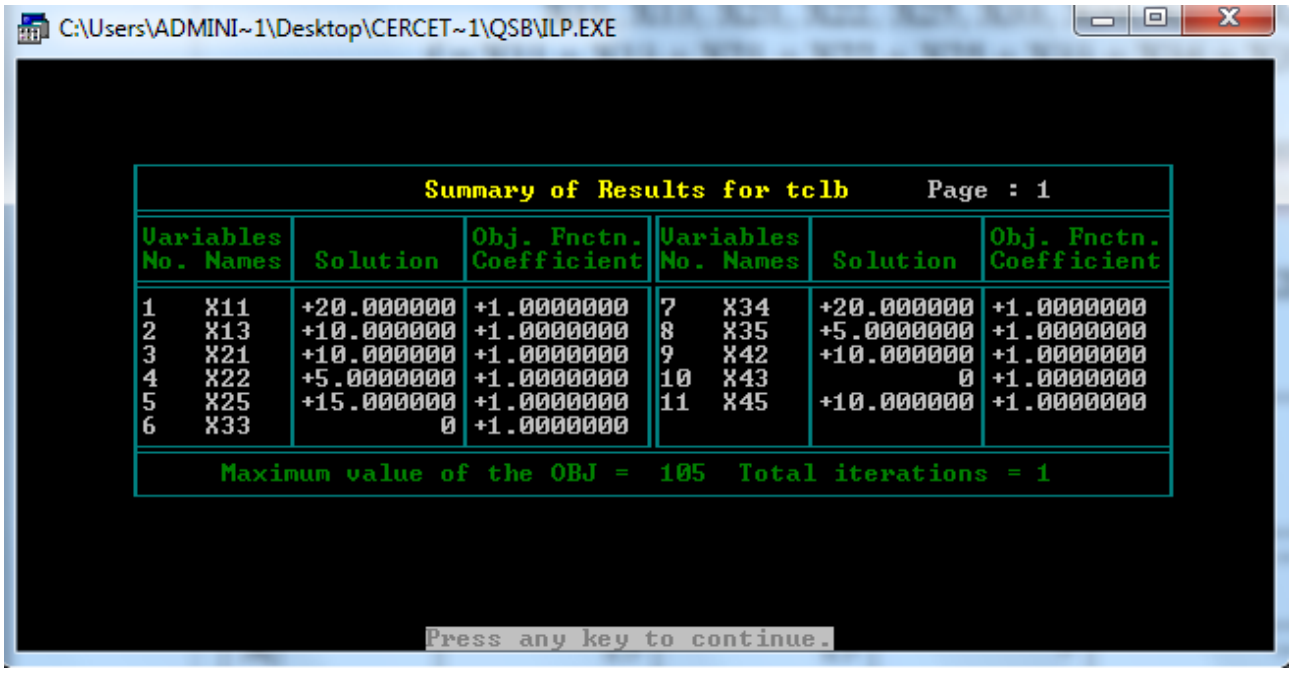




QSB
Enter the variable names using at most 4 characters Page 1
(To use default names, i.e., X1,X2,...,Xn, press the ENTER key)
1 : <X11 > 2 : <X13 > 3 : <X21 > 4 : <X22 > 5 : <X25 >
6 : <X33 > 7 : <X34 > 8 : <X35 > 9 : <X42 > 10 :<X43 >
11 :<X45 >
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.


QSB
Modify The Model Coefficients Page 1
Max +1.00000X11 +1.00000X13 +1.00000X21 +1.00000X22 +1.00000X25
+1.00000X33 +1.00000X34 +1.00000X35 +1.00000X42 +1.00000X43
+1.00000X45
Subject to
(1) +1.00000X11 +1.00000X13 +.000000X21 +.000000X22 +.000000X25
+.000000X33 +.000000X34 +.000000X35 +.000000X42 +.000000X43
+.000000X45 ˇ +30.0000
(2) +.000000X11 +.000000X13 +1.00000X21 +1.00000X22 +1.00000X25
+.000000X33 +.000000X34 +.000000X35 +.000000X42 +.000000X43
+.000000X45 ˇ +30.0000
(3) +.000000X11 +.000000X13 +.000000X21 +.000000X22 +.000000X25
+1.00000X33 +1.00000X34 +1.00000X35 +.000000X42 +.000000X43
+.000000X45 ˇ +25.0000
(4) +.000000X11 +.000000X13 +.000000X21 +.000000X22 +.000000X25
+.000000X33 +.000000X34 +.000000X35 +1.00000X42 +1.00000X43
+1.00000X45 ˇ +35.0000
(5) +1.00000X11 +.000000X13 +1.00000X21 +.000000X22 +.000000X25
+.000000X33 +.000000X34 +.000000X35 +.000000X42 +.000000X43
+.000000X45 ˇ +30.0000
(6) +.000000X11 +.000000X13 +.000000X21 +1.00000X22 +.000000X25
+.000000X33 +.000000X34 +.000000X35 +1.00000X42 +.000000X43
+.000000X45 ˇ +15.0000
Esc -- Previous page, / -- Next page.

Rezolvare cu QSB - ILP - modulul *integer linear programming*



4. 10. ALOCAREA OPTIMĂ A MAŞINILOR PRIN PROBLEMA DE TRANSPORT

Se consideră că într-o secţie există m maşini cu performanţe tehnico-economice diferite pe care se prelucrează piesele / reperele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ şi se cunosc elementele:

- cantitatea cerută pe piaţă pentru fiecare piesă / reper P_j pe zi (săptămână, lună etc.) b_j , $j = 1, 2, \ldots, n$;
- numărul maşinilor M_i disponibile (oferta de prelucrare) a_i , $i = 1, 2, \ldots, m$;
- costurile unitare de producţie ale prelucrării pe maşina M_i a piesei/reperului P_j egal cu c_{ij} , $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$;
- preţul unitar de vânzare a produsului P_j egal cu p_j , $j = 1, 2, \ldots, n$;
- timpul necesar prelucrării produsului P_j egal cu h_j , $j = 1, 2, \ldots, n$.

Se doreşte repartizarea pieselor / reperelor pe maşini astfel încât profitul să fie maxim. Aceste elemente sunt sintetizate în tabelul nr.4.33.

Problema se va transforma într-o problemă de transport de maximizare care se poate rezolva cu algoritmul de transport de maximizare (manual, pentru dimensiuni mici ale problemei) sau prin utilizarea programului Qsb.

Tabelul nr. 4.33.

P_j / M_i	P_1	P_2	. . .	P_j	. . .	P_n	NUMAR MASINI a_i
M_1	c_{11}	c_{12}	. . .	c_{1J}	. . .	c_{1n}	a_1
M_2	c_{21}	c_{22}	. . .	c_{2j}	. . .	c_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
M_i	c_{i1}	c_{i2}	. . .	c_{ij}	. . .	c_{in}	a_i
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
M_m	c_{m1}	c_{m2}	. . .	c_{mj}	. . .	c_{mn}	a_m
b_j Cerere produse pe zi	b_1	b_2	. . .	b_j	. . .	b_n	
h_j Număr ore(min) necesar prel./prod	h_1	h_2	. . .	h_j	. . .	h_n	
p_j preţ unitar produs	p_1	p_2	. . .	p_j	. . .	p_n	

Se calculează profitul pe oră obţinut prin utilizarea maşinii M_i la prelucrarea produsului P_j utilizând relaţia (4.29).

$$q_{ij} = \frac{p_j - c_{ij}}{h_j} \quad , i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(4.29)}$$

Dacă se presupune că se lucrează un schimb de T = 8 ore, atunci utilizând relaţia (4.29) şi

$$a'_i = T \cdot a_i = 8 \cdot a_i \quad , i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$b'_j = b_j \cdot h_j \quad , j = 1, 2, \ldots, n;$$

tabelul nr.4.33 se transformă într-un tabel al unei probleme de transport de maximizare, tabelul nr. 4.34.

Cu aceste notaţii b'_j reprezintă cererea de ore-maşină necesare pentru prelucrare, iar a'_i este oferta exprimată în ore-maşină disponibile pentru fiecare tip de maşină.

Se notează cu X_{ij} cantitatea de produse P_j ce se prelucrează pe masina M_i , $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Modelul matematic corespunzator problemei date de tabelul nr. 4.33. şi tabelul nr. 4.34 este tip problemă de transport de maximizare, dat de relaţiile (4.30).

Tabelul nr. 4.34.

P_j / M_i	P_1	P_2	. . .	P_n	Timp masina disponibil (Oferta) a'_i
M_1	q_{11}	q_{12}	. . .	q_{1n}	a'_1
M_2	q_{21}	q_{22}	. . .	q_{2n}	a'_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
M_m	q_{m1}	q_{m2}	. . .	q_{mn}	a'_m
b'_j Timp masina necesar (Cererea)	b'_1	b'_2	. . .	b'_n	$\sum_{i=1}^{m} a'_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b'_j$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a'_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b'_j \text{ , } j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(4.30)}$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ , } i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \cdot X_{ij}$$

$$\max f$$

Rezolvarea modelului matematic (4.30) se face prin algoritmul de transport de maximizare, respectiv prin utilizarea programului Qsb.

Dacă se consideră problema din tabelul nr. 4.33 şi tabelul nr. 4.34, dar criteriul de optimizare să fie de minimizare, deci min f, se obţine modelul problemei de transport de minimizare, (4.31), care va minimiza profitul, determinându-se situaţia cea mai nefavorabilă, nedorită, nonoptimă, pesimă.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a'_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b'_j \text{ , } j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(4.31)}$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ , } i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \cdot X_{ij}$$

$$\min f$$

În acest fel se poate obţine intervalul de încadrare a profitului f :

$$f \in [\, f_{min} , f_{max} \,] .$$

Profitul minim f_{min} nu este de dorit, dar este obţinut cu aceleaşi resurse ca şi profitul maxim f_{max} , posibil din cauze organizatorice.

Problema se poate dezvolta prin înlocuirea vectorului h = (h_1 , h_2 , ..., h_n) cu matricea

$h = (h_{ij})$, i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . ,n;

şi a relaţiei (4.29) cu relaţia (4.32).

$$q_{ij} = \frac{p_j - c_{ij}}{h_{ij}} \quad , \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(4.32)}$$

unde: $\mathbf{h_{ij}}$ - reprezinta timpul necesar prelucrarii pe maşina M_i a produsului P_j ,
i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . ,n; şi se obţine modelul unei probleme de transport de maximizare similar celui din relaţiile (4.30).

Aplicarea modelului elaborat pentru alocarea optimă a maşinilor

Într-un atelier piesele / reperele P_1 , P_2 , P_3 , P_4 pot fi prelucrate pe trei maşini M_1 , M_2 , M_3 cu rentabilitate diferită, iar ordinea de prelucrare nu contează. În tabelul nr. 4.35 se dau datele problemei. Se presupune că se lucrează T = 16 ore şi costurile şi preţurile se exprimă în mii lei.
Utilizând relaţia (4.29) şi ţinând cont că T = 16 ore, tabelul nr.4.35 se transformă în tabelul nr.4.36 , care este tabelul unei probleme de transport.

Tabelul nr.4.35.

P_j / M_i	P_1	P_2	P_3	P_4	NUMĂR MAŞINI a_i
M_1	200	129	80	55	30
M_2	280	120	70	55	25
M_3	180	141	65	65	40
b_j Cerere produse / zi	100	200	250	20	
h_j Număr ore necesar prel./ prod.	4	3	2	1	
p_j preţ unitar produs	300	150	100	70	

Tabelul nr.4.36

P_j / M_i	P_1	P_2	P_3	P_4	a'_i Timp maşină disponibil (Oferta)
M_1	25	7	10	15	480
M_2	5	10	15	15	400
M_3	30	3	17.5	5	640
b'_j Timp masină necesar (Cererea)	400	600	500	20	1520

De exemplu,

$a_1' = T.a_1 = 16.30 = 480$ ore.maşină

$b_1' = b_1 . h_1 = 100.4 = 400$ ore.produs de prelucrat (ore.maşină)

$$q_{11} = \frac{p_1 - c_{11}}{h_1} = \frac{300 - 200}{4} = \frac{100}{4} = 25 \text{ mii lei/oră}$$ (q_{ij} se calculează pe coloană)

Se utilizează programul Qsb, modulul Transshipment Problem pentru maxim, obţinându-se soluţia optimă din tabelul nr. 4.37.
Se obţine (teoretic):

max f = 25150 mii lei = 25 150 000 = f_{max}

Practic (din cauza rotunjirilor la partea întregă a lui [X_{ij}/h_j]): max f = 25 126 000 lei = 65 .100+ +66 . 21 + 20 . 15 + 133 . 30 + 35 . 120 + 250 . 35 mii lei (s-a utilizat profitul unitar exprimat în lei/bucată de produs, de exemplu : 100 lei/produs P_1 = 300 - 200)
Deci, în tabelele nr.4.37 şi nr.4.37a :

- din piesa / reperul P_1 se prelucrează cantitatea de 260 ore.maşină, adică 260/4 = 65 bucăţi pe maşina M_1 şi cantitatea de 140 ore.maşină , adică 140/4 = 35 bucăti pe maşina M_3 ;
- din piesa / reperul P_2 se prelucrează cantitatea de 200 ore.maşină, adică [200/3] = 66 bucăţi pe maşina M_1 şi cantitatea de 400 ore.maşină, adică [400/3] = 133 bucăţi pe maşina M_2 ;
- piesa / reperul P_3 se prelucrează cantitatea de 500 ore.maşsină, adică 500/2 = 250 bucăţi pe maşina M_3 ;
- piesa / reperul P_4 se prelucrează cantitatea de 20 ore.maşină, adică 20/1 = 20 bucăţi pe maşina M_1 .

Tabelul nr.4.37

P_j / **M_i**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**a'_i** [ore.maşină] **Timp maşină disponibil (Oferta)**
M_1	**25** **260**	**7** **200**	**10** **0**	**15** **20**	**480**
M_2	**5** **0**	**10** **400**	**15** **0**	**15** **0**	**400**
M_3	**30** **140**	**3** **0**	**17.5** **500**	**5** **0**	**640**
b'_j [ore.produs] **Timp maşină necesar (Cererea)**	**400**	**600**	**500**	**20**	**1520**

Tabelul nr.4.37a. Soluţia optimă exprimată în bucăţi

P_j / **M_i**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**
M_1	**100** **65**	**21** **66**	**20** **0**	**15** **20**
M_2	**20** **0**	**30** **133**	**30** **0**	**15** **0**
M_3	**120** **35**	**9** **0**	**35** **250**	**5** **0**

Dacă se consideră aceeaşi problemă dată de tabelul nr.4.35 şi tabelul nr.4.36 , dar criteriul de optimizare să fie cel de minimum, deci min f, se obţine soluţia cea mai nefavorabilă şi nedorită în tabelul nr. 4.38.

Tabelul nr 4.38.

P_j / M_i	P_1	P_2	P_3	P_4	a'_i [ore.maşină] **Timp masina disponibil (Oferta)**
M_1	25 **0**	7 **0**	10 **480**	15 **0**	**480**
M_2	5 **400**	10 **0**	15 **0**	15 **0**	**400**
M_3	30 **0**	3 **600**	17.5 **20**	5 **20**	**640**
b'_j [ore.produs] **Timp masina necesar (Cererea)**	**400**	**600**	**500**	**20**	**1520**

Tabelul nr.4.38a. Soluţia defavorabilă, non-optimă, exprimată în bucăţi

P_j / M_i	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	**100** **0**	**21** **0**	**20** **240**	**15** **0**
M_2	**20** **100**	**30** **0**	**30** **0**	**15** **0**
M_3	**120** **0**	**9** **300**	**35** **10**	**5** **20**

Teoretic, min f = 9050 mii lei = 9 050 000 lei = f_{min} .
Practic, din tabelul nr.4.38a rezultă min f = 9 950 mii lei = 9 950 000 lei =100 . 20 + 300 .9 + 240 . 20 + 10 . 35 + 20 .5 mii lei

Se obţine intervalul teoretic în care se poate încadra profitul, deci:

$$\mathbf{f \in [\, f_{min}\, ,\, f_{max}\,]}$$

sau în cazul concret al aplicaţiei considerate (teoretic) :

$$f \in [\, 9\,050\,000 \,;\, 25\,150\,000\,].$$

Practic, $f \in [9\,950\,000; 25\,126\,000]$.

4. 11. Modele liniare de repartizare şi transfer de fonduri

O întreprindere are nevoie pentru o investiţie de o sumă de bani S_1 eşalonată în n perioade de timp, cu necesarul fiecarei perioade B_j egal cu b_j , j = 1, 2,...,n şi

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad .$$

Întreprinderea va solicita creditarea investiţiei la m bănci A_i (sau aceeaşi bancă care la momentele respective este în starea A_i) care dispun pentru această investiţie a întreprinderii de sumele a_i , suma totală este $S_2 = \sum_{i=1}^{m} a_i$, iar costul unitar (dobânda) al sumelor de la banca A_i în perioada B_j este c_{ij} unităţi monetare, i = 1,2,..., m; j = 1, 2,...,n. Se observă că este vorba despre o problemă de transport, iar elementele sale sunt similare celor din tabelul 4.39.

Tabelul nr.4.39

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_n	Disponibil a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Necesar b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Întrepriderea doreşte să obţină banii necesari cu un cost total minim, deci din punctul de vedere al întreprinderii se poate utiliza problema de tip transport de minimizare, cu modelul matematic dat de relaţiile (4.33), solutia optimă $X^{min} = (X_{ij}^{min})$, i = 1,2,..., m; j = 1, 2,...,n şi valoarea minimă a funcţiei obiectiv este f_{min}.

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_{ij} = a_i} \text{ , } i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{X_{ij} = b_j} \text{ , } j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mathbf{X_{ij} \geq 0} \text{ , } i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \mathbf{(4.33)}$$

$$\mathbf{f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot X_{ij}}$$

$$\mathbf{\min f(X)}$$

unde: $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$, $X = (X_{ij})$, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,...,n;

,

deci oferta este egală cu cererea, problema de transport este echilibrată şi se rezolvă cu algoritmul potentialelor pentru problema de minimizare sau pe calculator cu programul Qsb.

În acelaşi timp, băncile doresc să obţină un câştig maxim posibil din această afacere (funcţia f reprezintă preţul, dobânda), deci pentru bănci elementele problemei sunt sintetizate tot în tabelul 4.39, dar modelul matematic este o problemă de transport de maximizare dată de relaţiile (4.34) cu soluţia optimă X^{max} şi valoarea maximă a funcţiei obiectiv f_{max} .

$$X^{max} = (X_{ij}^{max}), \; i = 1,2,..., m; \; j = 1, 2,...,n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_{ij} = a_i}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{X_{ij} = b_j}\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mathbf{X_{ij}} \geq \mathbf{0}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \mathbf{(4.34)}$$

$$\mathbf{f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot X_{ij}}$$

max f(X)

Intervalul de încadrare a costului capitalului este

$$f \in [\ f_{min}\ ,\ f_{max}\ ]$$

şi în urma negocierii dintre întreprindere şi bănci va rezulta o combinaţie convexă a soluţiei minime şi maxime,

$$f = \lambda\ .\ f_{min} + (1 - \lambda\ ).\ f_{max}\ ,\ \ \lambda\ [0\ ,\ 1],$$

care va fi costul total al capitalului.

Exemplul nr. 4.9.

Se consideră m = 3 bănci B_i , i = 1, 2, 3 şi n = 4 clienţi, C_j , j = 1, 2, 3, 4, cu oferta de bani, cererea de bani şi costurile date în tabelul nr.4.45.

Tabelul nr.4.45

C_j / B_i	C_1	C_2	C_3	C_4	Oferta a_i (Lei)
B_1	5%	3%	6%	7%	100
B_2	2%	4%	7%	3%	80
B_3	4%	6%	5%	8%	120
Cererea b_j (Lei)	75	55	40	130	S = 300

Trebuie determinată ce sumă va fi luată de la fiecare bancă astfel încât costul total al creditării să fie minim. Se va utiliza modelul problemei de transport de minimizare şi se va rezolva cu programul Qsb - modulul Transshipment problem, iar soluţia optimă este în tabelul nr.4.46.

Tabelul nr.4.46

C_j / B_i	C_1	C_2	C_3	C_4	Oferta a_i (Lei)
B_1	5%	3%	6%	7%	100

	0	55	0	45	
B_2	2% 0	4% 0	7% 0	3% 80	80
B_3	4% 75	6% 0	5% 40	8% 5	120
Cererea b_j (Lei)	75	55	40	130	S = 300

Min f = 1260/100 lei = 12.6 lei.
Soluţia defavorabilă, nedorită de firmă, este în tabelul nr.4.47, max f = 1920/100 lei = 19.2 lei.

Tabelul nr.4.47

C_j / B_i	C_1	C_2	C_3	C_4	Oferta a_i
B_1	5% 75	3% 0	6% 0	7% 25	100
B_2	2% 0	4% 40	7% 40	3% 0	80
B_3	4% 0	6% 15	5% 0	8% 105	120
Cererea b_j	75	55	40	130	S = 300

Rezultă f $\in$ [12.60, 19.20].

Se vor modifica costurile c_{ij} (se va analiza oferta concretă a unor bănci) şi se va determina soluţia optimă.

4. 12. Problema de transport în programarea şi planificarea producţiei

într - un sistem de producţie (atelier,secţie, întreprindere) un anumit produs are cererea asigurată pe un an de zile, defalcată pe cele 4 trimestre, $\mathbf{b_j}$, b_j 0, j = 1, 2, 3, 4. Capacitatea de producţie în condiţii normale este de $\mathbf{a_i}$ unităţi de produs pe trimestru, $a_i > 0$, i = 1, 2, 3, 4, produsele au ciclul de fabricaţie mai mic de o lună, iar costul unitar pe produs este **c** unităţi monetare,

$$c > 0, \quad \sum_{j=1}^{n} b_j \geq \sum_{i=1}^{m} a_i \quad ,$$

deci cererea este mai mare decât oferta.

Dacă într - un trimestru se depăşeşte planul de fabricaţie , fabricându-se mai mult decât se cere pe piaţă în trimestrul respectiv, se poate vinde trimestrul următor, dar apar cheltuieli de stocaj în plus egale cu α unităţi monetare pe unitatea de produs şi trimestru.

Dacă se lucrează în zilele libere sau în alte condiţii, se pote fabrica peste plan în fiecare trimestru câte $\mathbf{d_i}$ unităţi de produs, dar cu costurile unitare mărite şi egale cu $\mathbf{c + \beta}$ pe produs, $c > 0$, $\beta > 0$.

Se cere să se determine un plan de producţie pe cele 4 trimestre (1 an), care să satisfacă cererea şi costurile totale de producţie (costuri de producţie şi costuri de stocaj) să fie minime.

Pentru rezolvarea problemei, se va transforma într-o problemă de transport bidimensională de minimizare. Se vor nota cu A_1, A_2, A_3, A_4 stările sistemului de producţie în cele 4 trimestre când capacitatea sa este a_i , i = 1, 2, 3, 4 şi costurile unitare pe produs sunt c, iar cu A'_1 , A'_2 , A'_3 , A'_4 stările sistemului de producţie în cele 4 trimestre când produce peste plan d_i unităţi de produs pe trimestru, i = 1, 2, 3, 4, cu costurile unitare pe produs egale cu $c + \beta$.

Se vor considera A_1, A_2, A_3, A_4, A'_1 , A'_2 , A'_3 , A'_4 ca si depozite (oferta), iar cele 4 trimestre T_1 , T_2, T_3, T_4 ca şi centre de consum (cererea). Se sintetizează aceste elemente în tabelul 4.40.

Tabelul nr.4.40.

$\mathbf{T_j}$ / $\mathbf{A_i}$	$\mathbf{T_1}$	$\mathbf{T_2}$	$\mathbf{T_3}$	$\mathbf{T_4}$	**Disponibil (Oferta)** $\mathbf{a_i}$
$\mathbf{A_1}$	**C**	$\mathbf{c + \alpha}$	$\mathbf{c + 2\alpha}$	$\mathbf{c + 3\alpha}$	$\mathbf{a_1}$
$\mathbf{A_2}$		**c**	$\mathbf{c + \alpha}$	$\mathbf{c + 2\alpha}$	$\mathbf{a_2}$
$\mathbf{A_3}$			**c**	$\mathbf{c + \alpha}$	$\mathbf{a_3}$
$\mathbf{A_4}$				**c**	$\mathbf{a_4}$
$\mathbf{A_5 = A'_1}$	$\mathbf{c + \beta}$	$\mathbf{c + \beta + \alpha}$	$\mathbf{c + \beta + 2\alpha}$	$\mathbf{c + \beta + 3\alpha}$	$\mathbf{d_1}$
$\mathbf{A_6 = A'_2}$		$\mathbf{c + \beta}$	$\mathbf{c + \beta + \alpha}$	$\mathbf{c + \beta + 2\alpha}$	$\mathbf{d_2}$
$\mathbf{A_7 = A'_3}$			$\mathbf{c + \beta}$	$\mathbf{c + \beta + \alpha}$	$\mathbf{d_3}$
$\mathbf{A_8 = A'_4}$				$\mathbf{c + \beta}$	$\mathbf{d_4}$
Necesar (Cererea) $\mathbf{b_j}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_4}$	$\mathbf{S_1}$ / $\mathbf{S_2}$

$$S_1 = \sum_{j=1}^{4} a_j + \sum_{j=1}^{4} d_j \qquad \textbf{(4.35)}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{4} b_j$$

S-a notat costul unitar egal cu ∞ (infinit) când este imposibilă folosirea situaţiei respective, iar pentru rezolvarea pe calculator pentru înlocuirea lui ∞ se alege o valoare mai mare decât celelalte elemente ale tabelului 4.40.

Modelul matematic este dat de relaţiile (4.36).

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_{ij} = a_i} \text{ , } i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{X_{ij}\ b_j} \text{ , } j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mathbf{X_{ij}} \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \mathbf{(4.36)}$$

$$\mathbf{f(X)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_{ij} \cdot X_{ij}}$$

$$\mathbf{\min f(X)}$$

unde: X_{ij} reprezintă cantitatea livrată din A_i in T_j cu costul unitar c_{ij} ,

$X = (X_{ij})$, i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n.

Costurile c_{ij} , i = 1, 2,..., m; j = 1, 2..., n, sunt date în tabelul nr. 4.40.

Tabelul nr.4.41.

L_j / A_i	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	Disponibil a_i
A_1	c	c+α	c+2α	c+3α	c+4α	c+5α	c+6α	c+7α	c+8α	c+9α	c+10α	c+11α	a_1
A_2		c	c+α	c+2α	c+3α	c+4α	c+5α	c+6α	c+7α	c+8α	c+9α	c+10α	a_2
A_3			c	c+α	c+2α	c+3α	c+4α	c+5α	c+6α	c+7α	c+8α	c+9α	a_3
A_4				c	c+α	c+2α	c+3α	c+4α	c+5α	c+6α	c+7α	c+8α	a_4
A_5					c	c+α	c+2α	c+3α	c+4α	c+5α	c+6α	c+7α	a_5
A_6						c	c+α	c+2α	c+3α	c+4α	c+5α	c+6α	a_6
A_7							c	c+α	c+2α	c+3α	c+4α	c+5α	a_7
A_8								c	c+α	c+2α	c+3α	c+4α	a_8
A_9									c	c+α	c+2α	c+3α	a_9
A_{10}										c	c+α	c+2α	a_{10}
A_{11}											c	c+α	a_{11}
A_{12}												c	a_{12}
A_{13}	c+β	c+β + α	c+β +2 α	c+β + 3 α									d_1
A_{14}		c+β	c+β+ α	c+β + 2 α									d_2
A_{15}			c+β	c+β+ α	c+β + 2 α								d_3
A_{16}				c+β	c+β+ α	c+β + 2 α							d_4
A_{17}					c+β	c+β+ α	c+β + 2 α						d_5
A_{18}						c+β	c+β+	c+β +					d_6

							α	2α					
A_{19}							$c+\beta$	$c+\beta+\alpha$	$c+\beta+2\alpha$				d_7
A_{20}								$c+\beta$					d_8
A_{21}									$c+\beta$				d_9
A_{22}										$c+\beta$			d_{10}
A_{23}											$c+\beta$		d_{11}
A_{24}												$c+\beta$	d_{12}
b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	S_1 S_2

Aceasta problemă (4.36) este o problemă de transport bidimensională de minimizare ce se rezolva cu algoritmul de transport (algoritmul potentialelor) de minimizare sau prin utilizarea unui program calculator, obţinându-se soluţia optimă (m = 8, n = 4 în exemplul considerat).
Problema se rezolvă analog şi în cazul când livrările către piaţă sunt lunare, modelul matematic este (4.36), dar se modifică m şi n, m = 24, n = 12 , produsele au ciclul de fabricaţie mai mic de o lună, iar costurile unitare, oferta si cererea se referă la o lună şi sunt cele din tabelul nr. 4.41.
Se pot considera şi alte orizonturi de timp: săptămâna, decada etc. pentru modelul (4.36), cu valori specifice ale lui m, n, c_{ij} , a_i , b_j , i = 1, 2,..., m; j = 1, 2..., n .

Exemplul nr. 4.8. Problema de transport în programarea producţiei

O firmă care fabrică un anumit produs are cererea asigurată pe un an de zile (sau alt orizont de timp), defalcată pe cele 4 trimestre, b_j , b_j 0, j = 1, 2, 3, 4. astfel:

$b_1 = 150$, $b_2 = 180$, $b_3 = 200$, $b_4 = 210$.

Tabelul nr.4.42.

T_j / **A_i**	**T_1**	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**Disponibil a_i**
A_1	40 (c)	40 + 10= 50 (c + α)	40 + 2. 10 = = 60 (c + 2α)	40 + 3. 10 = = 70 (c + 3α)	$a_1 = 90$
A_2	9999 **()**	40 **c**	40 + 10= 50 (c + α)	40 + 2. 10 = = 60 (c + 2α)	$a_2 = 100$
A_3	**9999 ()**	**9999 ()**	40 (c)	40 +10= 50 (c + α)	$a_3 = 105$
A_4	**9999 ()**	**9999 ()**	**9999 ()**	40 **(c)**	$a_4 = 112$
$A_5 = A'_1$	40 + 25= = 65 (c + β)	40 + 25 + 10 = 75 (c + β + α)	40 + 25 + +2.10 = 85 (c + β + 2α)	40 + 25 + +3.10 = 95 (c + β + 3α)	$d_1 = 50$
$A_6 = A'_2$	**9999 ()**	40 + 25= 65 (c + β)	40 + 25 + 10 = 75 (c + β + α)	40 + 25 + +2.10 = 85 (c + β + 2α)	$d_2 = 55$

$A_7 = A'_3$	**9999** **()**	**9999** **()**	40 + 25= 65 (c + β)	40 + 25 + 10 = 75 (c + β + α)	$d_3 = 60$
$A_8 = A'_4$	**9999** **()**	**9999** **()**	**9999** **()**	40 + 25= 65 (c + β)	$d_4 = 63$
Necesar b_j	$b_1 = 150$	$b_2 = 180$	$b_3 = 200$	$b_4 = 210$	$S_1 = 635$ $S_2 = 740$

Capacitatea de producţie în condiţii normale este de $\mathbf{a_i}$ unităţi de produs pe trimestru, $a_i > 0$, i = 1, 2, 3, 4, produsele au ciclul de fabricaţie mai mic de o lună, iar costul unitar pe produs este **c** unităţi monetare,

$c > 0$, ,

deci cererea este mai mare decât oferta. Valorile concrete sunt:

$a_1 = 90$, $a_2 = 100$, $a_3 = 105$, $a_4 = 112$, c = 40 u.m. (unităţi monetare)

Dacă într - un trimestru se depăşeşte planul de fabricaţie , fabricându-se mai mult decât se cere pe piaţă în trimestrul respectiv, se poate vinde trimestrul următor, dar apar cheltuieli de stocaj în plus egale cu α unităţi monetare pe unitatea de produs şi trimestru, α = 10 u.m. Dacă se lucrează în zilele libere sau în alte condiţii, se poate fabrica peste plan în fiecare trimestru câte d_i unităţi de produs, i = 1, 2, 3, 4, dar cu costurile unitare mărite şi egale cu c + β pe produs, c > 0, β > 0, astfel: $d_1 = 50$, $d_2 = 55$, $d_3 = 60$, $d_4 = 63$, β = 25**.**

Se cere să se determine un plan de producţie pe cele 4 trimestre (1 an), care să satisfacă cererea şi costurile totale de producţie (costuri de producţie şi costuri de stocaj) să fie minime.

$$S_1 = \sum_{i=1}^{4} a_i + \sum_{i=1}^{4} d_i = 407 + 228 = 635 \quad \text{unităţi de produs}$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{4} b_j = 150 + 180 + 200 + 210 = 740 \text{ unităţi de produs}$$

Pentru costul egal cu (acest cost înseamnă că situaţia respectivă nu poate avea loc) se alege o valoare mai mare decât toate costurile din tabelul nr. 4.42 , de exemplu 9999.

Se va rezolva problema de transport de minimizare din tabelul nr. 4.42 cu programul Qsb, iar soluţia optimă este în tabelul nr. 4.43 şi min f = 31100 u.m.

Tabelul nr.4.43.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	**Disponibil** a_i
A_1	40 90	50 0	60 0	70 0	$a_1 = 90$
A_2	9999 0	40 100	50 0	60 0	$a_2 = 100$
A_3	**9999** 0	**9999** 0	40 105	50 0	$a_3 = 105$
A_4	**9999** 0	**9999** 0	**9999** 0	40 112	$a_4 = 112$

$\mathbf{A_5 = A'_1}$	65 50	75 0	85 0	95 0	$d_1 = 50$
$\mathbf{A_6 = A'_2}$	**9999** 0	65 55	75 0	85 0	$d_2 = 55$
$\mathbf{A_7 = A'_3}$	**9999** 0	**9999** 0	65 60	75 0	$d_3 = 60$
$\mathbf{A_8 = A'_4}$	**9999** 0	**9999** 0	**9999** 0	65 63	$d_4 = 63$
Necesar b_j	$b_1 = 150$	$b_2 = 180$	$b_3 = 200$	$b_4 = 210$	$S_1 = 635$ $S_2 = 740$

Din tabelul nr. 4.43 care conţine soluţia optimă de fabricaţie, min f = 31100 u.m., rezultă că fabricaţia se va desfăşura astfel:

- se vor fabrica $S_1 = 635$ unităţi de produs, din care 407 unităţi de produs cu costul c = 40 u.m, iar 228 unităţi de produs cu costul unitar de fabricaţie mai mare, egal cu $c + \beta = 40 + 25 = 65$ u.m. ;

- în primul trimestru se vor fabrica $X_{11} = 90$ unităţi de produs cu costul unitar de fabricaţie c = 40 u.m, iar $X_{51} = 50$ unităţi de produs cu costul unitar de fabricaţie mai mare, egal cu $c + \beta = 40 + 25 = 65$ u.m.

- în al doilea trimestru se vor fabrica $X_{22} = 100$ unităţi de produs cu costul unitar de fabricaţie c = 40 u.m, iar $X_{62} = 55$ unităţi de produs cu costul unitar de fabricaţie mai mare, egal cu $c + \beta = 40 + 25 = 65$ u.m.

- în al treilea trimestru se vor fabrica $X_{33} = 105$ unităţi de produs cu costul unitar de fabricaţie c = 40 u.m, iar $X_{73} = 60$ unităţi de produs cu costul unitar de fabricaţie mai mare, egal cu $c + \beta = 40 + 25 = 65$ u.m.

- în al patrulea trimestru se vor fabrica $X_{44} = 112$ unităţi de produs cu costul unitar de fabricaţie c = 40 u.m, iar $X_{84} = 63$ unităţi de produs cu costul unitar de fabricaţie mai mare, egal cu $c + \beta = 40 + 25 = 65$ u.m.

Metode matematice de modelare a fluxurilor materiale – C6

4.13. PROBLEMA DE AFECTARE (REPARTIZARE, ASIGNARE) A RESURSELOR

A afecta înseamnă a aloca, a repartiza, a atribui, cu respectarea unor condiţii.

Într-o problemă de alocare de tip afectare (repartizare, asignare) sunt n resurse (tabelul nr. 4.48): R_1 , R_2 , ..., R_n , care trebuie repartizate la n activităţi: A_1 , A_2 , ..., A_n , astfel încât fiecare resursă să fie repartizată la câte o singură activitate şi fiecărei activităţi să i se repartizeze câte o singură resursă. O astfel de repartizare se poate face în mai multe moduri, dar alegerea trebuie sa se facă după un criteriu. Repartizarea resursei R_i pe activitatea A_j implică costul (profitul, beneficiul) $c_{ij} \geq 0$, i, j = 1, 2,...,n; $n \in N$. Valoarea c_{ij} poate avea semnificaţia concretă de cost, consum de timp, procentaj de rebuturi etc. şi în acest caz este vorba de o problemă de afectare de minim. Trebuie să se determine soluţia optimă (costul total al repartizării să fie minim).

Dacă c_{ij} are semnificaţia de profit (beneficiu) unitar, preţ, randament etc., atunci problema de afectare este de maxim.Trebuie să se determine soluţia optimă (profitul total al repartizării să fie maxim).
Problema de afectare se poate modela şi rezolva prin *programare liniară* şi prin *teoria grafurilor* (determinarea unui cuplaj maxim într-un graf bipartit).
Se va prezenta ***modelarea şi rezolvarea prin programare liniară***.

Legătura dintre resursa R_i şi activitatea A_j este data de variabila X_{ij} , i, j = 1, 2,...,n, ataşată acestora, care poate lua valorile zero sau unu.
Într-o problemă de repartizare cu n resurse şi n activităţi există n! = 1.2.3. ... n posibilităţi de a asocia cele n resurse cu cele n activităţi, dar numai una sau câteva satisfac un anumit criteriu de optim (minim sau maxim).

Tabelul nr. 4.48

A_j / R_i	A_1	A_2	…	A_n
R_1	c_{11}	c_{12}	..	c_{1n}
R_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…				
R_n	c_{n1}	c_{n2}	..	c_{nn}

Variabila X_{ij} se defineşte astfel:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \ daca \ \ resursa \ \ R_i \ \ este \ \ repartizata \ \ activitatii \ \ A_j \\ 0, \ daca \ \ resursa \ \ R \ \ nu \ \ este \ \ repartizata \ \ activitatii \ \ A_j \end{cases}$$

Tabelul nr.4.49

A_j / R_i	A_1	A_2	…	A_n
R_1	X_{11}	X_{12}	..	X_{1n}
R_2	X_{21}	X_{22}	…	X_{2n}
…				
R_n	X_{n1}	X_{n2}	..	X_{nn}

Problema de repartizare (4.47) poate avea semnificaţia concretă a repartizării a n muncitori cu calificări diferite pe n maşini sau n lucrări, astfel încât costul sau timpul total al prelucrării să fie minim sau rebuturile să fie minime, când se cunosc costurile unitare c_{ij} , i, j = 1, 2,...,n. Modelul matematic al **problemei de afectare** (repartizare, asignare) de **minim** este dat de relaţiile (4.47). În mod similar cu relaţiile (4.47) este cazul problemei de afectare (repartizare) de maxim, doar că se cere max f şi c_{ij} au semnificaţia de profit, preţ etc. Modelul matematic al **problemei de afectare** (repartizare, asignare) de **maxim** este dat de relaţiile (4.48).

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad , \text{i} = 1, 2, ..., \text{n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad , \text{j} = 1, 2, ..., \text{n}; \qquad \textbf{(4.47)}$$

$$X_{ij} \geq 0 \ , \text{i} = 1, 2, ..., \text{n}; \text{j} = 1, 2, ..., \text{n};$$

$$X_{ij} \in \{0 , 1\}, \text{i} = 1, 2, ..., \text{n}; \text{j} = 1, 2, ..., \text{n};$$

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.X_{ij}$$

min f

Problema de afectare (repartizare, asignare) de **maxim** este (4.48).

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad , i = 1, 2, ..., n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad , j = 1, 2, ..., n;$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad , i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n; \qquad \textbf{(4.48)}$$

$$X_{ij} \in \{0 , 1\} , i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n;$$

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.X_{ij}$$

max f

Problema din relaţiile (4.47) este o problemă de transport degenerată şi se poate rezolva cu algoritmul de transport, cu algoritmul ungar (Kuhn-Egervahry), algoritmul lui Little sau metode euristice, respectiv prin utilizarea programelor calculator Qsb - modulul assignment problem, Dsspom - modulul assignment method sau alte programe.

Exemplul nr. 4.10.

Într-o secţie a unei firme trebuie să se repartizeze şase muncitori M_1, M_2 , M_3 , M_4 , M_5 , M_6 pe şase maşini (lucrări) T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , T_5 , T_6 astfel încât costul total al repartizării să fie minim. Costurile unitare ale repartizării sunt date în tabelul nr. 4.50, iar în matricea costurilor C, c_{ij} reprezintă costul repartizării muncitorului M_i pe maşina T_j , (exprimat în unităţi monetare – u.m.) i, j = 1,2, …, 6. Să se determine soluţia optimă (costul total al repartizării să fie minim) şi soluţia cea mai defavorabilă (costul total al repartizării să fie maxim), precum şi intervalul de încadrare al costurilor.

Sunt posibile 6! = 1.2.3.4.5.6 = 720 repartizări.

Tabelul nr. 4.50

T_j / M_i	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
M_1	5	3	8	6	10	4
M_2	11	7	9	4	5	2
M_3	13	10	5	7	8	9
M_4	7	12	4	3	6	5
M_5	9	5	10	12	13	11
M_6	4	9	7	5	4	3

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 6 & 10 & 4 \\ 11 & 7 & 9 & 4 & 5 & 2 \\ 13 & 10 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 9 & 5 & 10 & 12 & 13 & 11 \\ 4 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Modelul matematic al problemei de afectare de minim în acest exemplu:

$$\sum_{j=1}^{6} X_{ij} = 1 \quad , i = 1, 2, ..., 6;$$

$$\sum_{i=1}^{6} X_{ij} = 1 \quad , j = 1, 2, ..., 6;$$

$X_{ij} \geq 0$, i = 1, 2, ..., 6; j = 1, 2, ..., 6;

$X_{ij} \in \{0 , 1\}$, i = 1, 2, ..., 6; j = 1, 2, ..., 6;

$$f = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} c_{ij}.X_{ij}$$

min f

Scris concret:

$f = 5.X_{11} + 3.X_{12} + 8.X_{13} + ... + 3.X_{66}$

Se rezolvă cu programul Qsb, modulul *assignment problem* pentru problema de minim, iar soluţia optimă este:

Min f = 24 u. m. = 5 + 2 + 5 + 3 + 5 + 4,

şi este dată de repartizarea din tabelul nr.4.51.

Deci, din tabelul nr.4.51, rezultă soluţia optimă:

- muncitorul M_1 pe maşina T_1 ;
- muncitorul M_2 pe maşina T_6 ;
- muncitorul M_3 pe maşina T_3 ;
- muncitorul M_4 pe maşina T_4 ;
- muncitorul M_5 pe maşina T_2 ;
- muncitorul M_6 pe maşina T_5 .

Tabelul nr.4. 51. Repartizarea optimă a muncitorilor pe maşini

T_j / M_i	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
M_1	1	0	0	0	0	0
M_2	0	0	0	0	0	1
M_3	0	0	1	0	0	0
M_4	0	0	0	1	0	0
M_5	0	1	0	0	0	0
M_6	0	0	0	0	1	0

Se va determina soluţia defavorabilă, nedorită, deci problemă de afectare de maxim. Modelul matematic al problemei de afectare de maxim în acest exemplu:

$$\sum_{j=1}^{6} X_{ij} = 1 \quad , i = 1, 2, ..., 6;$$

$$\sum_{i=1}^{6} X_{ij} = 1 \quad , j = 1, 2, ..., 6;$$

$X_{ij} \geq 0$, i = 1, 2, ..., 6; j = 1, 2, ..., 6;

$X_{ij} \in \{0 , 1\}$, i = 1, 2, ..., 6; j = 1, 2, ..., 6;

$$f = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} c_{ij}.X_{ij}$$

max f

Soluţia defavorabilă, care nu este dorită, se determină punând condiţia ca repatizarea muncitorilor pe maşini să se facă astfel încât să avem max f, rezolvând cu Qsb, modulul *assignment problem* pentru problemă de maxim, se obţine:
Max f = 61 u. m. = 10 + 11 + 9 + 12 + 12 + 7 , dată de repartizarea din tabelul nr.4.52.

Tabelul nr. 4.52. Repartizarea defavorabilă a muncitorilor pe maşini

T_j / M_i	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
M_1	0	0	0	0	1	0
M_2	1	0	0	0	0	0
M_3	0	0	0	0	0	1
M_4	0	1	0	0	0	0
M_5	0	0	0	1	0	0
M_6	0	0	1	0	0	0

Deci, din tabelul nr.4.52, rezultă repartizarea cea mai defavorabilă, nedorită:
- muncitorul M_1 pe maşina T_5 ;
- muncitorul M_2 pe maşina T_1 ;
- muncitorul M_3 pe maşina T_6 ;
- muncitorul M_4 pe maşina T_2 ;
- muncitorul M_5 pe maşina T_4 ;
- muncitorul M_6 pe maşina T_3 .

Intervalul de încadrare a costului repartizării muncitorilor pe maşini este: $f \in [24, 61]$.
Evident, este dorită soluţia optimă, deci cea pentru care min f = 24 u.m.

Observaţie.

1. Problema de afectare are sens şi dacă sunt m resurse şi n activităţi, $m \neq n$, m, $n \in N$. Problema se echilibrează prin introducerea a n – m resurse fictive pentru cazul m < n (se completează matricea C cu n – m linii nule), respectiv a m – n activităţi fictive pentru cazul m > n (se completează matricea C cu m – n coloane nule), iar costul (profitul) unitar este zero în ambele cazuri. Pe calculator programul Qsb o echilibrează şi apoi o rezolvă.
Se va exemplifica prin modificarea exemplului nr.4.10. (cinci muncitori pe şase maşini sau şase muncitori pe cinci maşini).
Modelul matematic este (4.49).

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq 1 \quad , i = 1, 2, ..., m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \leq 1 \quad , j = 1, 2, ..., n; \qquad \textbf{(4.49)}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \min\{m, n\}$$

$X_{ij} \geq 0$, i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n;
$X_{ij} \in \{0 , 1\}$, i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n;

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.X_{ij}$$

min f

Problema din relaţiile (4.49), se poate rezolva cu algoritmul ungar (Kuhn-Egervahry), respectiv prin utilizarea programelor calculator Qsb - modulul assignment problem, Dsspom - modulul assignment method sau alte programe.

2. Se poate ca unele repartizări să nu fie posibile, sunt ***interzise***. Dacă repartizarea resursei R_i pe activitatea A_j nu este posibilă, se atribuie variabilei X_{ij} valoarea ∞, iar unde este

posibil se poate lua X_{ij} = 1. Se va determina repartizarea care realizează min f. Dacă la rezolvarea cu programul Qsb sau altfel apare o repartizare a unei resurse la o activitate cu valoarea ∞ (practic o valoare foarte mare), acea repartizare a resursei nu se acceptă, fiind acceptate doar repartizările cu valori finite. Pot rămâne resurse care nu sunt repartizate şi activităţi fără resurse. Pentru problema de afectare de maxim, dacă repartizarea resursei R_i pe activitatea A_j nu este posibilă, se atribuie variabilei X_{ij} valoarea $-\infty$.

Exemplul nr. 4.11.

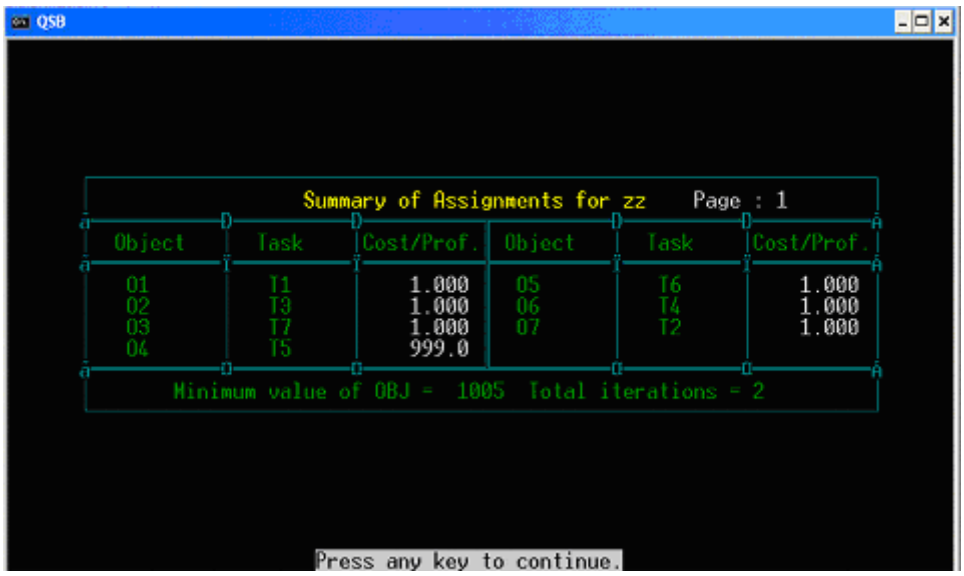
Într-o secţie a unei întreprinderi se cumpără şapte maşini noi, notate Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 , Y_5 ,Y_6, Y_7 pe care trebuie să lucreze şapte muncitori care trebuie selectaţi dintre muncitorii firmei, dacă se poate. În tabelul nr.4.53 se prezintă posibilităţile de repartizare a muncitorilor X_i pe maşinile Y_j , funcţie de calificarea lor, dacă este posibilă repartizarea se pune 1 în căsuţa (i,j), i, j = 1, 2, ...7, iar unde nu este posibil se notează cu ∞. Să se realizeze repartizarea muncitorilor firmei pe maşini, iar unde nu este posibil firma va trebui să angajeze.

Pe calculator se înlocuieşte ∞ cu o valoare mai mare decât datele problemei, de exemplu 999. Dacă la rezolvarea cu programul Qsb apare o repartizare cu valoarea ∞, acea repartizare nu se acceptă, fiind acceptate doar repartizările cu valori finite. Soluţia optimă se obţine cu programul Qsb.

Tabelul nr.4. 53

Y_j / X_i	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
X_1	1	∞	∞	1	∞	∞	∞
X_2	∞	1	1	∞	∞	∞	1
X_3	∞	1	∞	∞	1	∞	1
X_4	1	∞	∞	1	∞	1	∞
X_5	1	∞	∞	∞	∞	1	∞
X_6	∞	∞	∞	1	∞	1	∞
X_7	∞	1	∞	∞	1	∞	∞

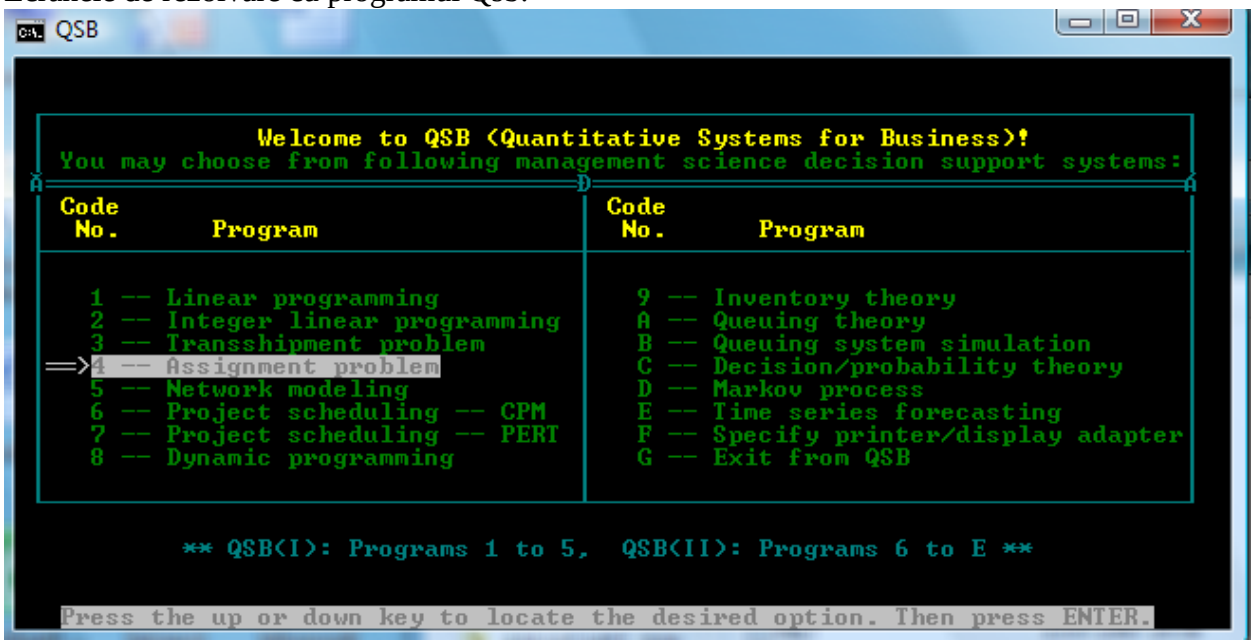
Soluţia optimă:

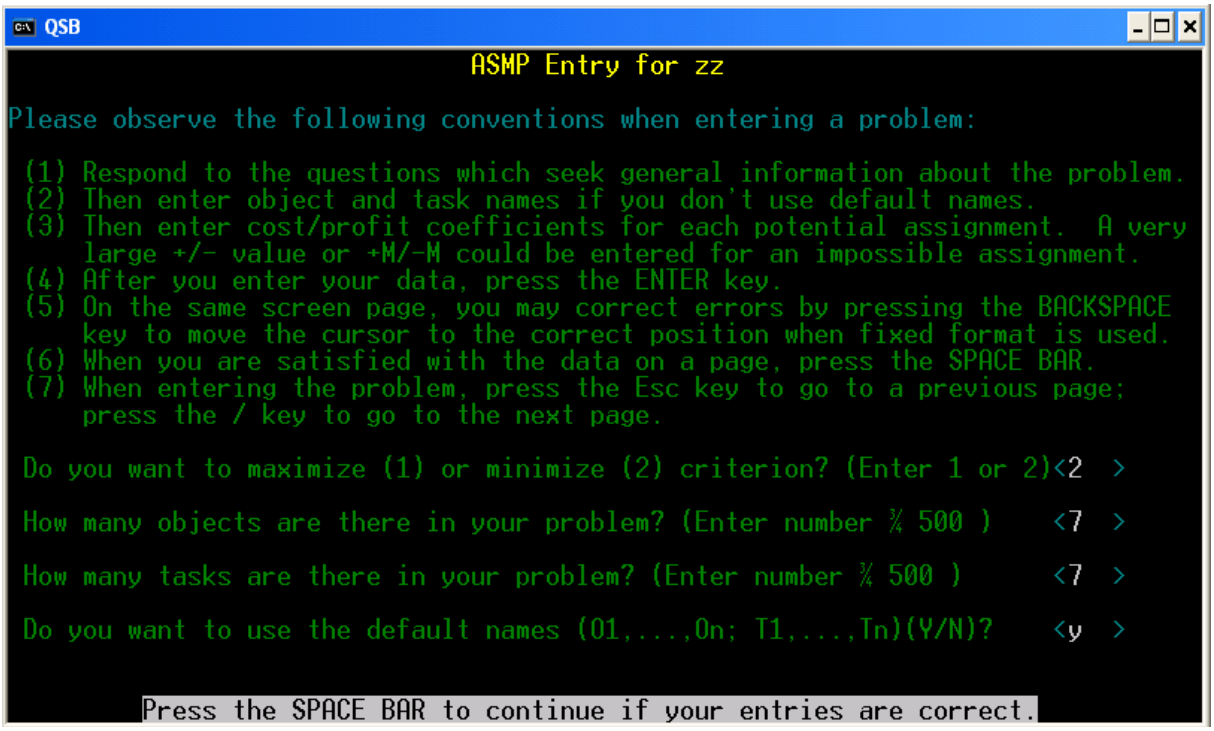


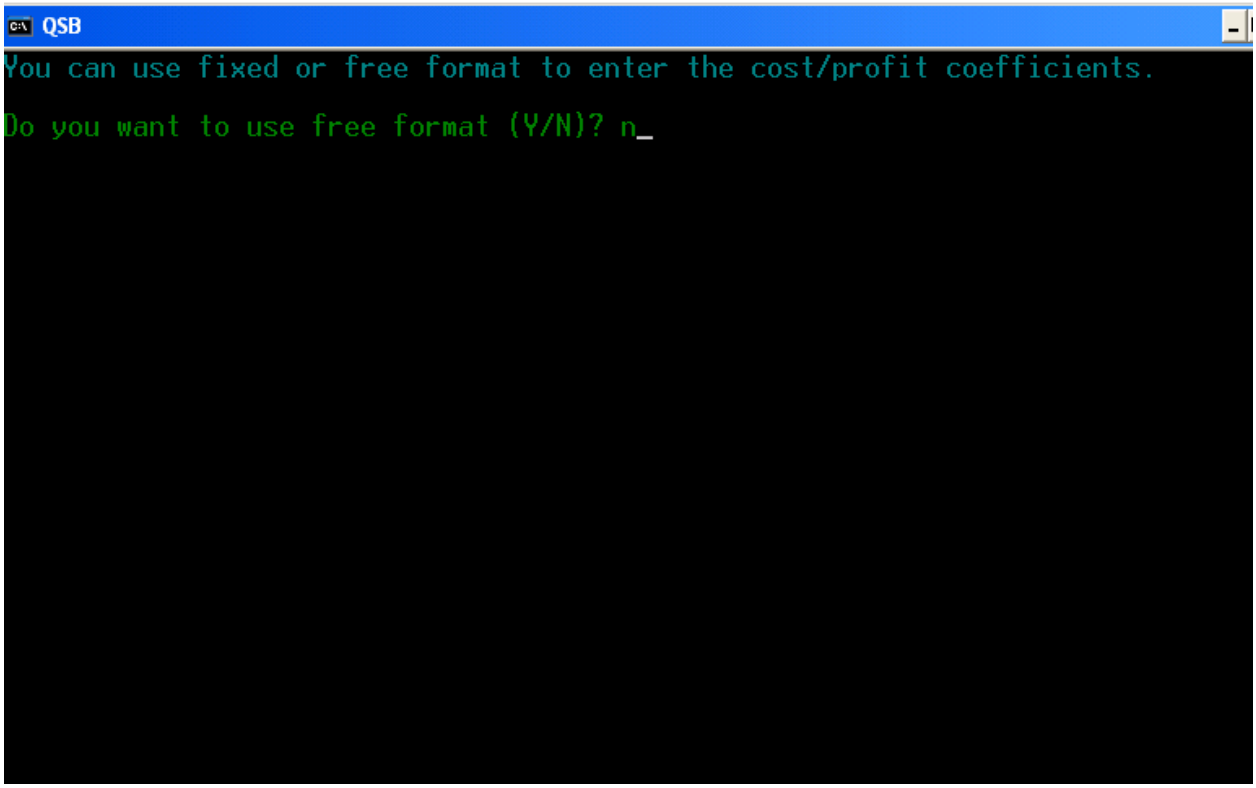
Deci, repartizarea va fi:

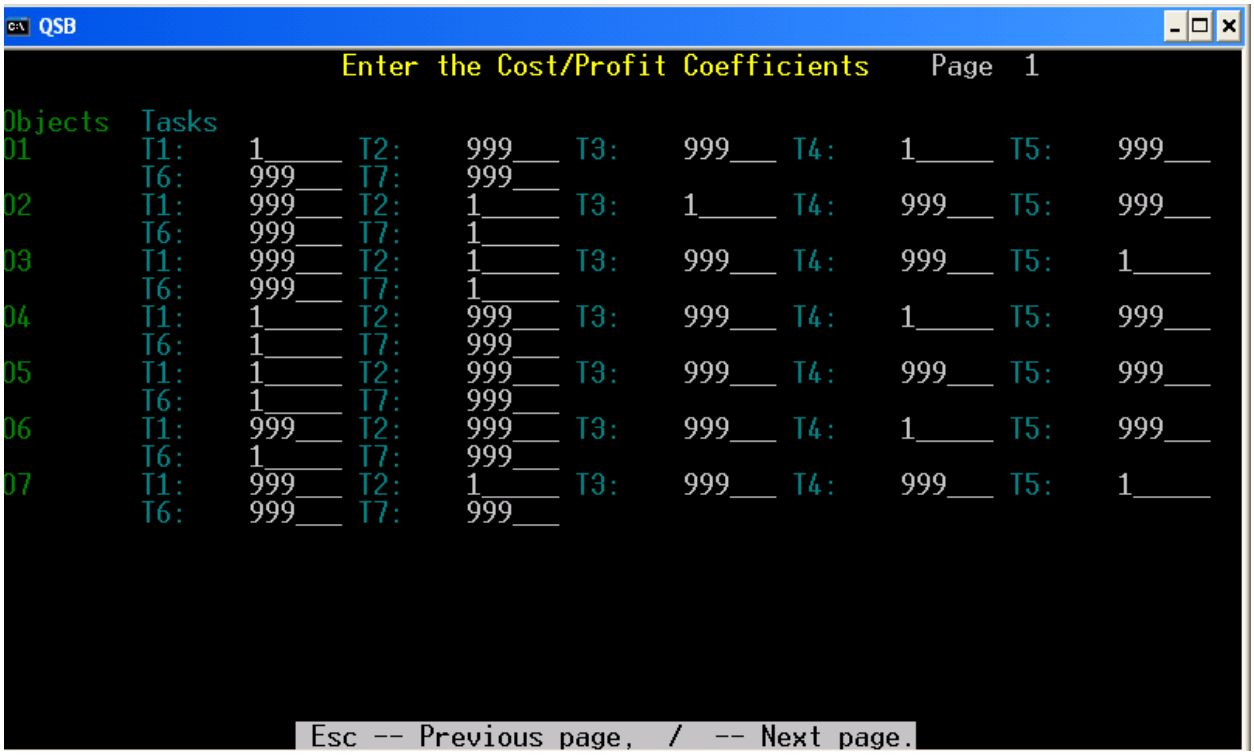
- muncitorul 1 se repartizează pe maşina 1;
- muncitorul 2 se repartizează pe maşina 3;
- muncitorul 3 se repartizează pe maşina 7;
- muncitorul 5 se repartizează pe maşina 6;
- muncitorul 6 se repartizează pe maşina 4;
- muncitorul 7 se repartizează pe maşina 2;
- muncitorul 4 nu se poate repartiza pe maşina 5 şi îşi va păstra vechiul loc de muncă din firma respectivă, iar firma va trebui să angajeze un muncitor.

Ecranele de rezolvare cu programul Qsb:




QSB
ASMP Entry for zz
Please observe the following conventions when entering a problem:
(1) Respond to the questions which seek general information about the problem.
(2) Then enter object and task names if you don't use default names.
(3) Then enter cost/profit coefficients for each potential assignment. A very large +/- value or +M/-M could be entered for an impossible assignment.
(4) After you enter your data, press the ENTER key.
(5) On the same screen page, you may correct errors by pressing the BACKSPACE key to move the cursor to the correct position when fixed format is used.
(6) When you are satisfied with the data on a page, press the SPACE BAR.
(7) When entering the problem, press the Esc key to go to a previous page; press the / key to go to the next page.
Do you want to maximize (1) or minimize (2) criterion? (Enter 1 or 2)<2 >
How many objects are there in your problem? (Enter number ≤ 500) <7 >
How many tasks are there in your problem? (Enter number ≤ 500) <7 >
Do you want to use the default names (O1,...,On; T1,...,Tn)(Y/N)? <y >
Press the SPACE BAR to continue if your entries are correct.


QSB
You can use fixed or free format to enter the cost/profit coefficients.
Do you want to use free format (Y/N)? n_



3.MODELAREA FLUXURILOR MATERIALE PRIN PROGRAMARE MATEMATICĂ

3.1. Programare liniară

Problema optimizării fluxurilor materiale şi informaţionale se pune la nivel de: intrări în sistemul de producţie, ieşiri din sistem, procese şi programe de producţie, managementul firmei. Problema modelării fluxurilor materiale va fi abordată prin programare matematică, monocriterial şi multicriterial, prin modele deterministe, stochastice şi fuzzy.

Fluxurile materiale pot fi studiate, analizate şi optimizate prin programare matematică cu o funcţie obiectiv , de exemplu prin problema de programare liniară din relaţiile (3.1) – (3.3) sau prin programare matematică cu mai multe funcţii obiectiv, deci multicriterial. Modelul matematic din relaţiile (3.1) – (3.3) este o problemă de programare liniară de maximizare şi se poate utiliza în optimizarea proceselor şi programelor de producţie.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \le b_i \quad \textbf{, i = 1, 2, . . . , m;} \qquad \textbf{(3.1)}$$

$$\mathbf{X_j \ge 0 \ , \ j = 1, 2, ... , n ;} \qquad \textbf{(3.2)}$$

$$\mathbf{f(X_1, X_2, \ldots, X_n)} = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \qquad \textbf{(3.3)}$$

$$\mathbf{max\ f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$$

sau în scriere matricială echivalentă, relaţiile (3.4).

$$\begin{aligned} &\mathbf{A \,.\, X \le b} \\ &\mathbf{X \ge 0} \\ &\mathbf{f(X) = c \,.\, X} \\ &\mathbf{max\ f(X)} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.4)}$$

unde: A = (a_{ij}) , i = 1, 2, . . . , m ; j = 1, 2, . . . , n;

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \; c = (c_1 \;, \; c_2 \;, \; \ldots \; c_n)$$

Relaţiile (3.1) reprezintă restricţiile problemei de programare liniară, relaţiile (3.2) sunt condiţiile de nenegativitate ale variabilelor, iar funcţia f din relaţia (3.3) este funcţia obiectiv, numită şi funcţie scop sau funcţie de eficienţă.

Fluxurile materiale pot fi optimizate şi printr-o problemă de programare liniară de minimizare în care funcţia obiectiv f reprezintă costuri care se minimizează, relaţiile (3.5).

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . X_j \geq b_i \quad \textbf{, i = 1, 2, . . . , m;}$$

$$\mathbf{X_j \geq 0 \;\; , \;\; j = 1, 2, ... , n \; ;} \qquad \textbf{(3.5)}$$

$$\mathbf{f(X_1, X_2, \ldots, X_n)} = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$$

$$\mathbf{\min f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$$

sau în scriere matricială în relaţiile (3.6).

$$\mathbf{A \, . \, X \geq b}$$

$$\mathbf{X \geq 0} \qquad \textbf{(3.6)}$$

$$\mathbf{f(X) = c \, . \, X}$$

$$\mathbf{\min f(X)}$$

unde: $A = (a_{ij})$, i = 1, 2, . . . , m ; j = 1, 2, . . . , n;

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \; c = (c_1 \;, \; c_2 \;, \; \ldots \; c_n)$$

3.2. FOLOSIREA EFICIENTĂ A RESURSELOR MATERIALE. ALOCAREA RESURSELOR. PROBLEMA MAXIMIZĂRII PROFITULUI ÎN ALOCAREA RESURSELOR MATERIALE

Resursele reprezintă totalitatea mijloacelor care participă la realizarea unei acţiuni complexe şi care, pentru a asigura eficienţa acţiunii (programului), trebuie să fie corect dimensionate, să se dispună de ele la timpul oportun şi să fie utilizate cât mai raţional.

Alocarea este o prevedere, cu o anumită destinaţie, pentru un anumit scop, a unor resurse umane, materiale sau băneşti. Conducerea problemelor economice ale unei firme pe un anumit orizont de timp presupune asigurarea resurselor necesare atingerii obiectivelor. Dacă sunt asigurate aceste resurse, trebuie rezolvată problema alocării lor pe obiectivele firmei. Alocarea resurselor se poate face pe baza experienţei, a intuiţiei sau utilizând metode de optimizare.

Problemele de alocare a resurselor stabilesc modul cum trebuie repartizate resursele disponibile între activităţile ce urmează să fie executate, pentru ca activităţile să poată fi realizate cât mai bine, în sensul unei anumite funcţii obiectiv.

Obiectivul acestor probleme îl constitue alocarea resurselor în aşa fel, încât să se optimizeze o funcţie obiectiv, de exemplu să se minimizeze cheltuielile totale sau să se maximizeze profitul total sau venitul din vânzări.

ENUNŢUL PROBLEMEI MAXIMIZĂRII PROFITULUI

În fabricarea a n produse se utilizează m resurse ale firmei care sunt limitate şi trebuie folosite eficient, alocate optim în sensul unei anumite funcţii obiectiv.

Într-un sistem de producţie (atelier, secţie, întreprindere) pentru a fabrica produsele P_1, P_2,..., P_n se folosesc resursele R_1, R_2, ..., R_m ce sunt disponibile în cantităţi limitate b_1, b_2,..., b_m. Resursa R_i intră în produsul P_j în cantitatea a_{ij} , i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,..., n, iar profitul unitar (real sau estimat) pentru produsul P_j este c_j , j = 1, 2, ..., n. Se presupune că sunt satisfăcute condiţiile: $a_{ij} \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_j \geq 0$, i = 1, 2,..., m; j = 1, 2,..., n.
Aceste elemente sunt sintetizate în tabelul nr.3.1.

Tabelul nr. 3.1.

P_j / **R_i**	**P_1**	**P_2**	**. . .**	**P_n**	**Resurse Disponibile b_i**
R_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}	b_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
R_m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}	b_m
Profitul unitar c_j	c_1	c_2	. . .	c_n	

Se cere determinarea planului de fabricaţie optim, deci trebuie aflat câte produse P_1, P_2, . . ., P_n se vor fabrica în perioada de timp considerată (zi, săptămână, lună etc.) şi în condiţiile date astfel încât profitul să fie maxim.

Pentru rezolvarea problemei se notează cu X_j cantitatea din produsul P_j ce se va fabrica, j = 1, 2, . . ., n.
Se obţine modelul matematic din relaţiile (3.7), care este o problemă de programare liniară.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j \leq b_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$X_j \geq 0 \text{ , } j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (3.7)$$

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot X_j$$

$$\max f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Scrierea matriceală echivalentă a modelului (3.7) este modelul matematic din relaţiile (3.8).

$$A \cdot X \leq b$$

$$X \geq 0 \qquad (3.8)$$

$$f(X) = c \cdot X$$

$$\max f(X)$$

unde notaţiile sunt:

$$A = (a_{ij}) \text{ ; } i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots n;$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \qquad c = (c_1, c_2, \dots, c_n); \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Observaţii

1. Dacă c_j reprezintă preţul unitar de vânzare a produsului P_j , j = 1, 2, . . ., n, atunci se va maximiza venitul din vânzări în alocarea resurselor materiale, iar modelul matematic este tot (3.7), ca şi la maximizarea profitului.
2. Dacă din studii de marketing se cunosc pentru fiecare produs P_j cererea minimă egală cu α_j şi cererea maximă egală cu β_j , la modelul matematic al problemei de programare liniară din relaţiile (3.7) se adaugă restricţiile (3.9), rezultând modelul din relaţiile (3.10).

$\alpha_j \le \mathbf{X_j} \le \beta_j$ **, j = 1, 2, . . . n;** **(3.9)**

unde: $\alpha_j \ge 0$, $\beta_j \ge 0$, j = 1, 2, . . . n;

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_{ij} \cdot X_j} \le \mathbf{b_i}\text{ , i = 1, 2, . . ., m;}$$

$\alpha_j \le \mathbf{X_j} \le \beta_j$ **, j = 1, 2, . . . n;**

$\mathbf{X_j \ge 0}$ **, j = 1, 2, . . ., n;** **(3.10)**

$$\mathbf{f(X_1, X_2, \dots, X_n)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_j \cdot X_j}$$

$$\mathbf{max\ f(X_1, X_2, \dots, X_n)}$$

Problemele de programare liniară din relaţiile (3.7) şi (3.10) se rezolvă cu algoritmul simplex primal sau simplex dual, respectiv cu calculatorul utilizând programele Qsb, Dsspom, Lindo, QM sau altele, obţinându-se soluţia optimă ce maximizează profitul (sau venitul din vânzări).

3. Există ***probleme de programare liniară cu soluţii impuse.***

Există probleme practice care se rezolvă prin programare liniară în care anumite componente ale soluției (sau o componentă) trebuie să ia anumite valori. Să presupunem că $X_j = d_j$ pentru un indice j fixat. În acest caz problema de programare liniară se reduce ca și dimensiune de la n variabile la n – 1. Pentru rezolvarea problemei se va renunța la variabila X_j în matricea A, deci coloana j dispare (sau se face zero), în funcția obiectiv f dispare c_j (sau se face zero) și termenii liberi b_i , i = 1, 2, …, m, se vor corecta cu valorile coloanei j .

$\mathbf{b'_i = b_i - a_{ij} \cdot X_j = b_i - a_{ij} \cdot d_j}$, i = 1, 2, …, m;

Se rezolvă cu algoritmul simplex primal sau simplex dual sau cu un program pe calculator. Soluțiile optime ale problemelor cu *soluții impuse* nu mai sunt întotdeauna soluții de bază pentru că pot avea mai multe componente pozitive decît dimensiunea bazei.

4. Se va prezenta **o generalizare** a modelului matematic dat de relaţiile (3.7), considerând că toate consumurile a_{ij} şi disponibilul de resurse care trebuie alocate aparţin unor intervale ale numerelor reale, relaţiile (3.11).

$\mathbf{a_{ij} \in [\alpha_{ij}, \beta_{ij}]}$

$$b_i \in [\gamma_i , \delta_i] , \quad \alpha_{ij} \geq 0, \beta_i \geq 0, \gamma_i \geq 0, \delta_i \geq 0, \qquad (3.11)$$

$$i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Modelul matematic va fi dat de relaţiile (3.12), care este echivalent şi se rezolvă cu modelul din relaţiile (3.13).

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \cdot [\alpha_{ij} , \beta_{ij}] \subseteq [\gamma_i , \delta_i], \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$X_j \geq 0 , \quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (3.12)$$

$$f(X_1, X_2, \ldots , X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot X_j$$

$$\sup f(X_1, X_2, \ldots , X_n)$$

Modelul matematic din relaţiile (3.13) este o problemă de programare liniară ce se rezolvă cu algoritmul simplex primal sau dual sau pe calculator cu programe: Qsb, Dsspom, Lindo etc.

Nu pentru orice valori sau intervale vor exista soluţii.

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \cdot X_j \leq \delta_i , \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot X_j \geq \gamma_i , \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$X_j \geq 0 , \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (3.13)$$

$$f(X_1, X_2, \ldots , X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot X_j$$

$$\max f(X_1, X_2, \ldots , X_n)$$

Exemplul nr. 3.1.

Se consideră o problemă de alocare a resurselor materiale cu maximizarea profitului.
Din m = 3 resurse se fabrică n = 3 produse, date în tabelul nr.3.2 . Trebuie determinat:

a) ce cantitate se va fabrica din fiecare produs, astfel încât profitul obţinut să fie maxim.
b) dacă din studii de marketing rezultă că produsul P_2 are cererea minimă de 5 unităţi, ce cantitate se va fabrica din fiecare produs, astfel încât profitul obţinut să fie maxim.
c) Să se facă alegerea între varianta de la punctul a) şi varianta de la b) care este mai bună.
d) Ce cantitate se va fabrica din fiecare produs dacă din produsul P_2 trebuie fabricate 5 unităţi, astfel încât profitul obţinut să fie maxim.

Tabelul nr.3.2.

P_j / R_i	P_1	P_2	P_3	Resurse disponibile b_i
R_1	1	2	3	120
R_2	2	2	1	80
R_3	1	2	1	70
Profitul unitar c_j	60	80	100	

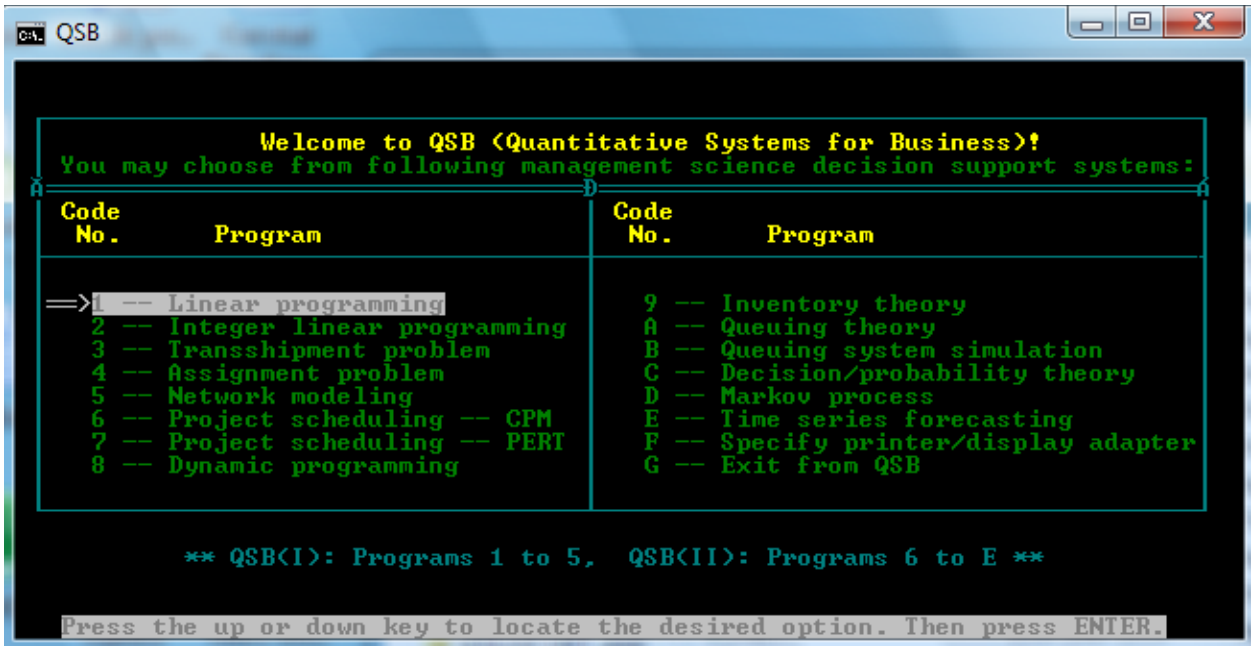
a) Se notează cu X_j cantitatea din produsul P_j ce se va fabrica, j = 1, 2, 3 . Modelul matematic reprezintă problema de programare liniară (3.14).

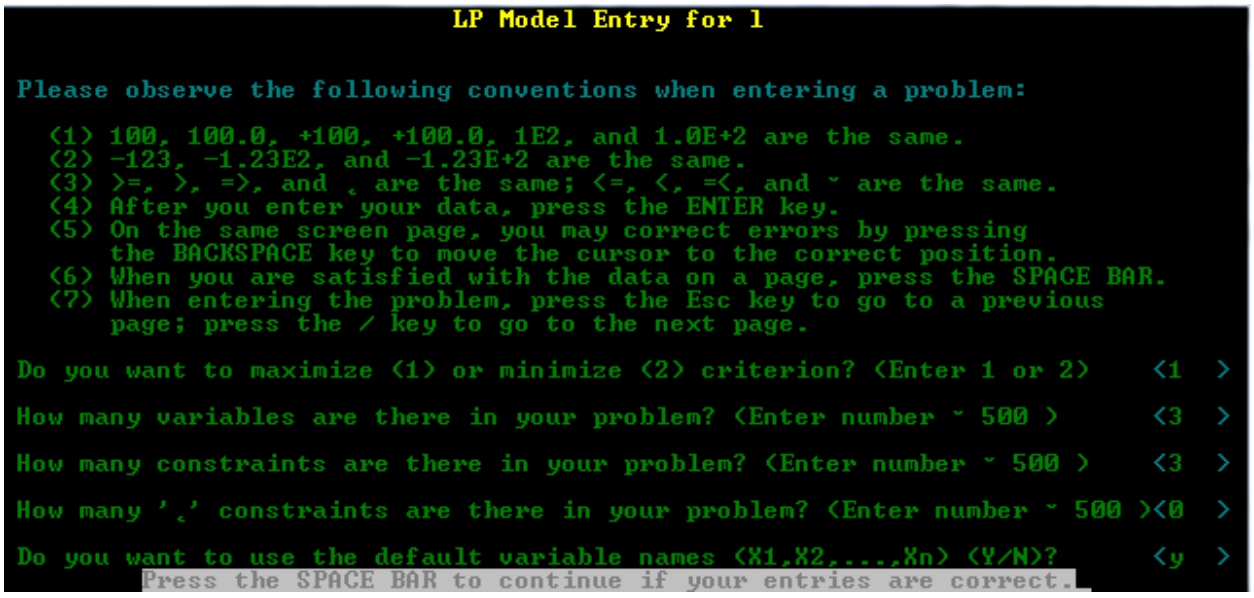
$$X_1 + 2 . X_2 + 3 . X_3 \leq 120$$
$$2 . X_1 + 2 . X_2 + X_3 \leq 80 \qquad (3.14)$$
$$X_1 + 2 . X_2 + X_3 \leq 70$$
$$X_j \geq 0 , \; j = 1, 2, 3;$$
$$f(X_1 , X_2 , X_3) = 60 . X_1 + 80 . X_2 + 100 . X_3$$
$$\max f(X_1 , X_2 , X_3)$$

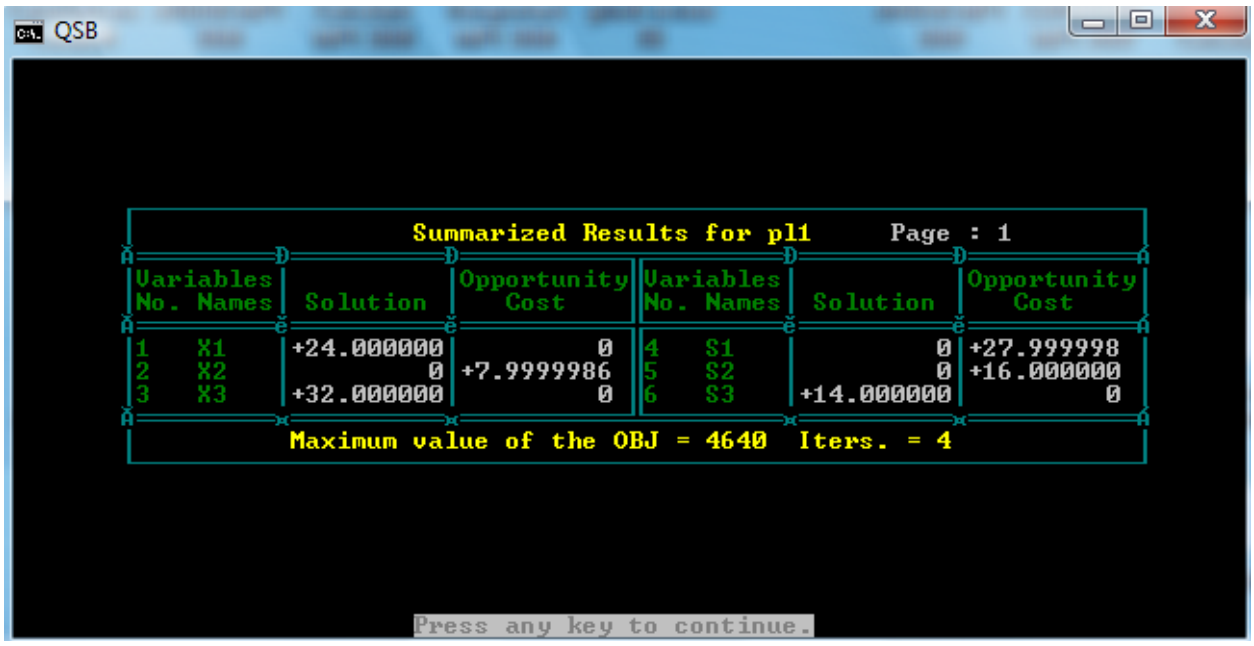
Se rezolvă problema de programare liniară cu programul QSB, modulul *linear programming*, şi se obţine soluţia optimă:

$X_1 = 24 , \; X_2 = 0 , \; X_3 = 32 , \max f = 4640 \qquad (3.15)$

Ecrane Qsb de rezolvare:







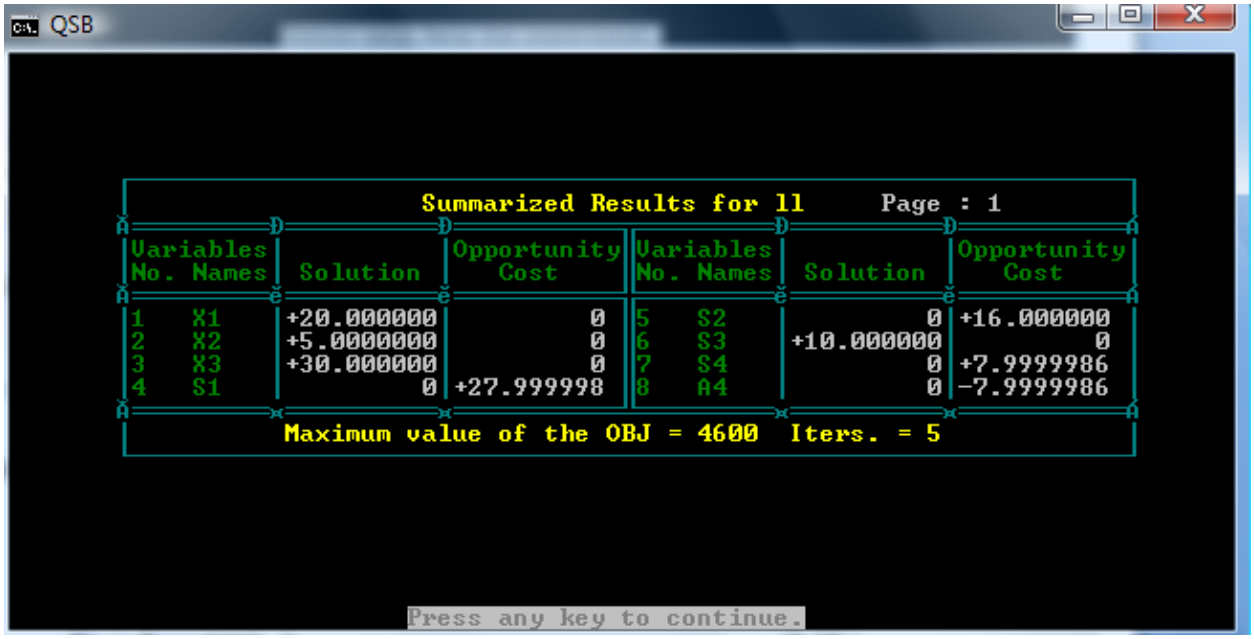
b) Dacă din studii de marketing rezultă că produsul P_2 are cererea minimă de 5 unităţi, atunci la problema de programare liniară (3.14) se adaugă restricţia:

$$X_2 \geq 5,$$

Se va rezolva cu programul Qsb, rezultă soluţia optimă:

$X_1 = 20$, $X_2 = 5$, $X_3 = 30$, max f = 4600.

Se pot lua diverse valori ale cererii minime sau maxime ale produselor, rezultând probleme de programare liniară cu mai multe restricţii decât problema (3.14).



Se pot lua diverse valori ale cererii minime sau maxime ale produselor, rezultând probleme de programare liniară cu mai multe restricţii decât problema (3.14).

c) La punctul a) se câştigă mai mult decât la b), dar la varianta b) nu se pierde un client al produsului P_2 care s-ar duce altfel la concurenţă.

d) Este problemă de programare liniară cu soluții impuse. În acest caz problema de programare liniară se reduce ca și dimensiune de la 3 variabile la 2 = 3 – 1. Pentru rezolvarea problemei se va renunța la variabila X_2 în matricea A, deci coloana 2 dispare (sau se face zero), în funcția obiectiv f dispare c_2 (sau se face zero) și termenii liberi b_i , i = 1, 2, 3, se vor corecta cu valorile coloanei j = 2 .

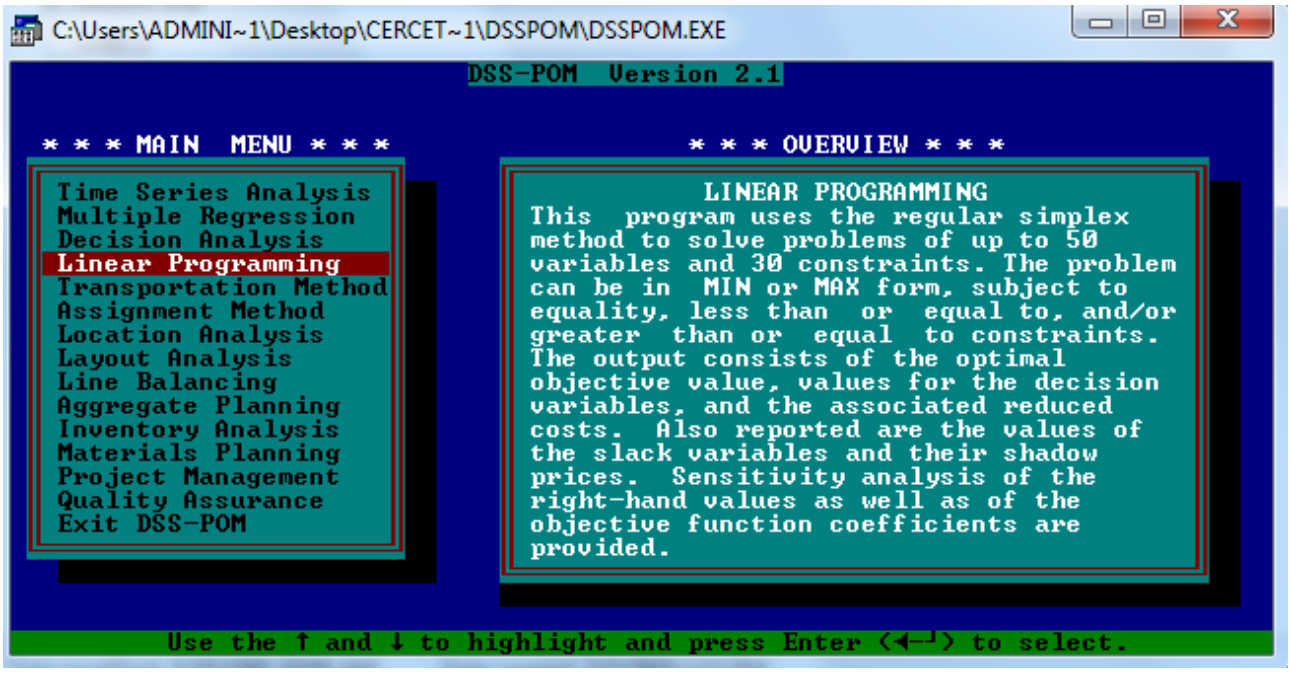
$$\mathbf{b'_i = b_i - a_{i2} \cdot X_2 = b_i - a_{i2} \cdot 5} \text{ , } i = 1, 2, 3;$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{X_1 + 3 \cdot X_3 \le 120 - 2 \cdot 5 = 110} \\ &\mathbf{2 \cdot X_1 + X_3 \le 80 - 2 \cdot 5 = 70} \\ &\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70 - 2 \cdot 5 = 60} \\ &\mathbf{X_j \ge 0} \text{ , } j = 1, 2, 3; \\ &\mathbf{f_d(X_1, X_3) = 60 \cdot X_1 + 100 \cdot X_3} \\ &\mathbf{\max f_d(X_1, X_3)} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.14d)}$$

Se rezolvă problema de programare liniară **(3.14d)** cu programul QSB, modulul *linear programming*, şi se obţine soluţia optimă pentru punctul d):

$X_1 = 20$, $X_3 = 30$, max $f_d = 4200$.
Soluţia optimă:
max f(X_1 , X_2 , X_3) = max f(X_1 , 5, X_3) = max f_d + 80 . 5 = 4200 + 400 = 4600

Se poate utiliza şi programul **DSSPOM** pentru a rezolva problema de programare liniară.



Exemplul nr. 3.1a.

Se consideră o problemă de alocare a resurselor materiale cu maximizarea profitului. Din m = 3 resurse se fabrică n = 3 produse, date în tabelul nr.3.2a, iar consumul de resurse şi disponibilul de resurse sunt într-un interval închis. Trebuie determinată ce cantitate se va fabrica din fiecare produs, astfel încât profitul obţinut să fie maxim.

Tabelul nr.3.2 a

P_j / R_i	P_1	P_2	P_3	Resurse disponibile b_i
R_1	[0.9; 1.1]	[1.8; 2.2]	[2.7; 3.3]	[108; 132]
R_2	[1.8; 2.2]	[1.8; 2.2]	[0.9; 1.1]	[72; 88]
R_3	[0.9; 1.1]	[1.8; 2.2]	[0.9; 1.1]	[63; 77]
Profitul unitar c_j	60	80	100	

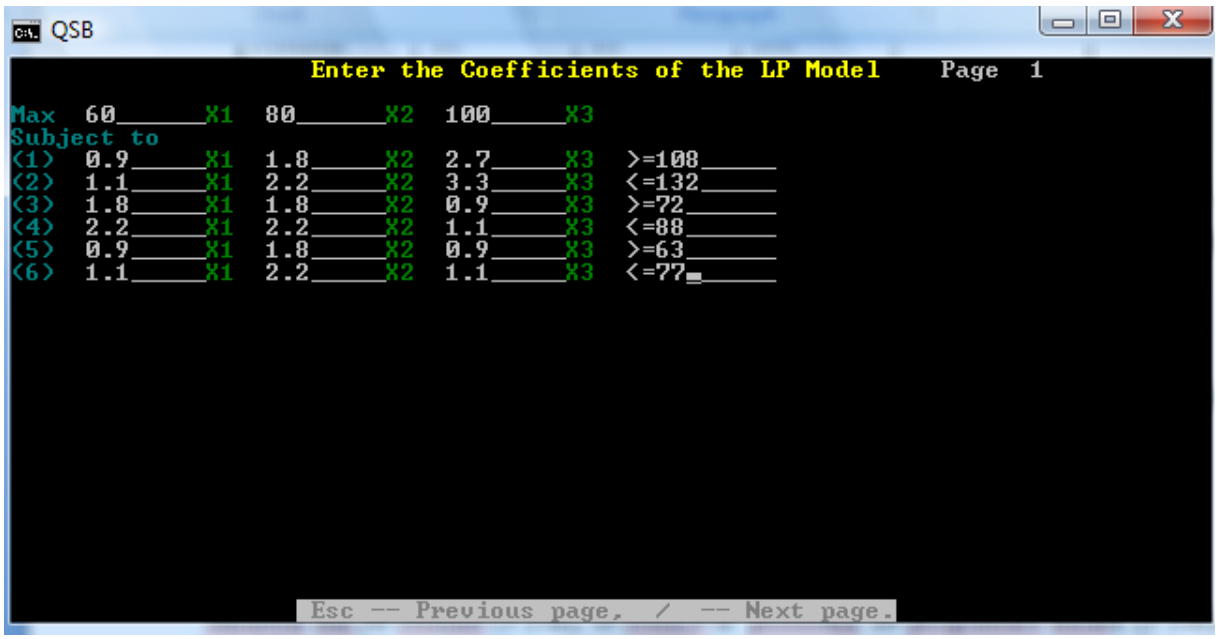
Se notează cu X_j cantitatea din produsul P_j ce se va fabrica, j = 1, 2, 3 . Modelul matematic este o problemă de programare liniară cu coeficienţi mulţimi convexe (intervale închise), este dat de relaţiile (3.14a).

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X_1.}\ [0.9;\ 1.1] + \mathbf{X_2.}\ [1.8;\ 2.2] + \mathbf{X_3.}[2.7;\ 3.3] \subseteq [108;\ 132] \\
&\mathbf{X_1.}[1.8;\ 2.2] + \mathbf{X_2.}[1.8;\ 2.2] + \mathbf{X_3.}\ [0.9;\ 1.1] \subseteq [72;\ 88] \qquad \textbf{(3.14a)} \\
&\mathbf{X_1.}\ [0.9;\ 1.1] + \mathbf{X_2.}\ [1.8;\ 2.2] + \mathbf{X_3.}\ [0.9;\ 1.1] \subseteq [63;\ 77] \\
&\mathbf{X_j} \geq \mathbf{0}\ ,\ j = 1,\ 2,\ 3; \\
&\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3} \\
&\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}
\end{aligned}$$

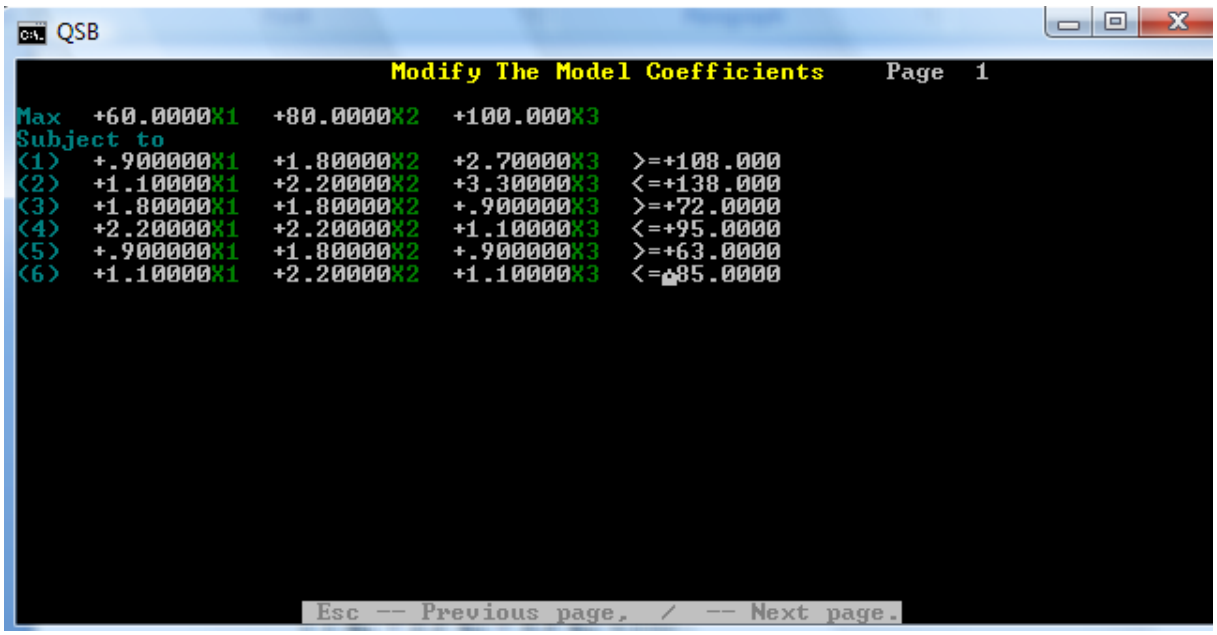
Modelul dat de relaţiile (3.14a), se rezolvă cu problema de programare liniară (3.14b).

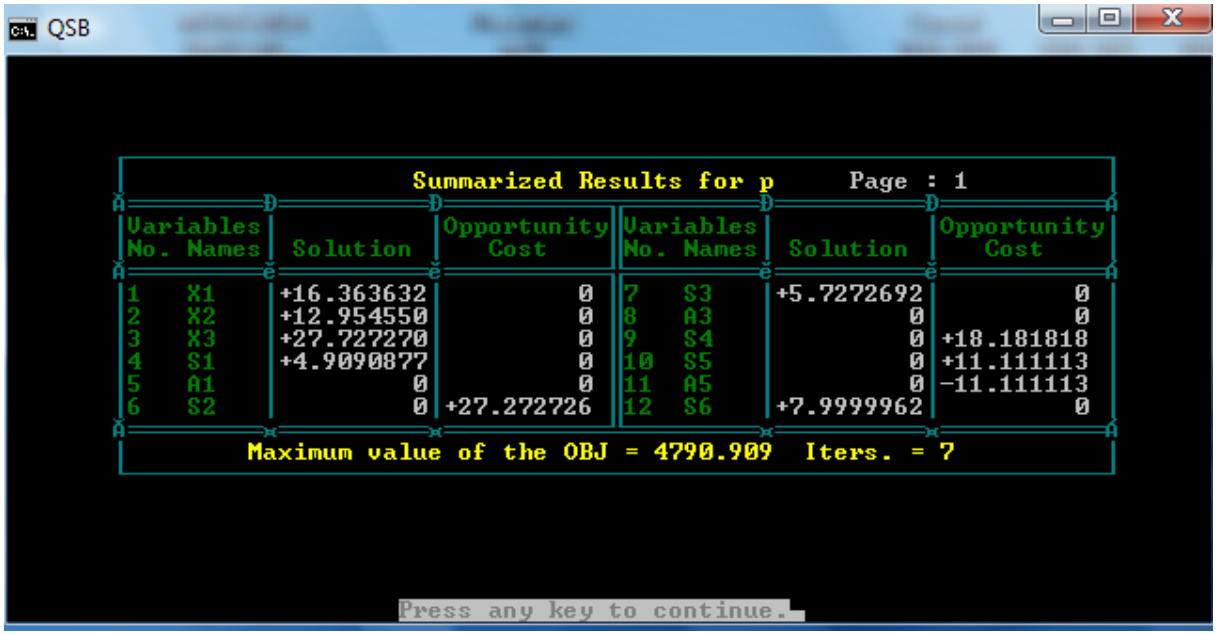
$$\begin{aligned}
&0.9\ \mathbf{X_1 + 1.8\ X_2 + 2.7\ X_3} \geq 108 \\
&1.1\ \mathbf{X_1 + 2.2\ X_2 + 3.3\ X_3} \leq 132 \\
&\mathbf{1.8\ X_1 + 1.8\ X_2 + 0.9\ X_3 \geq 72} \\
&\mathbf{2.2\ X_1 + 2.2\ X_2 + 1.1\ X_3 \leq 88} \qquad \textbf{(3.14b)} \\
&0.9\ \mathbf{X_1 + 1.8\ X_2 + 0.9\ X_3} \geq \mathbf{63} \\
&1.1\ \mathbf{X_1 + 2.2\ X_2 + 1.1\ X_3} \leq \mathbf{77} \\
&\mathbf{X_j} \geq \mathbf{0}\ ,\ j = 1,\ 2,\ 3; \\
&\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3} \\
&\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}
\end{aligned}$$

Se va rezolva cu programul Qsb, modulul *linear programming* .



S-a luat consumul şi disponibilul de resurse cu +10% şi -10% mai mare, respectiv mai mic decât cel din tabelul nr.3.2, dar nu va avea soluţii.
Nu are soluţii, dar se vor modifica o parte din termenii liberi şi va avea soluţie optimă.
Se modifică limita superioară din disponibilul de resurse.





1. Dacă din ***studii de marketing*** se poate *estima intervalul de încadrare a profitului unitar*

$$\mathbf{c_j} \in \mathbf{[\, d_j\, ,\, e_j\,]},\quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \mathbf{(3.16)}$$

atunci problema dată de relaţiile (3.12) se poate generaliza din nou, considerând relaţia (3.17).

$$\mathbf{f(X_1, X_2, \ldots, X_n)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_j \,.\, [\, d_j\, ,\, e_j\,]}\,,\ d_j > 0,\ e_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \mathbf{(3.17)}$$

Se obţine astfel modelul matematic (3.18).

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_j \,.\, [\, \alpha_{ij}\, ,\, \beta_{ij}\,]} \subseteq \mathbf{[\, \gamma_i\, ,\, \delta_i\,]}\,,\ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\mathbf{X_j} \geq \mathbf{0}\ ,\quad j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \mathbf{(3.18\ )}$$

$$\mathbf{f(\, X_1, X_2, \ldots, X_n\,)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_j \,.\, [\, d_j\, ,\, e\ j]}$$

$$\mathbf{sup\ f(\, X_1, X_2, \ldots, X_n\,)}$$

Modelul (3.18) este o problemă de programare liniară cu coeficienţi mulţimi convexe (intervale închise) care se rezolvă cu ajutorul modelelor date de relaţiile (3.19) şi (3.20).

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} . X_j \leq \delta_i \ , i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} . X_j \geq \gamma_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$X_j \geq 0 \ , \ j = 1, 2, \ldots, n ; \qquad (3.19)$$

$$f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} d_j . X_j$$

$$\max f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} . X_j \leq \delta_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} . X_j \geq \gamma_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$X_j \geq 0 \ , \ j = 1, 2, \ldots, n ; \qquad (3.20)$$

$$f_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} e_j . X_j$$

$$\max f_2(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Se vor nota cu X_{opt}^{1} şi cu X_{opt}^{2} soluţiile optime ale problemelor de programare liniară, date de relaţiile (3.19) şi (3.20). ,

Soluţiile optime ale problemelor de programare liniară date de relaţiile (3.19) şi (3.20) se obţin cu algoritmul simplex primal sau dual , respectiv cu calculatorul utilizând programele QSB, DSSPOM, LINDO, QM sau alte programe.
Se notează:

$$f_1(X_{opt}^{1}) = \max f_1(X) = S_1$$
$$f_2(X_{opt}^{2}) = \max f_2(X) = S_2 \qquad (3.21)$$

Se obţine intervalul $[S_1 , S_2]$ de încadrare a profitului maxim în (3.22).

$$\max f(X) \in [S_1 , S_2] . \qquad (3.22)$$

Se pot considera şi alte funcţii obiectiv f, cum ar fi: vetitul din vânzări, producţia fizică, cifra de afaceri, costurile totale etc.

3. 3. UTILIZAREA OPTIMĂ A MAŞINILOR PENTRU PROCESELE DE PRELUCRARE A PIESELOR ŞI REPERELOR. ALOCAREA MAŞINILOR PROBLEMA MAXIMIZĂRII PROFITULUI ÎN ALOCAREA MAŞINILOR

Într-un sistem de producţie (atelier, secţie, întreprindere) se fabrică piesele / reperele P_j, j = 1, 2, ..., n executând pentru fiecare operaţii de prelucrare pe maşinile M_i, i = 1, 2, ..., m, în mod succesiv, iar ordinea operaţiilor este indiferentă.

Se cunosc:

- timpii unitari de prelucrare ai piesei P_j pe maşina M_i egali cu t_{ij}, i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n;
- timpul disponibil al unei maşini M_i pentru orizontul de timp considerat (zi, săptămână, lună etc.) egal cu T_i, i = 1, 2, . . ., m;
- profitul (real sau estimat) pe fiecare piesă / reper P_j egal cu c_j, j = 1, 2, . . ., n;

Se presupune că maşinile nu au timpi morţi, datorită faptului că nu contează ordinea operaţiilor. Aceste elemente sunt date în tabelul nr.3.3.

Se presupune că sunt satisfăcute condiţiile:

$t_{ij} \geq 0$, $T_i \geq 0$, $c_j \geq 0$, i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n.

Trebuie stabilit planul de fabricaţie optim, deci câte piese / repere P_1, P_2, . . ., P_n se vor fabrica în perioada de timp considerată (zi, săptămână, lună etc.) şi în condiţiile date, pentru a obţine un profit maxim.

Pentru rezolvarea problemei se va nota cu X_j cantitatea (numărul de bucăţi) din piesa / reperul P_j ce se va fabrica, j = 1, 2, ..., n.

Modelul matematic al problemei este dat de relaţiile (3.23) care reprezintă o problemă de programare liniară în numere întregi.

Tabelul nr.3.3.

P_j / M_i	P_1	P_2	. . .	P_n	Timp maşină disponibil T_i
M_1	t_{11}	t_{12}	. . .	t_{1n}	T_1
M_2	t_{21}	t_{22}	. . .	t_{2n}	T_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
M_m	t_{m1}	t_{m2}	. . .	t_{mn}	T_m
Profitul unitar c_j	c_1	c_2	. . .	c_n	

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot X_j \leq T_i, \; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$X_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (3.23)$$

$$X_j \in Z, \; j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot X_j,$$

$$\max f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Rezolvarea problemei de programare liniară în numere întregi (3.23) se poate realiza cu algoritmul lui Gomory sau algoritmul Branch and Bound, iar pe calculatoare se pot utiliza programele: Qsb, Lindo sau alte programe.

Observaţii

1. Observaţiile 1 şi 2, inclusiv relaţia (3.9), de la problema maximizării profitului în alocarea resurselor materiale rămân valabile şi pentru problema de programare liniară în numere întregi din relaţiile (3.23).

2.Se va prezenta o **generalizare** a modelului dat de relaţiile (3.23), prin considerarea timpului de prelucrare şi a timpului disponibil că aparţin unor intervale, (3.24).

$$\mathbf{t_{ij}} \in [\alpha_{ij}, \beta_{ij}],\ \alpha_{ij} \geq 0,\ \beta_{ij} \geq 0, \qquad \textbf{(3.24)}$$
$$\mathbf{T_i} \in [\gamma_i, \delta_i],\ \gamma_i \geq 0,\ \delta_i \geq 0;\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

În aceste ipoteze modelul matematic corespunzator este o problemă de programare liniară în numere întregi cu coeficienţi mulţimi convexe (intervale închise) (3.25).

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_j} \cdot [\alpha_{ij}, \beta_{ij}] \subseteq [\gamma_i, \delta_i],\ i = 1, 2, \ldots, m;$$
$$\mathbf{X_j} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{j = 1, 2, \ldots, n;} \qquad \textbf{(3.25)}$$
$$\mathbf{X_j} \in \mathbf{Z},\ \mathbf{j = 1, 2, \ldots, n;}$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, \ldots, X_n)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_j \cdot X_j}$$
$$\mathbf{\sup f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$$

Problema din relaţiile (3.25), este echivalentă cu problema din relaţiile (3.26).

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \cdot \mathbf{X_j} \leq \delta_i,\ i = 1, 2, \ldots, m;$$
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot \mathbf{X_j} \geq \gamma_i,\ i = 1, 2, \ldots, m;$$
$$\mathbf{X_j} \geq \mathbf{0},\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(3. 26)}$$
$$\mathbf{X_j} \in \mathbf{Z},\ j = 1, 2, \ldots, n;$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, \ldots, X_n)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_j \cdot X_j}$$
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$$

Problema (3.26) este o problemă de programare liniară în numere întregi cu coeficienţi numere reale. Rezolvarea modelului (3.25) se reduce la rezolvarea modelului (3.26), ce se rezolvă cu algoritmul lui Gomory sau cu algoritmul Branch and Bound, respectiv pe calculator cu programele Qsb, Lindo, Qm, AMPL, GAMS, ALLO, LPL, AIMMS sau alte programe.

2. Dacă din *studii de marketing* se poate estima intervalul de încadrare a profitului unitar

$$\mathbf{c_j} \in [\mathbf{d_j}, \mathbf{e_j}],\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(3.27)}$$

atunci problema dată de relaţiile (3.23) se poate generaliza din nou, considerând relaţia (3.28).

$$\mathbf{f(X_1, X_2, \ldots, X_n)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_j} \cdot [\mathbf{d_j}, \mathbf{e_j}],\ d_j > 0,\ e_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(3.28)}$$

Prin utilizarea relaţiei (3.28) se obţine modelul matematic (3.29).

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X_j} \cdot [\alpha_{ij}, \beta_{ij}] \subseteq [\gamma_i, \delta_i],\ i = 1, 2, \ldots, m;$$
$$\mathbf{X_j} \geq \mathbf{0},\ j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(3.29)}$$
$$\mathbf{X_j} \in \mathbf{Z},\ j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mathbf{f(\ X_1, X_2, \ldots, X_n\ ) = \sum_{j=1}^{n} X_j\ .\ [\ d_j\ ,\ e_j\ ]}$$

$$\mathbf{sup\ f(\ X_1, X_2, \ldots, X_n\ )}$$

Modelul (3.29) este o problemă de programare liniară cu coeficienţi mulţimi convexe (intervale închise) care se rezolvă cu ajutorul celor două modele, date de relaţiile (3.30) şi (3.31).

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\ .\ X_j\ \leq\ \delta_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\ .\ X_j\ \geq\ \gamma_i\ ,\ \ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\mathbf{X_j\ \geq\ 0\ ,}\ \ j = 1, 2, \ldots, n\ ; \qquad \mathbf{(3.30)}$$

$$\mathbf{X_j \in Z}\ \ ,\ \ j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mathbf{f_1(\ X_1, X_2, \ldots, X_n\ ) = \sum_{j=1}^{n} d_j\ .\ X_j}$$

$$\mathbf{max\ f_1(\ X_1, X_2, \ldots, X_n\ )}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\ .\ X_j\ \leq\ \delta_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\ .\ X_j \geq\ \gamma_i\ ,\ \ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\mathbf{X_j\ \geq\ 0}\ ,\ \ j = 1, 2, \ldots, n\ ; \qquad \mathbf{(3.31)}$$

$$\mathbf{X_j \in Z}\ \ ,\ \ j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mathbf{f_2(\ X_1, X_2, \ldots, X_n\ ) = \sum_{j=1}^{n} e_j\ .\ X_j}$$

$$\mathbf{max\ f_2(\ X_1, X_2, \ldots, X_n\ ).}$$

Se vor nota cu $\mathbf{X_{opt}^{\ 1}}$ şi cu $\mathbf{X_{opt}^{\ 2}}$ soluţiile optime ale celor două probleme de programare liniară de mai sus, date de relaţiile (3.30), respectiv (3.31).

,

Soluţiile optime ale celor două probleme de programare liniară date de relaţiile (3.30) şi (3.31) se obţin cu algoritmul lui Gomory sau algoritmul Branch and Bound, respectiv cu calculatorul utilizând programele QSB, LINDO sau alte programe.
Se notează:

$$\mathbf{f_1(\ X_{opt}^{\ 1}\ ) = max\ f_1(X) = S_1}$$

$$\mathbf{f_2(\ X_{opt}^{\ 2}\ ) = max\ f_2(X) = S_2} \qquad \mathbf{(3.32)}$$

Se obţine intervalul $\mathbf{[S_1\ ,\ S_2\ ]}$ de încadrare a profitului maxim în (3.33).

$$\max f(X) \in [S_1, S_2]. \qquad (3.33)$$

Exemplul nr. 3.2aaax.

Se consideră un atelier în care se prelucrează trei piese / repere P_1 , P_2 şi P_3 pe trei maşini M_1 , M_2 şi M_3 . Timpul unitar de prelucrare al fiecarei piese şi timpul disponobil al fiecărei maşini sunt intervale, date în tabelul nr. 3.4a. Se cere să se determine câte piese trebuie prelucrate astfel încât profitul să fie maxim.

Tabelul nr. 3.4aaax.

P_j / M_i	P_1	P_2	P_3	Timp maşină disponibil T_i [min]
M_1	11	9	7.5	11000
M_2	7	12	9.3	8800
M_3	6	16	8.7	10000
Profit unitar c_j [lei]	150	250	230	

Se notează cu X_j cantitatea pieselor P_j ce se vor prelucra, j = 1, 2, 3 .

Modelul matematic de rezolvare este o problemă de programare liniară în numere întregi (3.35aaax).

$$\begin{aligned} &11X_1 + 9X_2 + 7.5X_3 \le 11000 \\ &7X_1 + 12X_2 + 9.3X_3 \le 8800 \qquad (3.35\ aaax) \\ &6X_1 + 16X_2 + 8.7X_3 \le 10000 \\ &X_j \ge 0 \ , \ j = 1, 2, 3 ; \\ &X_j \in Z \ , j = 1, 2, 3; \\ &f(X_1, X_2, X_3) = 150X_1 + 250X_2 + 230X_3 \\ &\max f(X_1, X_2, X_3) \end{aligned}$$

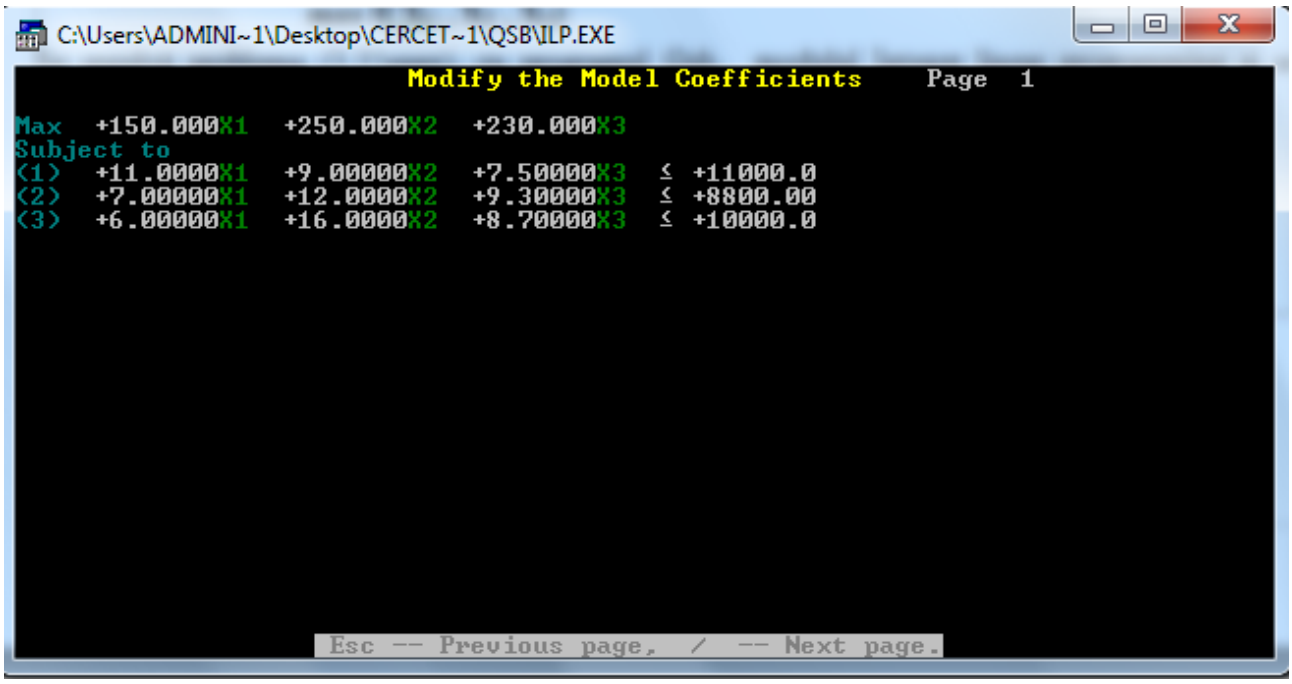
Se rezolvă problema (3.35aaax), cu programul Qsb, modulul Integer linear programming şi se obţine soluţia optimă:

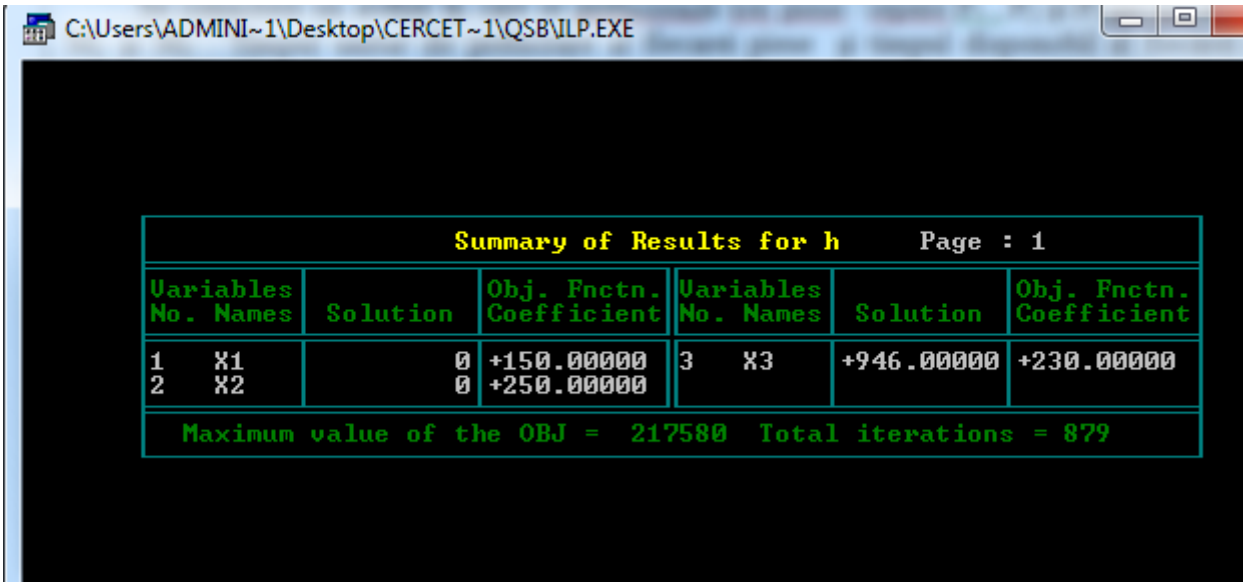
$X_1 =$ 0 piese P_1 ;

$X_2 =$ 0 piese P_2 ;

$X_3 =$ 946 piese P_3

$\max f(X_1, X_2, X_3) =$ 217 580 lei





Exemplul nr. 3.2.

Se consideră un atelier în care se prelucrează trei piese / repere P_1 , P_2 şi P_3 pe trei maşini M_1 , M_2 şi M_3 . Timpul unitar de prelucrare al fiecarei piese şi timpul disponobil al fiecărei maşini sunt intervale, date în tabelul nr. 3.4. Se cere să se determine câte piese trebuie prelucrate astfel încât profitul să fie maxim.

Tabelul nr. 3.4.

P_j / M_i	P_1	P_2	P_3	Timp maşină disponibil T_i [min]
M_1	[10.9 ; 11.1]	[8.9 ; 9.1]	[7.4 ; 7.6]	[9000 ; 12000]
M_2	[6.9 ; 7.1]	[11.9 ; 12.1]	[9.2 ; 9.4]	[8000 ; 9600]
M_3	[5.9 ; 6.1]	[15.9 ; 16.1]	[8.6 ; 8.8]	[8500 ; 10500]
Profit unitar c_j [lei]	150	250	230	

Modelul matematic este o problemă de programare liniară cu coeficienţi mulţimi convexe (intervale închise), este dat de relaţiile (3.34).

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{X_1 \,.\, [\,10.9\,;\,11.1\,] + X_2 \,.\, [\,8.9\,;\,9.1\,] + X_3 \,.\, [7.4\,;\,7.6]} \subseteq \mathbf{[\,9000\,;\,12000\,]}\\
&\mathbf{X_1 \,.\, [\,6.9\,;\,7.1\,] + X_2 \,.\, [\,11.9\,;\,12.1\,] + X_3 \,.\, [9.2\,;\,9.4]} \subseteq \mathbf{[\,8000\,;\,9600\,]}\\
&\mathbf{X_1 \,.\, [\,5.9\,;\,6.1\,] + X_2 \,.\, [\,15.9\,;\,16.1\,] + X_3 \,.\, [8.6\,;\,8.8]} \subseteq \mathbf{[\,8500\,;\,10500\,]}\\
&\mathbf{X_j \geq 0}\ ,\ j = 1, 2, 3;\\
&\mathbf{X_j \in Z}\ ,\ j = 1, 2, 3; \qquad\qquad \mathbf{(3.34)}\\
&\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 150 \,.\, X_1 + 250 \,.\, X_2 + 230 \,.\, X_3}\\
&\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}
\end{aligned}
$$

Modelul dat de relaţiile (3.34), se reduce la o problemă de programare liniară în numere întregi (3.35).

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{10.9\,X_1 + 8.9\,X_2 + 7.4\,X_3 \geq 9000}\\
&\mathbf{11.1\,X_1 + 9.1\,X_2 + 7.6\,X_3 \leq 12000}\\
&\mathbf{6.9\,X_1 + 11.9\,X_2 + 9.2\,X_3 \geq 8000}\\
&\mathbf{7.1\,X_1 + 12.1\,X_2 + 9.4\,X_3 \leq 9600} \qquad\qquad \mathbf{(3.35)}\\
&\mathbf{5.9\,X_1 + 15.9\,X_2 + 8.6\,X_3 \geq 8500}\\
&\mathbf{6.1\,X_1 + 16.1\,X_2 + 8.8\,X_3 \leq 10500}\\
&\mathbf{X_j \geq 0}\ ,\ j = 1, 2, 3\ ;\\
&\mathbf{X_j \in Z}\ ,\ j = 1, 2, 3;\\
&\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 150X_1 + 250X_2 + 230X_3}\\
&\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}
\end{aligned}
$$

Se rezolvă cu programul Qsb problema (3.35), cu modulul Integer linear programming în 621 iteraţii şi se obţine soluţia optimă:

$X_1 =$ 273 piese P_1 ;
$X_2 =$ 0 piese P_2 ;
$X_3 =$ 815 piese P_3
$\max f(X_1, X_2, X_3) =$ 228400 lei .

Exemplul nr. 3.3.

Se reia exemplul nr. 3.2, considerând că profitul unitar adus de fiecare piesă sunt intervalle închise. Se consideră un atelier în care se prelucrează trei piese / repere P_1 , P_2 şi P_3 pe trei maşini M_1 , M_2 şi M_3 . Timpii unitari de prelucrare, tipul disponobil al fiecărei maşini şi profitul unitar adus de fiecare piesă sunt intervale, date în tabelul nr.3.5. Se cere să se determine intervalul în care se încadrează profitul maxim în aceste condiţii.

Tabelul nr.3.5.

P_j / M_i	P_1	P_2	P_3	Timp maşină disponibil T_i [min]
M_1	[10.9 ; 11.1]	[8.9 ; 9.1]	[7.4 ; 7.6]	[9000 ; 12000]
M_2	[6.9 ; 7.1]	[11.9 ; 12.1]	[9.2 ; 9.4]	[8000 ; 9600]
M_3	[5.9 ; 6.1]	[15.9 ; 16.1]	[8.6 ; 8.8]	[8500 ; 10500]
Profit unitar c_i [lei]	[150 ; 200]	[250 ; 300]	[230 ; 280]	

Modelul matematic este o problemă de programare liniară cu coeficienţi mulţimi convexe (intervale închise), este dat de relaţiile (3.36).

$$
\begin{aligned}
&X_1 \,.\, [\,10.9 ; 11.1\,] + X_2 \,.\, [\,8.9 ; 9.1\,] + X_3 \,.\, [7.4 ; 7.6] \subseteq [\,9000 ; 12000\,] \\
&X_1 \,.\, [\,6.9 ; 7.1\,] + X_2 \,.\, [\,11.9 ; 12.1\,] + X_3 \,.\, [9.2 ; 9.4] \subseteq [\,8000 ; 9600\,] \\
&X_1 \,.\, [\,5.9 ; 6.1\,] + X_2 \,.\, [\,15.9 ; 16.1\,] + X_3 \,.\, [8.6 ; 8.8] \subseteq [\,8500 ; 10500\,] \\
&X_j \geq 0 \;,\; j = 1, 2, 3; \\
&X_j \in Z \;,\; j = 1, 2, 3; \qquad (3.36) \\
&f(X_1, X_2, X_3) = X_1 \,.\, [150; 200] + X_2 \,.\, [250; 300] + X_3 \,.\, [230; 280] \\
&\sup f(X_1, X_2, X_3)
\end{aligned}
$$

Modelul din relaţiile (3.36), se reduce la două probleme de programare liniară în numere întregi, (3.37) şi (3.38).

$$
\begin{aligned}
&10.9\,X_1 + 8.9\,X_2 + 7.4\,X_3 \geq 9000 \\
&11.1\,X_1 + 9.1\,X_2 + 7.6\,X_3 \leq 12000 \\
&6.9\,X_1 + 11.9\,X_2 + 9.2\,X_3 \geq 8000 \\
&7.1\,X_1 + 12.1\,X_2 + 9.4\,X_3 \leq 9600 \qquad (3.37) \\
&5.9\,X_1 + 15.9\,X_2 + 8.6\,X_3 \geq 8500 \\
&6.1\,X_1 + 16.1\,X_2 + 8.8\,X_3 \leq 10500 \\
&X_j \geq 0 \;,\; j = 1, 2, 3\,; \\
&X_j \in Z \;,\; j = 1, 2, 3; \\
&f_1(X_1, X_2, X_3) = 150X_1 + 250X_2 + 230X_3 \\
&\max f_1(X_1, X_2, X_3)
\end{aligned}
$$

Se rezolvă cu programul Qsb problema (3.37), cu modulul *Integer linear programming* în 621 iteraţii şi se obţine soluţia optimă:

$X_1 =$ 273 piese P_1 ;
$X_2 =$ 0 piese P_2 ;

$X_3 =$ 815 piese P_3
max $f_1(X_1 , X_2 , X_3) = 228400$ lei .

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{10.9\,X_1 + 8.9\,X_2 + 7.4\,X_3 \geq 9000}\\
&\mathbf{11.1\,X_1 + 9.1\,X_2 + 7.6\,X_3 \leq 12000}\\
&\mathbf{6.9\,X_1 + 11.9\,X_2 + 9.2\,X_3 \geq 8000}\\
&\mathbf{7.1\,X_1 + 12.1\,X_2 + 9.4\,X_3 \leq 9600}\\
&\mathbf{5.9\,X_1 + 15.9\,X_2 + 8.6\,X_3 \geq 8500}\\
&\mathbf{6.1\,X_1 + 16.1\,X_2 + 8.8\,X_3 \leq 10500}\\
&\mathbf{X_j \geq 0}\ ,\ j = 1, 2, 3\ ;
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.38)}
$$

$\mathbf{X_j \in Z}$, j = 1, 2, 3;
$\mathbf{f_2 (X_1 , X_2 , X_3) = 200X_1 + 300X_2 + 280X_3}$
$\mathbf{max\ f_2(X_1 , X_2 , X_3)}$

Se rezolvă cu programul Qsb problema (3.38), cu modulul *Integer linear programming* în 405 iteraţii şi se obţine soluţia optimă:

$X_1 =$ 273 piese P_1 ;
$X_2 =$ 0 piese P_2 ;
$X_3 =$ 815 piese P_3
max $f_2(X_1 , X_2 , X_3) = 282800$ lei .

Deci, s-a determinat intervalul de încadrare a profitului maxim:

max $f(X_1 , X_2 , X_3) \in [228400; 282800]$.

3.4. DUALITATEA ÎN PROGRAMAREA LINIARĂ

3.4.1. DEFINIREA PROBLEMEI DUALE

Se consideră problema de programare liniară (3.54).

$$
\begin{aligned}
&A.X \leq b\\
&X \geq 0\\
&f(X) = c.X\\
&\max f(X)
\end{aligned}
\qquad (3.54)
$$

unde: $A = (a_{ij})$, i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n;

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \ ; \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \ ; \ c = \begin{pmatrix} c_1, & c_2, & \cdots & ,c_n \end{pmatrix} .$$

Problema duală asociată problemei de programare liniară (3.54) este problema de programare liniară (3.55).

$$
\begin{aligned}
&A^t.Y \geq c^t \\
&Y \geq 0 \\
&g(Y) = b^t.Y \qquad (3.55)\\
&\min g(Y)
\end{aligned}
$$

unde: A^t - transpusa matricii A;

$A^t = (a_{ji})$, j = 1, 2, …, n; i = 1, 2, …, m;

b^t , c^t - vectorii transpuşi ai vectorilor b, respectiv c;

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} \; ; \quad b^t = (b_1, \quad b_2, \quad \cdots \quad , b_m) \; ; \; c^t = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Problema de programare liniară (3.54) se va numi problemă primală, iar problema de programare liniară (3.55) se va numi problemă duală. Se observă că duala problemei de programare liniară duală (3.55), deci duala dualei, este problema primală (3.54).

<u>Reguli de obţinere a problemei duale</u>

1. Matricea coeficienţilor sistemului de restricţii duale este transpusa matricei coeficienţilor sistemului de restricţii primale.
2. Coeficienţii funcţiei obiectiv din problema primală devin termeni liberi în problema duală.
3. Termenii liberi din problema primală devin coeficienţi ai funcţiei obiectiv în problema duală.
4. O problemă de maximizare în problema primală se transformă în minimizare în problema duală, iar o problemă de minimizare se transformă în problemă de maximizare în duală.
5. Numărul m al restricţiilor problemei primale este egal cu numărul variabilelor problemei duale. Numărul n al variabilelor problemei primale este egal cu numărul restricţiilor problemei duale.
6. Fiecărei restricţii a problemei primale i se asociază o variabilă în problema duală. Variabilele asociate restricţiilor cu relaţia $\geq$ sunt nenegative (deci ≥ 0) dacă problema primală este de minim şi nepozitive (deci ≤ 0) dacă problema primală este de maxim. Variabilele asociate restricţiilor cu relaţia $\leq$ sunt nepozitive (deci ≤ 0) dacă problema primală este de minim şi nenegative (deci ≥ 0) dacă problema primală este de maxim. Variabilele asociate egalităţilor sunt fără restricţii de semn.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \geq b_i \quad \overset{\min f}{\longrightarrow} \quad Y_i \geq 0 \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \geq b_i \quad \overset{\max f}{\longrightarrow} \quad Y_i \leq 0 \qquad (3.56)\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \leq b_i \quad \overset{\min f}{\longrightarrow} \quad Y_i \leq 0 \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \leq b_i \quad \overset{\max f}{\longrightarrow} \quad Y_i \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j = b_i \quad \rightarrow \quad Y_i \in R$$

7. Fiecărei variabile a problemei primale i se asociază o restricţie în problema duală. Fiecărei variabile nenegative din primală (deci ≥ 0) îi corespunde în problema duală o restricţie cu relaţia $\geq$, dacă problema primală este de maxim şi respectiv o restricţie cu relaţia $\leq$ dacă problema primală este de minim. Fiecărei variabile nepozitive (deci ≤ 0) din problema primală îi corespunde în problema duală o restricţie cu relaţia $\leq$ dacă problema primală este de maxim şi respectiv o restricţie cu relaţia $\geq$ dacă problema primală este de minim. Unei variabile oarecare, fără restricţie de semn, în primală, îi va corespunde în dual o restricţie cu egalitate.

$$X_j \geq 0 \quad \overset{\max f}{\rightarrow} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.Y_i \geq c_j$$

$$X_j \geq 0 \quad \overset{\min f}{\rightarrow} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.Y_i \leq c_j$$

$$X_j \leq 0 \quad \overset{\max f}{\rightarrow} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.Y_i \leq c_j \qquad (3.57)$$

$$X_j \leq 0 \quad \overset{\min f}{\rightarrow} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.Y_i \geq c_j$$

$$X_j \in R \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}.Y_i = c_j$$

Exemplul 3.4. Se consideră problema de programare liniară primală:

$2 . X_1 + X_2 + X_3 + 5. X_4 \leq 11$
$3 . X_1 + 2 .X_2 + X_3 + 2. X_4 \leq 14$
$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0 \ , X_3 \geq 0 \ , \ X_4 \geq 0$
$f = 5 . X_1 + 2 .X_2 + 3 . X_3 + 4 . X_4$
max f

Se cere să se scrie duala sa şi duala dualei.
Problema duală ataşată:

$2 . Y_1 + 3 . Y_2 \geq 5$
$Y_1 + 2 . Y_2 \geq 2$
$Y_1 + Y_2 \geq 3$
$5. Y_1 + 2 . Y_2 \geq 4$
$Y_1 \geq 0 \ , \ Y_2 \geq 0$
$g = 11 . Y_1 + 14 . Y_2$
min g

Duala dualei:

$2 . Z_1 + Z_2 + Z_3 + 5. Z_4 \leq 11$
$3 . Z_1 + 2 .Z_2 + Z_3 + 2. Z_4 \leq 14$
$Z_1 \geq 0 \ , \ Z_2 \geq 0 \ , Z_3 \geq 0 \ , \ Z_4 \geq 0$
$h = 5 . Z_1 + 2 .Z_2 + 3 . Z_3 + 4 . Z_4$
max h

Duala dualei coincide cu primala.

Exemplul 3.5. Se consideră problema de programare liniară primală:

$$
\begin{aligned}
&2.X_1 + X_2 + 2.X_3 \geq 10\\
&X_1 + 2.X_2 + X_3 \geq 18\\
&X_1 + X_2 + X_3 \geq 6\\
&X_1 + 2.X_2 + 3.X_3 \geq 13\\
&X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0\ ,\ X_3 \geq 0\\
&f = 2.X_1 + 3.X_2 + 5.X_3\\
&\min f
\end{aligned}
$$

Se cere să se scrie duala sa.

Problema dală ataşată:

$$
\begin{aligned}
&2.Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \leq 2\\
&Y_1 + 2.Y_2 + Y_3 + 2.Y_4 \leq 3\\
&2.Y_1 + Y_2 + Y_3 + 3.Y_4 \leq 5\\
&Y_1 \geq 0\ ,\ Y_2 \geq 0\ ,\ Y_3 \geq 0\ ,\ Y_4 \geq 0\\
&g = 10.Y_1 + 18.Y_2 + 6.Y_3 + 13.Y_4\\
&\max g
\end{aligned}
$$

Duala dualei:

$$
\begin{aligned}
&2.Z_1 + Z_2 + 2.Z_3 \geq 10\\
&Z_1 + 2.Z_2 + Z_3 \geq 18\\
&Z_1 + Z_2 + Z_3 \geq 6\\
&Z_1 + 2.Z_2 + 3.Z_3 \geq 13\\
&Z_1 \geq 0\ ,\ Z_2 \geq 0\ ,\ Z_3 \geq 0\\
&h = 2.Z_1 + 3.Z_2 + 5.Z_3\\
&\min h
\end{aligned}
$$

Duala dualei coincide cu primala.

3.4.2. RELAŢIA PRIMALĂ – DUALĂ ÎN PROBLEMA MAXIMIZĂRII PROFITULUI. INTERPRETAREA ECONOMICĂ A DUALITĂŢII

Teoreme de dualitate

Se consideră problema de programare liniară primală de maximizare a profitului din relaţiile (3.7), reluată în relaţiile (3.60) şi duala sa în relaţiile (3.61).

PRIMALA

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . X_j \leq b_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;\\
&X_j \geq 0\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n;\\
&f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j . X_j\\
&\max f(X_1, X_2, \ldots, X_n)
\end{aligned}
\qquad (3.60)
$$

DUALA

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.Y_i \geq c_j \quad , \text{j} = 1, 2, \ldots, \text{n}$$

$$Y_i \geq 0 \ , \quad \text{i} = 1, 2, \ldots, \text{m} \qquad (3.61)$$

$$\text{g}(\text{Y}_1, \text{Y}_2, \ldots, \text{Y}_\text{m}) = \sum_{i=1}^{m} b_i.Y_i$$

$$\min \text{g}(\text{Y}_1, \text{Y}_2, \ldots, \text{Y}_\text{m})$$

sau matricial (3.62), respectiv (3.63):

$$\begin{aligned} &A.X \leq b \\ &X \geq 0 \\ &f(X) = c.X \\ &\max \text{f(X)} \end{aligned} \qquad (3.62)$$

şi duala sa (3.63):

$$\begin{aligned} &A^t.Y \geq c^t \\ &Y \geq 0 \\ &g(Y) = b^t.Y \\ &\min \text{g(Y)} \end{aligned} \qquad (3.63)$$

unde: $A = (a_{ij})$, i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n;

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \ ; \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \ ; \ c = \begin{pmatrix} c_1, & c_2, & \cdots & ,c_n \end{pmatrix}$$

A^t - transpusa matricii A;

$A^t = (a_{ji})$, j = 1, 2, …, n; i = 1, 2, …, m;

b^t , c^t - vectorii transpuşi ai vectorilor b, respectiv c;

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} \ ; \quad b^t = \begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \cdots & ,b_m \end{pmatrix} ;$$

Teorema 1

Dacă X şi Y sunt soluţii posibile ale problemei primale (3. 62), respectiv duale (3.63), atunci :

$$f(X) \le g(Y)$$

Teorema 2

Dacă X^* şi Y^* sunt soluţii posibile ale problemei primale (3.62), respectiv duale (3.63) , pentru care are loc relaţia:

$$f(X^*) = g(Y^*)$$

atunci X^* este soluţie optimă a problemei primale (3.62), iar Y^* este soluţie optimă a problemei duale (3.63).

Teorema 3

Dacă se consideră problema primală (3.62) şi problema sa duală (3.63), atunci una din următoarele afirmaţii este adevărată întodeauna:

(1) dacă una din probleme are optim infinit, atunci cealaltă problemă nu are soluţii posibile şi nici soluţie optimă;

(2) dacă una din probleme are optim finit, atunci şi cealaltă problemă are optim finit şi valorile optime ale funcţiilor obiectiv coincid;

(3) nici una din cele două probleme nu are soluţii.

Teorema 4

Dacă problemele primală (3.62) şi duală (3.63) au soluţii posibile, atunci există o soluţie optimă X^* a problemei primale (3.62) şi o soluţie optimă Y^* a problemei duale (3.63) astfel încât să fie îndeplinite condiţiile:

$$(A.X^* - b) + Y^* > 0$$

$$(c^t - A^t.Y^*) + X^* > 0$$

Teorema 5

Condiţia necesară şi suficientă ca soluţiile posibile X^* şi Y^* să fie soluţii optime respectiv ale cuplului de probleme primală (3.62) şi duală (3.63) este :

$$\left(Y^*\right)^t.\left(A.X^* - b\right) = 0$$
$$\left(X^*\right)^t.\left(c^t - A^t.Y^*\right) = 0$$

CONSECINŢE

1. Dacă soluţia optimă X^* a problemei primale (3.60), echivalentă cu problema (3.62), satisface cu inegalitate strictă restricţia i din (3.60) , deci $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X^*{}_j < b_i$, atunci

componenta de rang i a soluţiei optime Y^* a problemei duale (3.63) este nulă, deci: $Y_i^* = 0$.

2. Dacă soluţia optimă Y^* a problemei duale (3.61), echivalentă cu problema (3.63), satisface cu inegalitate strictă restricţia j din (3.61) , deci: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.Y^*_i > c_j$, atunci componenta de rang j a soluţiei optime X^* a problemei primale (3.62) este nulă, deci $X_j^* = 0$.
3. Dacă componenta Y_i^* a soluţiei optime Y^* a problemei duale (3.61), echivalentă cu problema (3.63), este strict pozitivă, deci $Y_i^* > 0$, atunci soluţia optimă X^* a problemei primale satisface cu egalitate restricţia i din relaţiile (3.60), deci: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X^*_j = b_i$.
4. Dacă componenta X_j^* a soluţiei optime X^* a problemei primale (3.62) este strict pozitivă, $X_j^* > 0$, atunci soluţia optimă Y^* a problemei duale (3.61), echivalentă cu problema (3.63), satisface cu egalitate restricţia j a problemei duale (3.61), deci: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.Y^*_i = c_j$.

Dacă se rezolvă cele două probleme de programare liniară, primala şi duala, date de relaţiile (3.60) şi (3.61), echivalente cu (3.62), respectiv (3.63), rezultând soluţiile optime X^* şi Y^* , prin aplicarea teoremelor de dualitate şi a consecinţelor lor, putem avea informaţii despre consumul resursei R_i .

$$X^* = \begin{pmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \vdots \\ X_n^* \end{pmatrix} , \quad Y^* = \begin{pmatrix} Y_1^* \\ Y_2^* \\ \vdots \\ Y_m^* \end{pmatrix}$$

Astfel, dacă $Y_i^* > 0$, atunci resursa R_i este utilizată în întregime, este epuizată, pentru varianta soluţiei optime, este verificată relaţia (3.64).

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X^*_j = b_i \qquad (3.64) \quad .$$

Dacă $Y_i^* = 0$, atunci resursa R_i nu este utilizată în întregime, mai rămâne nefolosită cantitatea dată de relaţia (3.65).

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X^*_j \quad . \qquad (3.65)$$

Din punct de vedere economic, variabilele duale arată cu cât ar fi crescut valoarea optimă a funcţiei obiectiv, dacă s-ar fi dispus de o unitate de resursă în plus. Variabilele duale mai sunt numite: "preţuri umbră ", " preţuri umbră ale resurselor limitate " , " evaluări obiectiv determinate " , " evaluări duale " .

Restricţiei de rang i din modelul liniar de maximizare a profitului (3.60), dată de relaţia (3.66) :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . X_j \le b_i \qquad (3.66)$$

i se ataşează variabila duală Y_i în problema duală (3.61), iar prin rezolvarea problemei duale (3.61) valoarea lui Y_i arată cu cât ar fi crescut profitul maxim f dacă resursa R_i ar fi fost mai mare cu o unitate, deci egală cu $b_i + 1$. De asemenea, dacă se va micşora disponibilul din resursa

R_i cu o unitate, $b_i' = b_i - 1$, iar disponibilul din celelalte resurse rămâne neschimbat, profitul maxim va scădea cu valoarea lui Y_i.

În cazul problemelor de programare liniară care conţin restricţii neconcordante şi egalităţii , la interpretarea variabilelor duale (preţurilor umbră), trebuie să se tină seama de natura economică a funcţiei obiectiv şi de semnul variabilei duale.

Exemplul nr. 3.6.

Se va revedea un exemplu prezentat. Se consideră o problemă de alocare a resurselor materiale cu maximizarea profitului. Din m = 3 resurse se fabrică n = 3 produse, date în tabelul nr.3.6 . Trebuie determinată ce cantitate se va fabrica din fiecare produs, astfel încât profitul obţinut să fie maxim.

Tabelul nr.3.6.

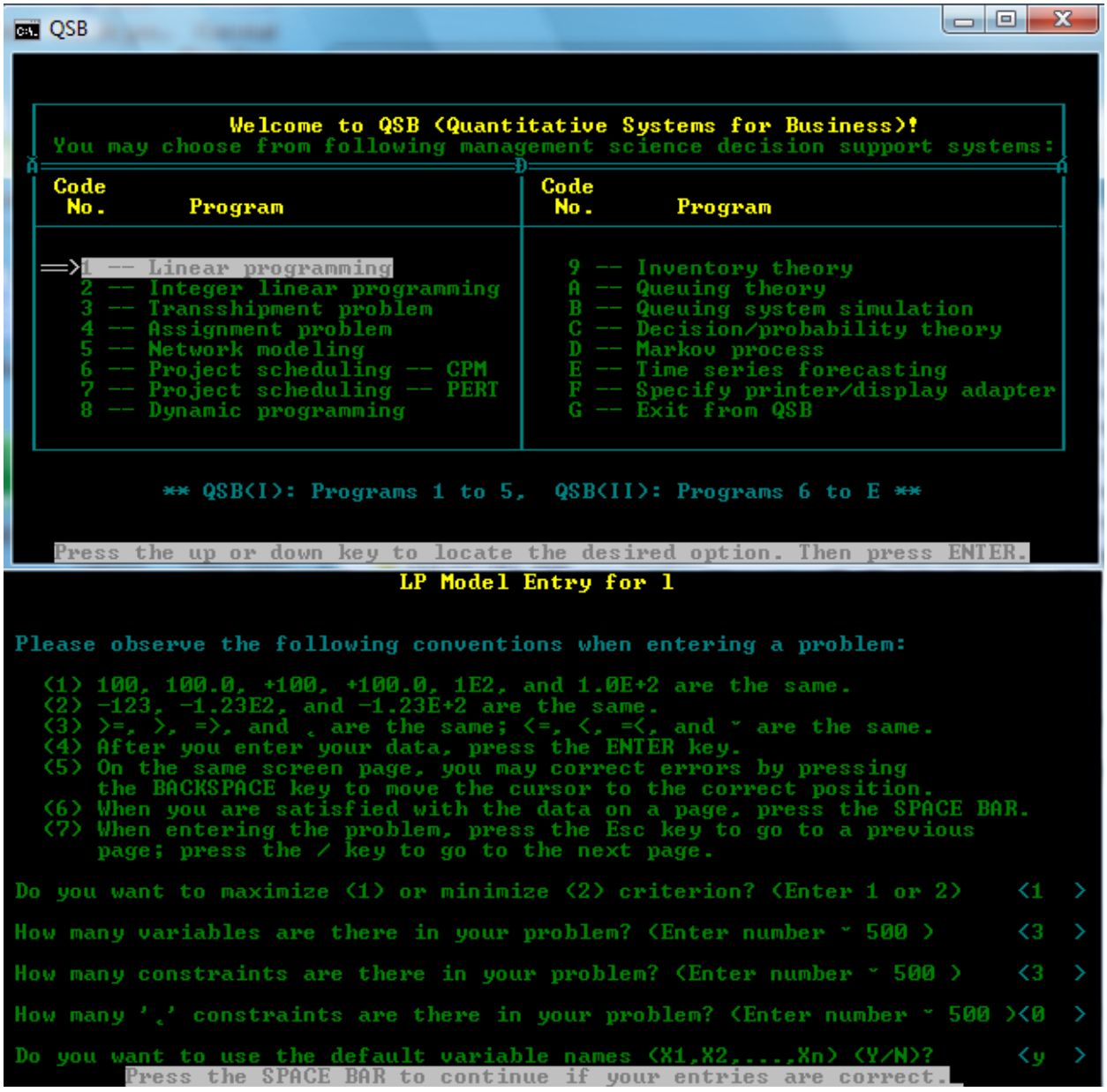
P_j / R_i	P_1	P_2	P_3	Resurse disponibile b_i
R_1	1	2	3	120
R_2	2	2	1	80
R_3	1	2	1	70
Profitul unitar c_j	60	80	100	

Se vor rezolva problema primală şi problema duală, urmând să se interpretze rezultatele, deci soluţiile optime ce se obţin.

Modelul matematic reprezintă problema de programare liniară primală:

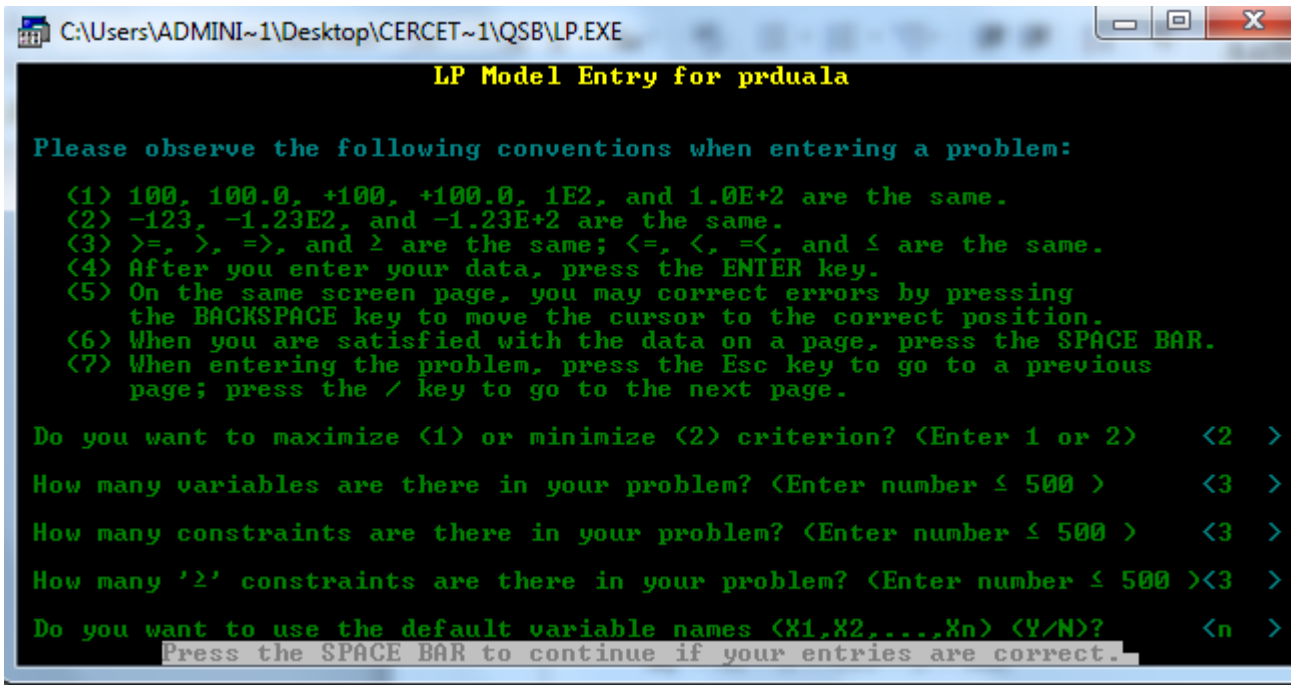
$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 120}$$
$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 80}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0}\text{ , } j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3}$$
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}$$

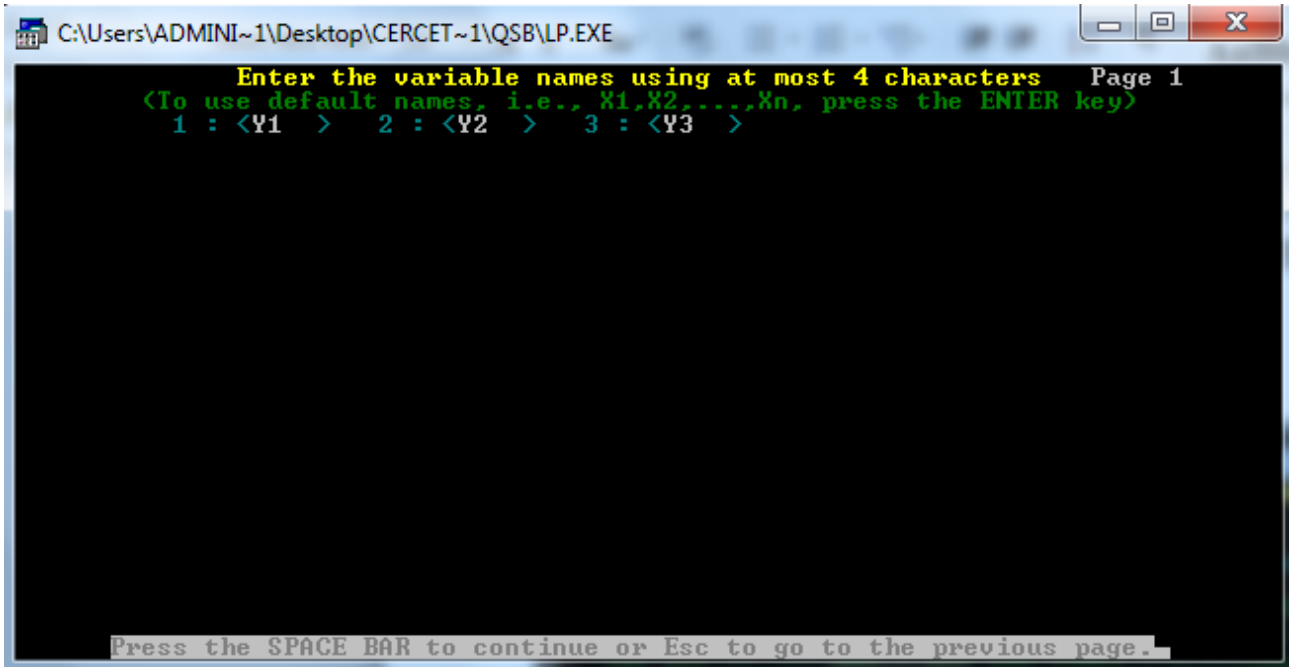
Se rezolvă problema de programare liniară primală cu programul QSB, modulul linear programming, şi se obţine soluţia optimă: $X_1 = 24$, $X_2 = 0$, $X_3 = 32$, max f = 4640

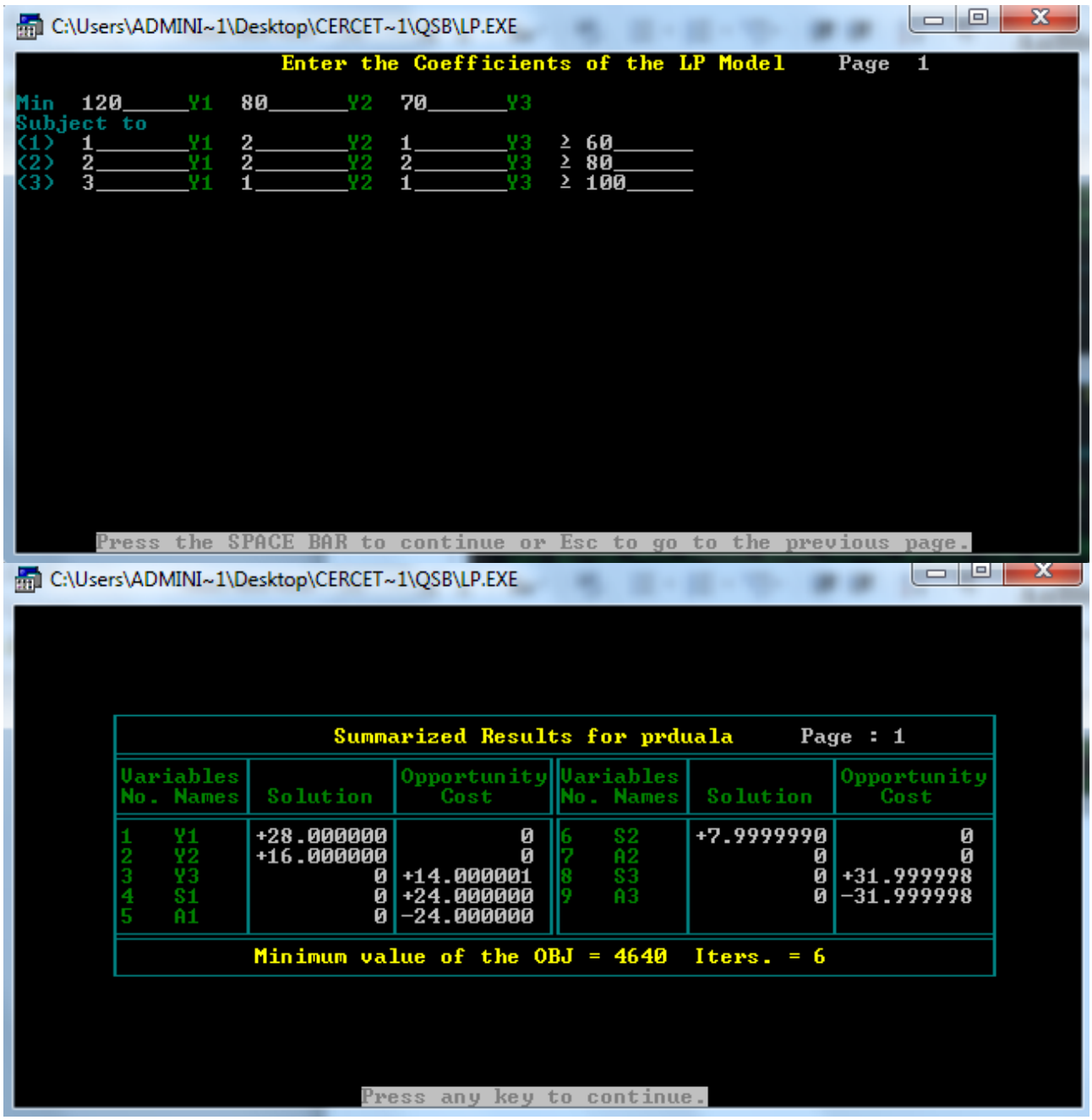


Problema de programare liniară dual:

$$Y_1 + 2 \cdot Y_2 + Y_3 \geq 60$$
$$2 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2 + 2 \cdot Y_3 \geq 80$$
$$3 \cdot Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 100$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$
$$g = 120 \cdot Y_1 + 80 \cdot Y_2 + 70 \cdot Y_3$$
$$\min g$$

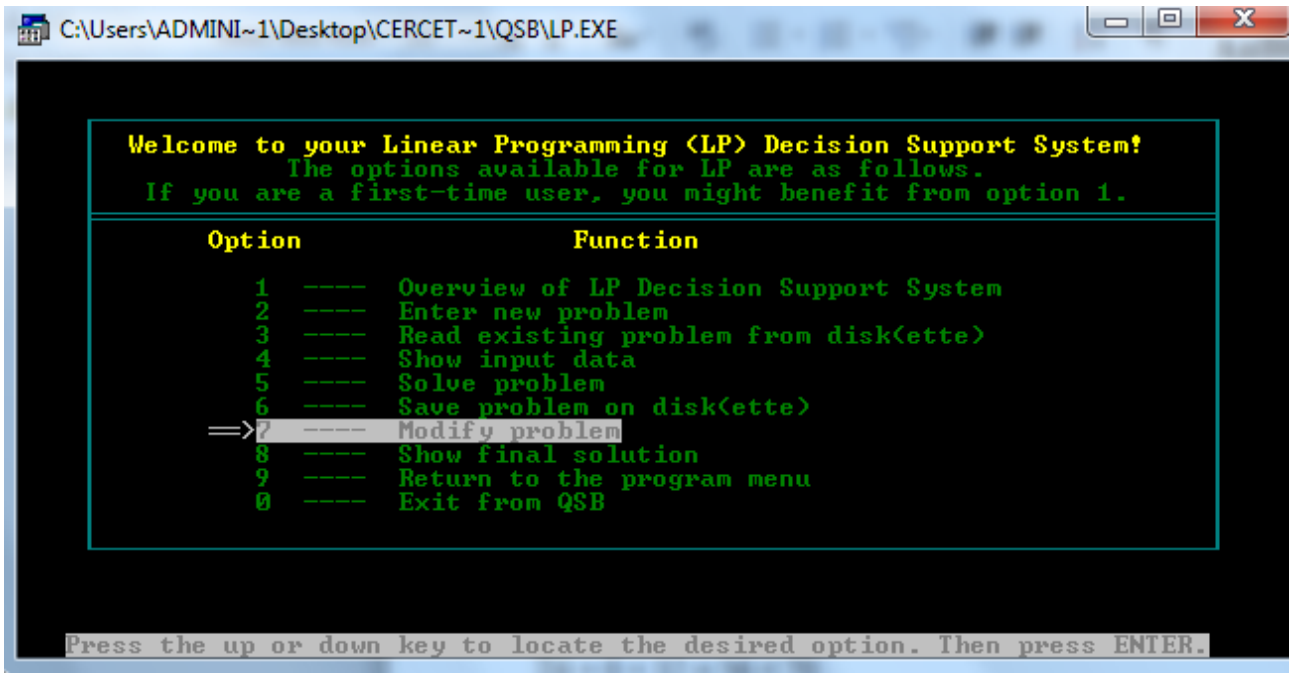

C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
LP Model Entry for prduala
Please observe the following conventions when entering a problem:
(1) 100, 100.0, +100, +100.0, 1E2, and 1.0E+2 are the same.
(2) -123, -1.23E2, and -1.23E+2 are the same.
(3) >=, >, =>, and ≥ are the same; <=, <, =<, and ≤ are the same.
(4) After you enter your data, press the ENTER key.
(5) On the same screen page, you may correct errors by pressing the BACKSPACE key to move the cursor to the correct position.
(6) When you are satisfied with the data on a page, press the SPACE BAR.
(7) When entering the problem, press the Esc key to go to a previous page; press the / key to go to the next page.
Do you want to maximize (1) or minimize (2) criterion? (Enter 1 or 2) <2 >
How many variables are there in your problem? (Enter number ≤ 500) <3 >
How many constraints are there in your problem? (Enter number ≤ 500) <3 >
How many '≥' constraints are there in your problem? (Enter number ≤ 500)<3 >
Do you want to use the default variable names (X1,X2,...,Xn) (Y/N)? <n >
Press the SPACE BAR to continue if your entries are correct.


C:\Users\ADMINI~1\Desktop\CERCET~1\QSB\LP.EXE
Enter the variable names using at most 4 characters Page 1
(To use default names, i.e., X1,X2,...,Xn, press the ENTER key)
1 : <Y1 > 2 : <Y2 > 3 : <Y3 >
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.



Soluţia optimă a problemei duale obţinută cu programul QSB, modulul linear programming, este: $Y_1 = 28$, $Y_2 = 16$, $Y_3 = 0$, min g = 4640 = max f
Se observă că $Y_3 = 0$, deci resursa R_3 nu se consumă decât parţial în obţinerea soluţiei optime a primalei (profitul maxim), iar $Y_1 = 28 > 0$ şi $Y_2 = 16 > 0$, adică resursele R_1 şi R_2 se consumă integral pentru obţinerea soluţiei optime a primalei (profitul maxim).
Aceste informaţii se verifică cu soluţia optimă a problemei primale în primală.

$24 + 0 + 3 \cdot 32 = 120$
$2 \cdot 24 + 0 + 32 = 80$
$24 + 0 + 32 = 56 < 70$
Se vor analiza câteva situaţii.
Se modifică primala.



Cazul 1.

Variabila duală $Y_1 = 28$, deci dacă am dispune din resursa R_1 în cantitatea
$\mathbf{b_1'} = b_1 + 1 = 120 + 1 = 121$, profitul maxim ar creşte cu valoarea lui $Y_1 = 28$ unităţi monetare.
Se verifică acest lucru, considerând problema dată de relaţiile:

$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 121}$$
$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 80}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0}, \; j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3}$$
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}$$

Rezolvând cu programul QSB, se obţine soluţia optimă:
$X_1 = 23.8$, $X_2 = 0$; $X_3 = 32.4$;
max f = 4668 = 4640 + 28 = 4640 + Y_1 .

Cazul 2.

Se va mări disponibilul iniţial din prima resursă R_1 cu 2 unităţi,
$\mathbf{b_1'} = b_1 + 2 = 120 + 2 = 122$

$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 122}$$
$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 80}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0}, \; j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3}$$
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obţine soluţia optimă:
$X_1 = 23.6$, $X_2 = 0$; $X_3 = 32.8$;
max f = 4696 = 4640 + 2. 28 = 4640 + 56 = 4640 + 2.Y_1 .

Cazul 3.

Dacă se va mări disponibilul din resursa R_2 cu o unitate**,**
$\mathbf{b_2}' = b_2 + 1 = 80 + 1 = 81$,
iar celelalte două resurse rămân neschimbate:

$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 120}$$
$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 81}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0}\text{ , } j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3}$$
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obţine soluţia optimă:
$X_1 = 24.6$, $X_2 = 0$; $X_3 = 31.8$;
max f = 4656 = 4640 + 16 = 4640 + Y_2 .

Cazul 4.
Dacă se va mări disponibilul din resursa R_3 cu o unitate, $\mathbf{b_3}' = b_3 + 1 = 70 + 1 = 71$, iar celelalte două resurse rămân neschimbate:

$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 120}$$
$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 80}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 71}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0}\text{ , } j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3}$$
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obţine soluţia optimă:
$X_1 = 24$, $X_2 = 0$; $X_3 = 32$;
max f = 4640 = 4640 + 0 = 4640 + Y_3 .

Cazul 5.

Dacă se va mări disponibilul din resursele R_1 şi R_2 cu o unitate**,** $\mathbf{b_1}' = b_1 + 1 = 120 + 1 = 121$,
$\mathbf{b_2}' = b_2 + 1 = 80 + 1 = 81$, iar resursa R_3 rămâne neschimbată:

$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 121}$$
$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 81}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0}\text{ , } j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3}$$
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obţine soluţia optimă:
$X_1 = 24.4$, $X_2 = 0$; $X_3 = 32.2$; max f = 4684 = 4640 + 28 + 16 = 4640 + $Y_1 + Y_2$.

Cazul 6.

Dacă se va micşora disponibilul din resursa R_1 cu o unitate, $\mathbf{b_1}' = b_1 - 1 = 120 - 1 = 119$,

iar disponibilul din resursele R_1 R_3 rămâne neschimbat, profitul maxim va scădea cu valoarea lui $Y_1 = 28$ unităţi monetare. Se verifică acest lucru, considerând problema dată de relaţiile:

$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 119}$$
$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 80}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0}, \; j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3}$$
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obţine soluţia optimă:
$X_1 = 24.2$, $X_2 = 0$; $X_3 = 31.6$;
max f = 4612 = 4640 - 28 = 4640 - Y_1

Cazul 7.

Dacă se va micşora disponibilul din resursele R_1 , R_2 cu o unitate, $\mathbf{b_1'} = b_1 - 1 = 120 - 1 = 119$, $\mathbf{b_2'} = b_2 - 1 = 80 - 1 = 79$, iar resursa R_3 rămâne neschimbată:

$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 119}$$
$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 79}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0}, \; j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3}$$
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obţine soluţia optimă:
$X_1 = 23.6$, $X_2 = 0$; $X_3 = 31.8$;
max f = 4596 = 4640 - 28 - 16 = 4640 - Y_1 - Y_2

Cazul 8.

Dacă se va micşora disponibilul din resursa R_1 cu o unitate, $\mathbf{b_1'} = b_1 - 1 = 120 - 1 = 119$, disponibilul lui R_2 creşte cu o unitate, $\mathbf{b_2'} = b_2 + 1 = 80 + 1 = 81$, iar resursa R_3 rămâne neschimbată:

$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 119}$$
$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 81}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0}, \; j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3}$$
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}$$

Se rezolvă cu programul QSB, se obţine soluţia optimă:
$X_1 = 24.0$, $X_2 = 0$; $X_3 = 31.4$;
max f = 4628 = 4640 - 28 + 16 = 4640 - Y_1 + Y_2

Se pot considera şi alte scenarii, rezultând diverse variante de plan de fabricaţie.

3.5. PROGRAMAREA LINIARĂ ÎN NUMERE ÎNTREGI (DISCRETĂ)

Există multe probleme practice care au ca model matematic o problemă de programare liniară în care toate variabilele sau numai o parte din ele trebuie să fie numere întregi.
Forma canonică a unei probleme de **programare liniară în numere întregi** este dată de relaţiile (3.86).

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \le b_i \quad , \text{i} = 1, 2, \ldots, \text{m};\\
&X_j \ge 0 \quad , \text{j} = 1, 2, \ldots, \text{n} ; \qquad (3.86)\\
&X_j \in Z \text{ , j} = 1, 2, \ldots, \text{n} ;\\
&f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j\\
&\max f(X_1, X_2, \ldots, X_n)
\end{aligned}$$

sau în scriere matricială echivalentă în relaţiile (3.87).

$$\begin{aligned}
&A \,.\, X \le b\\
&X \ge 0 \qquad (3.87)\\
&X_j \in Z \text{ , j} = 1, 2, \ldots, \text{n} ;\\
&f(X) = c \,.\, X\\
&\max f(X)
\end{aligned}$$

unde: $A = (a_{ij})$, i = 1, 2, . . . , m ; j = 1, 2, . . . , n;

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} c_1 & , & c_2 & , & \ldots & c_n \end{pmatrix}$$

Dacă numai o parte din variabilele unei probleme de programare liniară sunt întregi, se va numi problemă de **programare liniară mixtă**, iar modelul matematic la forma canonică este dat de relaţiile (3.88).

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \le b_i \quad , \text{i} = 1, 2, \ldots, \text{m};\\
&X_j \ge 0 \quad , \text{j} = 1, 2, \ldots, \text{n} ; \qquad (3.88)\\
&X_j \in Z \text{ , j} \in I \subset \{1, 2, \ldots, \text{n}\} ;\\
&f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j\\
&\max f(X_1, X_2, \ldots, X_n)
\end{aligned}$$

Restricţiile problemei de programare liniară în numere întregi sau mixtă pot avea relaţiile de ordine: = , ≥ , ≤ .
Problemele de programare liniară în numere întregi sau mixtă pot fi probleme de maxim sau de minim, la una din formele: generală, canonică sau standard.

Determinarea soluţiei optime a problemei de programare liniară în numere întregi sau mixtă se poate face prin mai multe metode, printre care:

- algoritmul ciclic al lui Gomory;
- algoritmul „ramifică şi mărgineşte”, (“Branch and Bound”) care este folosit de obicei în programele de pe calculator.

Cele două metode rezolvă problema în două etape cu simplex primal şi dual:

- în prima etapă se rezolvă problema de programare liniară în numere întregi fără condiţia de integralitate a variabilelor;
- în etapa a doua se adaugă pe rând, în paşi distincţi, câte o nouă restricţie pentru fiecare variabilă de bază neîntreagă până se obţine soluţia optimă întreagă sau rezultă că problema nu are soluţii întregi.

Exemplul 3.7.

Să se rezolve problema de programare liniară în numere întregi

$$2.X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 4$$
$$4.X_1 - 3.X_2 + X_5 = 2$$
$$-3X_1 + 2.X_2 + X_3 + X_6 = 3$$
$$X_j \geq 0 , j = 1, 2, \ldots, 6 ;$$
$$X_j \in Z , j = 1, 2, \ldots, 6 ;$$
$$f = X_1 - 3.X_2 + 3.X_3$$
$$\max f$$

Se rezolvă cu programul QSB.
Soluţia optimă neîntreagă:
$\max f = z_0 = 14$,
$X_1 = 1/2$, $X_2 = 0$, $X_3 = 9/2$, $X_4 = 15/2$, $X_5 = 0$, $X_6 = 0$.

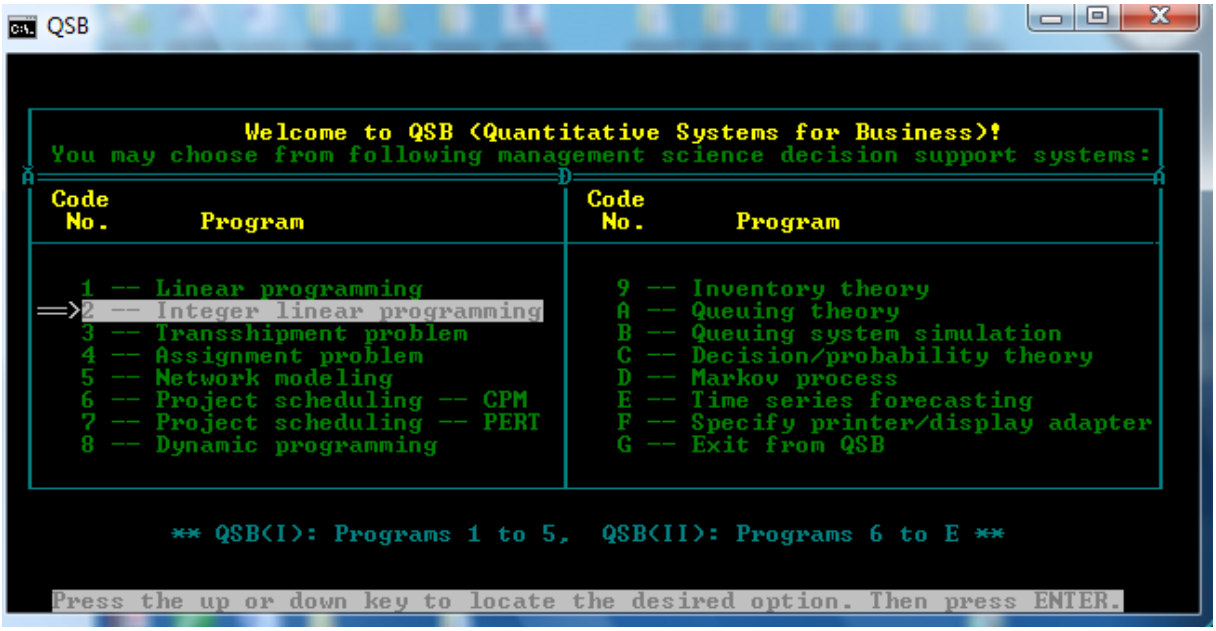
Soluţia optimă întreagă:
$\max f = z_0 = 11$, $X_1 = 2$, $X_2 = 2$, $X_3 = 5$, $X_4 = 3$, $X_5 = 0$, $X_6 = 0$.

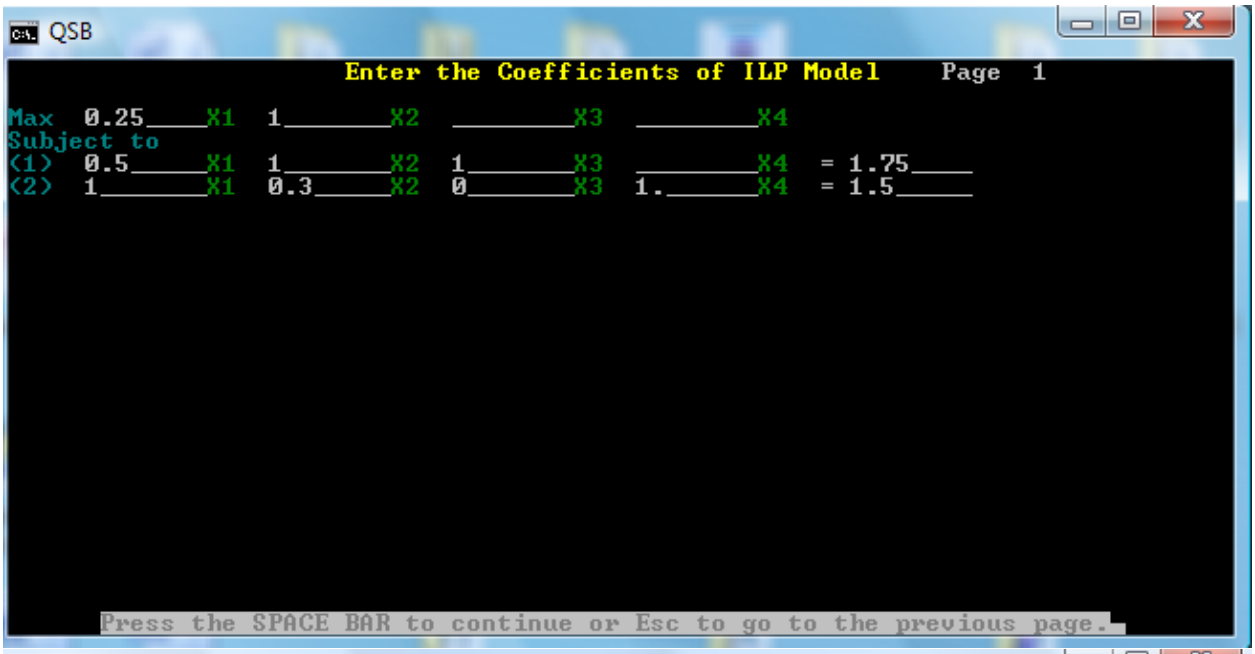
Exemplul 3.8.

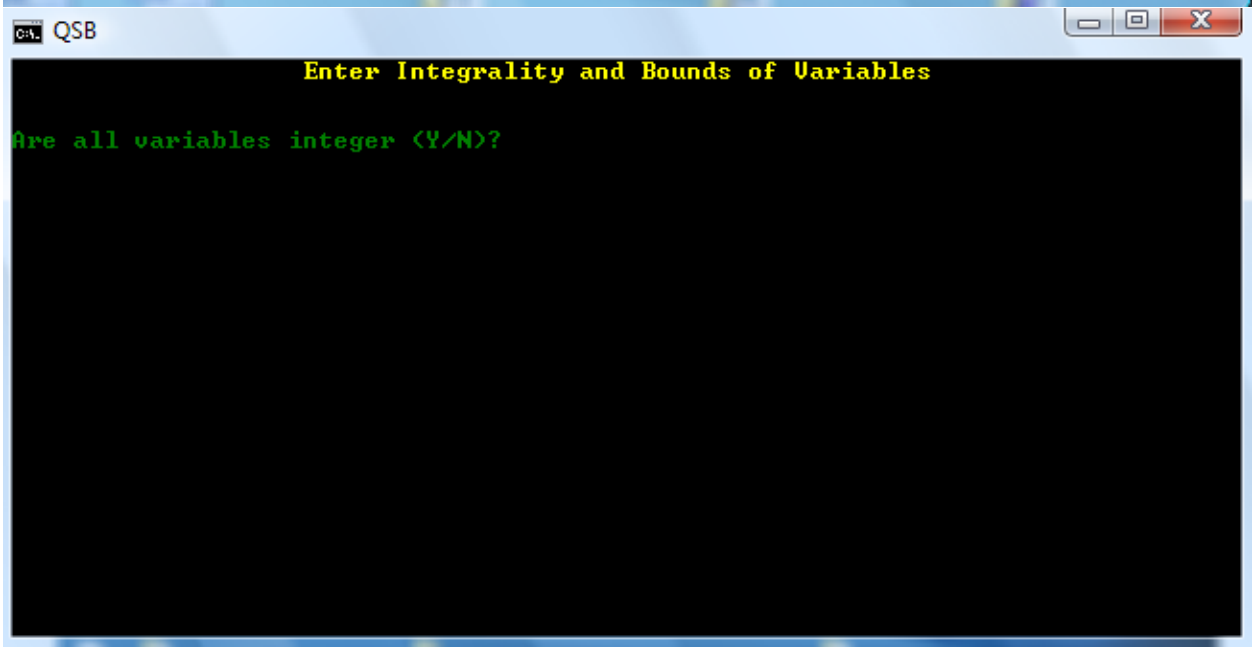
Să se rezolve problema de programare liniară mixtă :

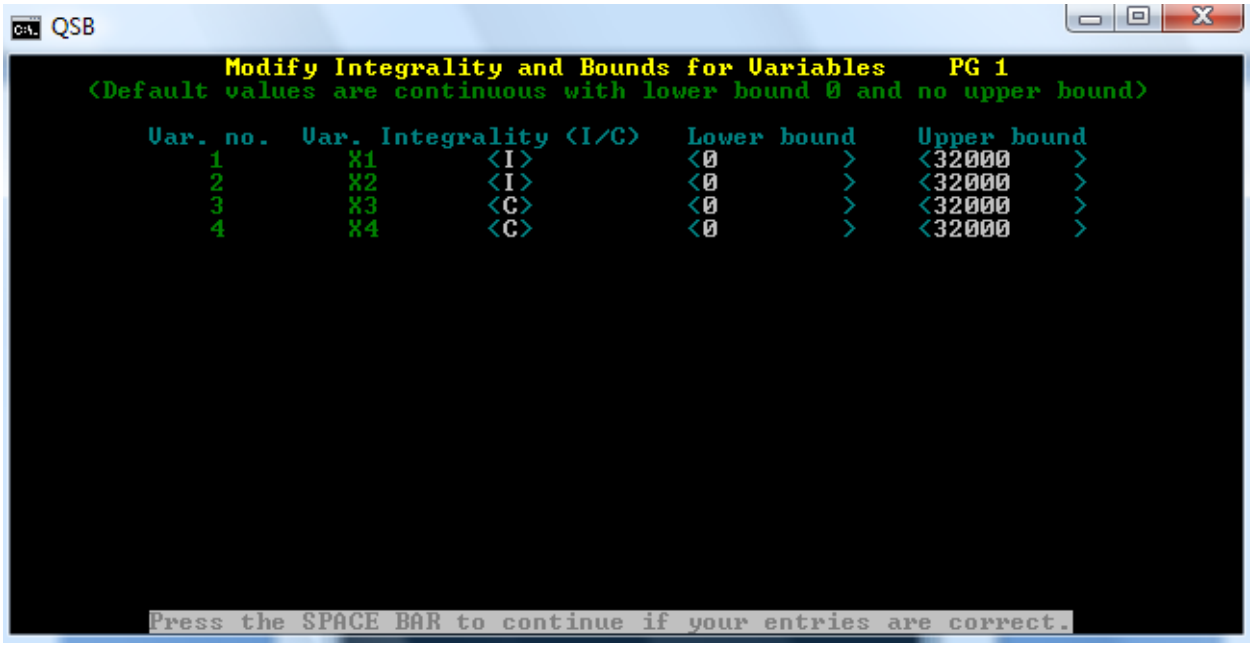
$$½ \ . X_1 + X_2 + X_3 = 7/4$$
$$X_1 + 3/10 \ .X_2 + X_4 = 3/2$$
$$X_i \geq 0 , i = 1, 2, 3, 4$$
$$X_1 , X_2 \in Z$$
$$f = ¼ \ . X_1 + X_2$$
$$\max f$$

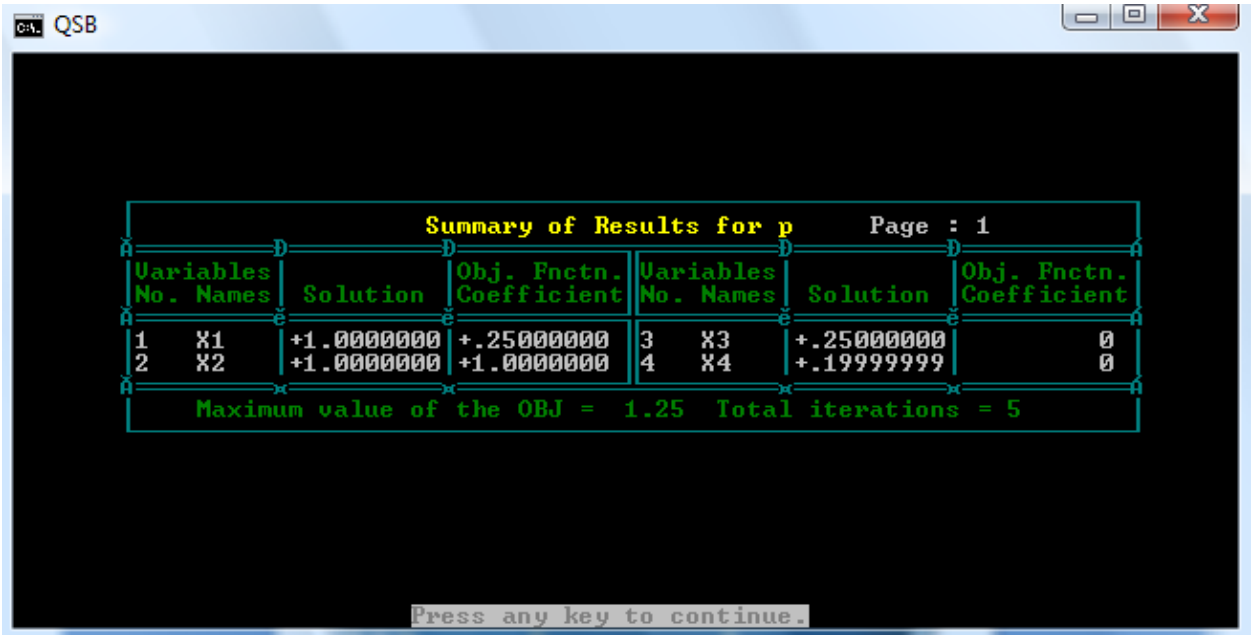
Se va rezolva cu programul Qsb.
Se va rezolva problema de programare liniară fără restricţia de integralitate.
Soluţia optimă neîntreagă: $\max f = 7/4$, $X_1 = 0$, $X_2 = 7/4$, $X_3 = 0$, $X_4 = 39/40$;
Soluţia optimă a problemei de programare liniară mixtă este:
$\max f = 5/4$, $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = ¼$, $X_4 = 1/5$.
Ecrane Qsb pentru exemplul 3.8.


QSB
Welcome to QSB (Quantitative Systems for Business)!
You may choose from following management science decision support systems:
Code No. Program
Code No. Program
1 -- Linear programming
2 -- Integer linear programming
3 -- Transshipment problem
4 -- Assignment problem
5 -- Network modeling
6 -- Project scheduling -- CPM
7 -- Project scheduling -- PERT
8 -- Dynamic programming
9 -- Inventory theory
A -- Queuing theory
B -- Queuing system simulation
C -- Decision/probability theory
D -- Markov process
E -- Time series forecasting
F -- Specify printer/display adapter
G -- Exit from QSB
** QSB(I): Programs 1 to 5, QSB(II): Programs 6 to E **
Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.


QSB
Enter the Coefficients of ILP Model Page 1
Max 0.25 X1 1 X2 X3 X4
Subject to
(1) 0.5 X1 1 X2 1 X3 X4 = 1.75
(2) 1 X1 0.3 X2 0 X3 1. X4 = 1.5
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.


QSB
Enter Integrality and Bounds of Variables
Are all variables integer (Y/N)?





3. 6. PROGRAMAREA LINIARĂ PARAMETRICĂ

Se consideră problema de programare liniară (3.67) la forma standard, problemă de maximizare.

$$A \cdot X = b$$
$$X \geq 0 \qquad (3.67)$$
$$f(X) = c \cdot X$$
$$\max f(X)$$

unde:

$A = (a_{ij}) , i = 1, 2, \ldots , m ; j = 1, 2, \ldots , n;$

$rang (A) = m < n .$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \; c = (c_1 \;, \; c_2 \;, \; \ldots \; c_n)$$

Problema de programare liniară în care matricea A sau vectorii b, c sunt funcţii de unul sau mai mulţi parametri reali, reprezintă o problemă de programare liniară parametrică. Se vor prezenta modelele matematice pentru cazurile când vectorii b şi c depind liniar de un parametru real t. Disponibilul de resurse dat de vectorul b sau profitul (preţul) unitar dat de vectorul c pot să varieze în timp după o funcţie liniară.

1. Parametrizarea vectorului b

Fie problema de programare liniară parametrică sub formă matricială (3.68) obţinută din (3.67) prin înlocuirea vectorului b cu o funcţie liniară de parametrul real t sau dezvoltat în (3.69):

$$\begin{aligned} &A \cdot X = b(t) \\ &X \geq 0 \\ &f(X) = c \cdot X \\ &\max f(X) \end{aligned} \qquad (3.68)$$

unde:

$$b(t) = b^0 + t \cdot b^1$$

$$b^0 = \begin{pmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \\ \vdots \\ b_m^0 \end{pmatrix}, \; b^1 = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ \vdots \\ b_m^1 \end{pmatrix}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1^0 & + & t. & b_1^1 \\ b_2^0 & + & t. & b_2^1 \\ & \ldots & & \\ b_m^0 & + & t. & b_m^1 \end{pmatrix},$$

$t \in I \subseteq R$, I este un interval ,
sau dacă se dezvoltă rezultă (3.69).

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j = b_i^0 \quad + \quad t. \quad b_i^1 \;, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ &X_j \geq 0 \qquad , j = 1, 2, \ldots, n \\ &\qquad f = \sum_{j=1}^{n} c_j.X_j \\ &\max f \\ &t \in I \subseteq R \text{ , I este un interval ,} \end{aligned} \qquad (3.69)$$

2. Parametrizarea vectorului c

Fie problema de programare liniară parametrică sub formă matricială (3.70) obţinută din (3.67) prin înlocuirea vectorului c cu o funcţie liniară de parametrul real t sau dezvoltat în (3.71):

$$\begin{aligned} &A \cdot X = b \\ &X \geq 0 \qquad (3.70) \\ &f(X) = c(t) \cdot X \\ &\max f(X) \\ &t \in I \subseteq R \text{ , I este un interval ,} \end{aligned}$$

unde:

$$\begin{aligned} &c(t) = c^0 + t \cdot c^1 \\ &c^0 = (c^0_1 , c^0_2 , \dots , c^0_n) \\ &c^1 = (c^1_1 , c^1_2 , \dots , c^1_n) \\ &c(t) = (c^0_1 + t \cdot c^1_1 , \; c^0_2 + t \cdot c^1_2 , \dots , c^0_n + t \cdot c^1_n) \end{aligned}$$

sau dacă se dezvoltă rezultă (3.71).

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . X_j = b_i \qquad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\ &X_j \geq 0 \qquad , \quad j = 1, 2, \dots, n \qquad (3.71) \\ &f = \sum_{j=1}^{n} (c_j^0 + t . c_j^1) . X_j \\ &\max f \\ &t \in I \subseteq R \text{ , I este un interval} \end{aligned}$$

Rezolvarea problemelor de programare parametrică se face pentru t = 0 cu algoritmul simplex primal sau dual sau cu un program pe calculator, apoi se rezolvă şi discută după valorile parametrului t.

Metode matematice de modelare a fluxurilor materiale – C8

5. PROGRAMAREA LINIARĂ MULTIOBIECTIV

5.1. Concepte de bază

Modelul matematic al problemei de programare liniară multiobiectiv, numită şi problemă de decizie multiobiectiv, este dat de o mulţime de restricţii (inegalităţi, egalităţi) pentru n variabile X_1, X_2, . . ., X_n care pot reprezenta, în general, cantităţile care se vor fabrica din n produse într-un sistem de producţie (atelier, secţie, întreprindere) în care m resurse (materii prime, energie, utilaje, resurse umane) sunt limitate la b_i , i = 1, 2, ..., m, consumul specific este a_{ij} , o funcţie vectorială f(X) ale cărei componente trebuie maximizate sau minimizate.

Modelul matematic al problemei de programare liniară multiobiectiv este dat de relaţiile (5.1). Deciziile din procesele de decizie multicriteriale cu un număr infinit de soluţii posibile (variante) se numesc **decizii multiobiectiv.**

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_{ij}} \,.\, \mathbf{X_j} \;\leq\; \mathbf{b_i}\,,\; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\mathbf{X_j} \;\geq\; \mathbf{0}\,,\; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \mathbf{(5.1)}$$

$$\mathbf{f_k(\, X_1\,, X_2, \ldots, X_n\,)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_{kj}} \,.\, \mathbf{X_j} \quad , k = 1, 2, ..., p;$$

$$\mathbf{optimum\ f_k(\, X_1\,, X_2, \ldots, X_n\,)} \quad , k = 1, 2, ..., p;$$

unde:

a_{ij} - este consumul din resursa R_i disponibilă în cantitatea b_i , $b_i \geq 0$, care intră în unitatea de produs P_j , $a_{ij} \geq 0$, i = 1, 2, ..., m ; j = 1, 2, ..., n;

optimum $\in$**{max, min},** deci, o parte din componentele lui f(X) se maximizează, iar altă parte se minimizează. Restricţiile pot cuprinde relaţiile $\leq$ **,** $\geq$ sau = , care se pot aduce toate la utilizarea relaţiei $\leq$ **.**

Sunt mai multe posibilităţi de rezolvare a problemei de programare liniară multiobiectiv. În general o soluţie optimă pentru problema de programare liniară cu o singură funcţie obiectiv din cele p funcţii ale modelului (5.1) nu este optimă şi pentru celelalte funcţii obiectiv ale funcţiei vectoriale f(X) , ea poate fi foarte nefavorabilă.

Modelul (5.1) se mai poate scrie matriceal prin relaţiile (5.2):

$$\mathbf{A \,.\, X} \;\leq\; \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \;\geq\; \mathbf{0} \qquad \mathbf{(5.2)}$$

$$\mathbf{f(\, X) = C \,.\, X}$$

$$\mathbf{optimum\ f(X)}$$

unde:

$\mathbf{A = (\, a_{ij}\,)}$, i = 1, 2, ..., m; ; j = 1, 2, ..., n;

$\mathbf{C = (\, c_{kj}\,)}$, k = 1, 2, ..., p; j = 1, 2, ..., n;

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_n \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \quad , \; f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \ldots \\ f_p(X) \end{pmatrix} \quad ;$$

optimum $\in$**{max, min};**

$$f_k(X) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} . X_j \quad \text{, k = 1, 2, ..., p.}$$

Rezolvarea problemei de programare liniară multiobiectiv se poate face prin algoritmii: STEP, POP, prin maximizarea utilităţii globale, teoria jocurilor, metoda lexicografică etc.

Deoarece

$$\min f_k(X) = - \max (- f_k(X)),$$

se poate presupune, fără a reduce din generalitatea problemei, că toate componentele funcţiei vectoriale f(X) se maximizează.

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_{ij}} \,.\, \mathbf{X_j} \;\le\; \mathbf{b_i}\,,\; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\mathbf{X_j} \;\ge\; \mathbf{0}\,,\; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(5. 3)}$$

$$\mathbf{f_k(\,X_1\,, X_2, \ldots, X_n\,)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_{kj}} \,.\, \mathbf{X_j} \;,\; k = 1, 2, ..., p;$$

$$\mathbf{max\ f_k(\,X_1\,, X_2, \ldots, X_n\,)} \;,\; k = 1, 2, ..., p;$$

Componentele funcţiei vectoriale f(X) pot avea ca şi semnificaţii economice concrete:

- profitul, care se va maximiza;
- cifra de afaceri, care se va maximiza;
- costurile de producţie, care se vor minimiza;
- timpul de nefolosire a utilajelor, care se va minimiza;
- productivitatea muncii, care se va maximiza;
- fondurile circulante, care trebuie minimizate.

Evident , fiecare $f_k(X)$, componentă a lui f(X), poate avea şi alte semnificaţii concrete.

În general, o soluţie optimă pentru problema de programare liniară cu o singura funcţie obiectiv $f_k(X)$ din cele p ale lui f(X) , nu este optimă şi pentru celelalte (p - 1) funcţii obiectiv, componente ale funcţiei vectoriale f(X), ele pot să fie conflictuale şi foarte nefavorabile.

Spaţiul vectorial R^p nu este total ordonat, deci este dificil de găsit un punct din domeniul soluţiilor posibile care să optimizeze simultan ansamblul celor p funcţii obiectiv. Pentru modelele multiobiectiv date de relaţiile (5.1) şi (5.2) nu există, în general, o soluţie optimă care să optimizeze simultan toate cele p funcţii obiectiv. Noţiunea de soluţie optimă se înlocuieşte în acest caz cu noţiunea de "cea mai bună" din punctul de vedere al ansamblului funcţiilor obiectiv componente ale lui f(X). Noţiunea de "cea mai bună soluţie" este ambiguă, dar există diverse noţiuni echivalente, cum ar fi: soluţie Pareto-optimală, soluţie nondominată, soluţie eficientă, care reprezintă de fapt o soluţie posibilă care realizează cel mai bun compromis în rezolvarea modelelor date de relaţiile (5.1) şi (5.2).

O soluţie nondominată a modelului (5.1) sau (5.2) este o soluţie posibilă pentru care nu există nici o altă soluţie posibilă care să îmbunătăţească o funcţie obiectiv componentă a funcţiei vectoriale obiectiv f(X), fără să deterioreze cel puţin o altă funcţie obiectiv componentă.
Se notează cu S_p mulţimea soluţiilor posibile ale problemei multiobiectiv dată de relaţiile (5.2).

$$\mathbf{S_p = \{\, X \;\mid\; X \in R^n\colon\ A \,.\, X \;\le\; b \;,\; X \;\ge\; 0\,\}} \qquad \textbf{(5.4)}$$

Soluţia nondominată X* este o soluţie posibilă, $X^* \in S_p$, dacă nu există nici o altă soluţie posibilă $X \in S_p$, în aşa fel ca:

$$\mathbf{f_k(X^*) \le f_k(X)}$$

pentru orice k = 1, 2, . . . p, ştiind că pentru cel puţin un indice k este adevărată inegalitatea strictă:

$$\mathbf{f_k(X^*) \;<\; f_k(X)}$$

Se notează cu S_n mulţimea soluţiilor nondominate, $S_n \subset S_p$.

Teorema 5.1.

O soluţie optimă a modelului liniar cu o funcţie obiectiv (5.5) este soluţie nondominată a modelului multiobiectiv (5.1), respectiv (5.2).

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_{ij}} \,.\, \mathbf{X_j} \;\leq\; \mathbf{b_i}\,,\; i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\mathbf{X_j} \;\geq\; \mathbf{0}\,,\; j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(5.5)}$$

$$\mathbf{f_k(\, X_1\,, X_2, \ldots, X_n\,)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_{kj}} \,.\, \mathbf{X_j} \quad ,$$

$$\mathbf{max\ f_k(\, X_1\,, X_2, \ldots, X_n\,)}$$

Teorema 5. 2.

Mulţimea soluţiilor nondominate ale modelului liniar multiobiectiv dat de relaţiile (5.2) este o mulţime convexă.

O soluţie preferată este o soluţie nondominată, aleasă de către decident pe baza unor informaţii adiţionale.
Se notează cu S_{pr} mulţimea soluţiilor preferate, existând incluziunea:

$$S_{pr} \subset S_n \subset S_p\,.$$

Pentru a se determina soluţia preferată din mulţimea soluţiilor nondominate S_n sunt necesare informaţii suplimentare din partea decidentului în ceea ce priveşte preferinţele sale.

5.2. Metode multiobiectiv

Soluţiile nondominate se pot afla prin diverse metode, din care vom prezenta metoda ponderilor şi metoda ε - restrictivă.

1) <u>Metoda ponderilor (parametrică)</u> constă în construirea unui model liniar cu o singură funcţie obiectiv dat de relaţiile (5.6), din modelele multiobiectiv (5.1), respectiv (5.2), cu ajutorul unor ponderi w_k :

$$\mathbf{A\,.\,X} \;\leq\; \mathbf{b}$$

$$\mathbf{X} \;\geq\; \mathbf{0}$$

$$F(X) = \sum_{k=1}^{p} w_k \,.\, f_k(X) = \sum_{k=1}^{p} w_k \,.\, \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \,.\, X_j \qquad \textbf{(5.6)}$$

$$\mathbf{max\ F(X)}$$

$$\mathbf{w_k} \;\geq\; \mathbf{0}\,,\; k = 1, 2, \ldots, p;$$

Prin variaţia parametrică a ponderilor se obţine mulţimea soluţiilor nondominate ale modelului liniar multiobiectiv dat de relaţiile (5.1), respectiv (5.2).
Ponderile w_k , k = 1, 2, . . . , p nu reflectă importanţa relativă a obiectivelor , dar pot fi interpretate şi ca valoarea relativă a obiectivului $f_k(X)$ şi în acest caz soluţia problemei date de relaţiile (5.5) prin algoritmul simplex primal sau simplex dual (dacă variabilele sunt întregi,

algoritmul lui Gomory), respectiv prin utilizarea programelor QSB, DSSPOM, LINDO sau altele, este echivalentă cu soluţia preferată.

2) Metoda ε - restrictivă

Se transformă problema multiobiectiv (5.1) într-o problemă de programare liniară cu un singur obiectiv şi pentru toate funcţiile obiectiv se specifică limite minime :

$$\begin{aligned} &\mathbf{A \cdot X \le b} \\ &\mathbf{f_k(X) \ge \varepsilon_k}\ , \ k = 1, 2, ..., l - 1, l + 1,..., p\ ; \\ &\mathbf{X \ge 0} \\ &\mathbf{\max f_l(X)} \end{aligned} \qquad \textbf{(5.7)}$$

Funcţia $f_l(X)$ se alege arbitrar.

I. Se va prezenta o metodă de determinare a soluţiilor nondominate **fără informaţie suplimentară,** metoda criteriului global.

Metoda criteriului global transformă modelul multiobiectiv (5.2) într-un model cu o funcţie obiectiv sinteză, definită cu ajutorul celor p funcţii obiectiv iniţiale.

Sunt posibile două variante :

I.1. Se construieşte o funcţie obiectiv sinteză

$$\mathbf{F(X) = \min \{ f_1(X), f_2(X), \ldots, f_p(X) \}}$$

şi se rezolvă problema de programare liniară cu o funcţie obiectiv (5.8) cu algoritmul simplex primal sau simplex dual (algoritmul lui Gomory, dacă variabilele sunt întregi), respectiv prin utilizarea programelor QSB, DSSPOM, LINDO sau altele;

$$\begin{aligned} &\mathbf{A \cdot X \le b} \\ &\mathbf{X \ge 0} \\ &\mathbf{\max F(X)} \end{aligned} \qquad \textbf{(5.8)}$$

I. 2. Se rezolvă p probleme de programare liniară cu o funcţie obiectiv date de (5.9), utilizând metoda simplex, respectiv prin utilizarea programelor QSB, DSSPOM, LINDO sau altele.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_{ij} \cdot X_j \le b_i}\ , \ i = 1, 2, \ldots, m; \\ &\mathbf{X_j \ge 0}\ , \ j = 1, 2, \ldots, n; \\ &\mathbf{f_k(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \cdot X_j} \\ &\mathbf{\max f_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)} \end{aligned} \qquad \textbf{(5.9)}$$

unde: $k = 1, 2, \ldots, p$;

apoi se construieşte funcţia obiectiv sinteză F(X):

,

unde X_k^* este soluţia optimă cu $f_k(X_k^*)$ valoare optimă a lui $f_k(X)$, iar F(X) reprezintă deviaţia obiectivelor $f_k(X)$ de la valoarea lor optimă şi trebuie minimizată în problema (5.10).

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_{ij} \cdot X_j \le b_i}\ , \ i = 1, 2, \ldots, m; \\ &\mathbf{X_j \ge 0}\ , \ j = 1, 2, \ldots, n; \\ &\mathbf{\min F(X)} \end{aligned} \qquad \textbf{(5.10)}$$

II. Dintre **metodele cu informaţie preferenţială dată apriori** se va prezenta **metoda maximizării utilităţii globale** pentru determinarea soluţiilor preferate.

Se consideră problema de programare liniară multiobiectiv (5.11).

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\,.\mathbf{X} \le \mathbf{b} \\ &\mathbf{X} \ge \mathbf{0} \\ &\mathbf{f(X) = C\,.\,X} \\ &\textbf{optimum } \mathbf{f(X)} \end{aligned} \qquad \textbf{(5.11)}$$

unde: $\mathbf{A = (a_{ij})}$, $\mathbf{C = (c_{kj})}$, k = 1, 2, ..., p; j = 1, 2, ..., n;

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad , \quad f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \dots \\ f_p(X) \end{pmatrix},$$

optimum $\in$**{max, min},**

$$f_k(X) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}.X_j \quad , \quad k = 1, 2, ..., p.$$

Metoda constă în înlocuirea funcţiilor obiectiv cu semnificaţie economică concretă, cu funcţii utilitate în sensul von Neumann-Morgestern, care pot fi însumate dacă obiectivele sunt independente, obţinându-se prin însumare o funcţie sinteză.

Algoritmul.

Etapa 1.

Pentru fiecare funcţie obiectiv $f_k(X)$ se determină soluţia optimă a problemei de programare liniară (5.12) cu o funcţie obiectiv.

- pentru max $f_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$ în f(X):

$$\begin{aligned} &\mathbf{A\,.\,X} \le \mathbf{b} \\ &\mathbf{X_j} \ge \mathbf{0}\,,\ j = 1, 2, \dots, n; \\ &\mathbf{f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\,.\,X_j} \\ &\mathbf{\max f_k(X_1, X_2, \dots, X_n)} \end{aligned} \qquad \textbf{(5.12)}$$

- pentru min $f_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$ în f(X):

$$\begin{aligned} &\mathbf{A\,.\,X} \le \mathbf{b} \\ &\mathbf{X_j} \ge \mathbf{0}\,,\ j = 1, 2, \dots, n; \\ &\mathbf{f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\,.\,X_j} \\ &\mathbf{\min f_k(X_1, X_2, \dots, X_n)} \end{aligned}$$

k = 1, 2, ..., p.

Se obţine valoarea optimă X^{*k} care maximizează pe $f_k(X)$, dacă se cere în problema dată de relaţiile (5.11) maximizarea sa (sau care minimizează pe $f_k(X)$ dacă în (5.11) se cere min $f_k(X)$), k = 1, 2,... , p, aplicând algoritmul simplex primal sau simplex dual (sau Gomory , pentru numere întregi) respectiv prin utilizarea programelor QSB, DSSPOM, LINDO sau altele.

Deci , se rezolvă p probleme de programare liniară cu algoritmul simplex primal sau dual (sau Gomory), respectiv prin utilizarea programelor QSB, DSSPOM, LINDO, QM sau altele.

Apoi, pentru fiecare funcţie obiectiv $f_k(X)$ se determină valoarea pesimă (cea mai puţin favorabilă, opusă valorii optime) X^{-k} care minimizează pe $f_k(X)$ dacă în (5.11) $f_k(X)$ trebuia maximizată (respectiv care maximizează pe $f_k(X)$, dacă în (5.11) $f_k(X)$ trebuia minimizată), deci încă p probleme de programare liniară cu câte o funcţie obiectiv.

De exemplu, dacă în (5.11) se cere max $f_1(X)$, atunci problema optimă este (5.13)

$$\begin{aligned} &\mathbf{A \,.\, X} \;\le\; \mathbf{b} \\ &\mathbf{X_j} \;\ge\; \mathbf{0}\text{ , } j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(5.13)} \\ &\mathbf{max\ f_1(X)} \end{aligned}$$

şi problema pesimă este (5.14).

$$\begin{aligned} &\mathbf{A \,.\, X} \;\le\; \mathbf{b} \\ &\mathbf{X_j} \;\ge\; \mathbf{0}\text{ , } j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(5.14)} \\ &\mathbf{min\ f_1(X)} \end{aligned}$$

Dacă se cere în (5.11) min $f_2(X)$, atunci problema optimă este (5.15)

$$\begin{aligned} &\mathbf{A \,.\, X} \;\le\; \mathbf{b} \\ &\mathbf{X_j} \;\ge\; \mathbf{0}\text{ , } j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(5.15)} \\ &\mathbf{min\ f_2(X)} \end{aligned}$$

şi problema sa pesimă este (5.16).

$$\begin{aligned} &\mathbf{A \,.\, X} \;\le\; \mathbf{b} \\ &\mathbf{X_j} \;\ge\; \mathbf{0}\text{ , } j = 1, 2, \ldots, n; \qquad \textbf{(5.16)} \\ &\mathbf{max\ f_2(X)} \end{aligned}$$

Fie: O_k = Optimum $f_k(X) = f_k(X^{*k})$

P_k = Pesim $f_k(X) = f_k(X^{-k})$, k = 1, 2, . . . , p;

Optimum { Max, Min} , Pesim {Min, Max} , Pesim = Non Optimum.

Etapa 2.

Pentru mulţimea tuturor valorilor optime sau pesime determinate se estimează utilităţile acestor valori (de către decident):

- valoarea optimă O_k are utilitatea U_k , k = 1, 2, ..., p ;
- valoarea pesimă P_k are utilitatea U_{p+k} , k = 1, 2, ..., p.

Cu cât o situaţie este mai convenabilă, cu atât utilitatea sa este mai mare, iar

$U_k > U_{p+k}$

, deoarece valorile optime O_k sunt preferate valorilor pesime (non optime) P_k , k= 1, 2, ..., p.

Etapa 3.

Se transformă funcţiile obiectiv $f_1(X)$, $f_2(X)$, . . . , $f_p(X)$ în funcţii utilitate $F_1(X)$, $F_2(X)$, . . . , $F_p(X)$:

$$\mathbf{F_k(X) = a_k \, . \, f_k(X) + b_k \, , \;\; X = X^{*k} \quad şi \quad X = X^{-k} \, ,}$$

se rezolvă p sisteme liniare de două necunoscute :

$$\mathbf{\alpha_k \, . \;\; O_k + \beta_k = U_k}$$
$$\mathbf{\alpha_k \, . \;\; P_k + \beta_k = U_{p+k}} \;\; , \; k = 1, 2, \ldots , p \; ;$$

se obţin α_k şi β_k . Atunci,

$$F_k(X) = \alpha_k \, . \;\; f_k(X) + \beta_k = \alpha_k \, . \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_{kj} \, . \, X_j} + \beta_k \;\; , \;\; k = 1, 2, \ldots , p;$$

Etapa 4.

Se construieşte funcţia obiectiv sinteză:

$$F(X) = \sum_{k=1}^{p} F_k(X) = \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k . \sum_{j=1}^{n} c_{kj} . X_j + \beta_k)$$

şi se rezolvă cu algoritmul simplex primal, dual sau utilizând programele QSB, DSSPOM , LINDO, QM sau altele, problema de programare liniară (5.17) cu o funcţie obiectiv F(X).

$$\mathbf{A \, . \, X \;\; \leq \;\; b}$$
$$\mathbf{X \geq \;\; 0} \qquad\qquad \mathbf{(5.17)}$$
$$\mathbf{max \; F \; (X)}$$

şi se obţine soluţia optimă de maximă utilitate X^* .

III. Metodele cu informaţii preferenţiale date progresiv (interactive)

Sunt caracterizate de trei etape de bază:

- determinarea mulţimii soluţiilor nondominate;
- aprecierea decidentului asupra uneia din soluţiile nondominate obţinute;
- folosirea aprecierii decidentului pentru formularea unei noi mulţimi de parametri, elaborând o nouă problemă pentru a fi rezolvată.

Cele trei etape de mai sus se repetă până când decidentul este satisfăcut cu soluţia obţinută şi nu mai este posibilă o îmbunătăţire a sa.

Această familie de metode cuprinde metodele: STEP, POP, Steuer, SWT etc.

Abordarea mixtă a metodelor multiobiectiv cu metodele multiatribut

Modelele de decizie multiobiectiv pot fi **abordate mixt**, adică prin combinarea metodelor multiobiectiv cu metodele multiatribut.

Astfel, metoda mixtă cuprinde etapele:

1. etapa multiobiectiv:

se determină soluţiile nondominate X^1 , X^2 , ..., X^p pentru problema multiobiectiv (5.1), rezolvând p probleme de programe liniară monoobiectiv obţinute din (5.1);

2. etapa multiatribut:

alegerea între soluţiile nondominate: X^1 , X^2 , ..., X^p a soluţiei care constituie cel mai bun compromis între criterii; se consideră că X^1 , X^2 , ..., X^p sunt p variante, iar f_1 , f_2 , ..., f_p sunt p criterii şi se calculează matricea B.

$$B = (f_k (X^i)) , i, k = 1, 2, ...,p,$$

Se normalizează matricea B, apoi se utilizează un algoritm multiatribut; se poate considera alături de cele p soluţii nondominate şi o nouă soluţie X^{p+1} (sau mai multe) care este combinaţie convexă a celor p soluţii;

3. etapa multiobiectiv: determinarea soluţiei X^* care satisface ansamblul celor p funcţii obiectiv, utilizând ierarhia soluţiilor nondominate de la punctul 2.

Exemplul 5.1.

Se reia multicriterial, cu două funcţii obiectiv, exemplul nr. 3.6. Se va rezolva cu metoda ε - restrictivă.

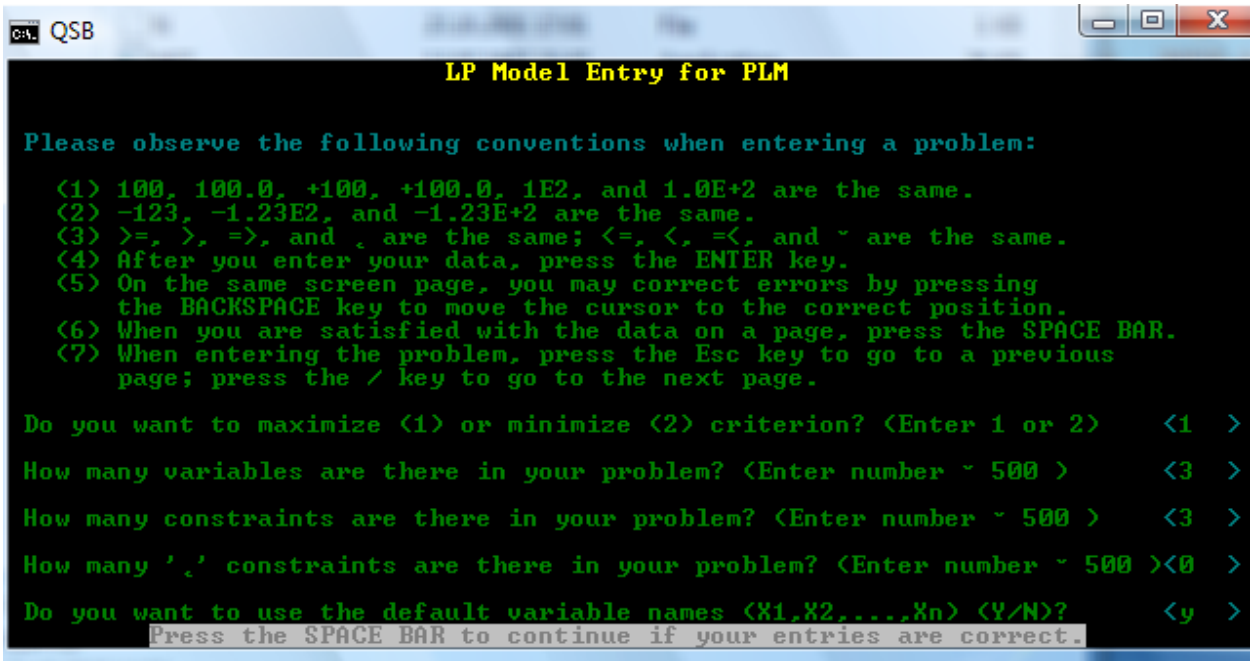
$$\mathbf{X_1 + 2 . X_2 + 3 . X_3 \le 120}$$
$$\mathbf{2 . X_1 + 2 . X_2 + X_3 \le 80}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 . X_2 + X_3 \le 70}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0 ,}\ j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f_1(X_1 , X_2 , X_3) = 60 . X_1 + 80 . X_2 + 100 . X_3}$$
$$\mathbf{f_2(X_1 , X_2 , X_3) = X_2}$$
$$\mathbf{\max f_1(X_1 , X_2 , X_3)}$$
$$\mathbf{\max f_2(X_1 , X_2 , X_3)}$$

Se rezolvă cu programul Qsb două probleme de programare liniară: prima cu funcţia obiectiv f_1 , iar a doua cu funcţia obiectiv f_2 .

1.

$$\mathbf{X_1 + 2 . X_2 + 3 . X_3 \le 120}$$
$$\mathbf{2 . X_1 + 2 . X_2 + X_3 \le 80}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 . X_2 + X_3 \le 70}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0 ,}\ j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f_1(X_1 , X_2 , X_3) = 60 . X_1 + 80 . X_2 + 100 . X_3}$$
$$\mathbf{\max f_1(X_1 , X_2 , X_3)}$$

Se obţine soluţia optimă: $X_1 = 24$, $X_2 = 0$, $X_3 = 32$, max $f_1 = 4640$,
se calculează $f_2(24, 0, 32) = 0$.



2.

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 120$$
$$2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 80$$
$$X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70$$
$$X_j \geq 0, \; j = 1, 2, 3;$$
$$f_2(X_1, X_2, X_3) = X_2$$
$$\max f_2(X_1, X_2, X_3)$$

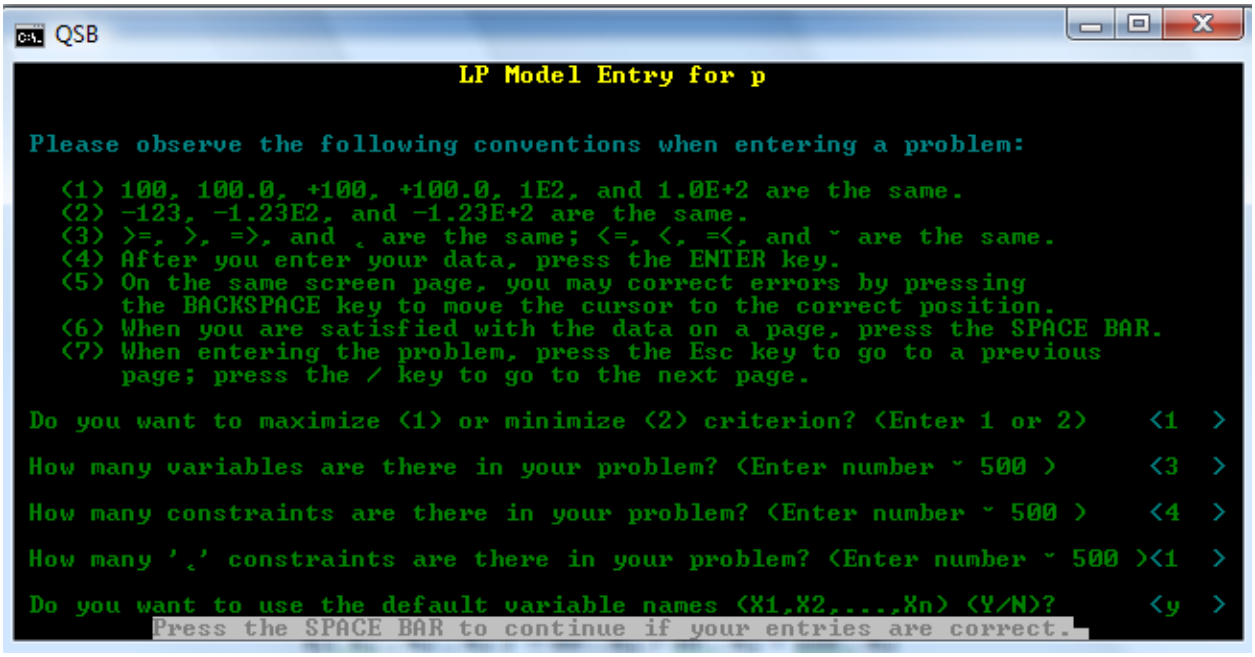
Se obține soluția optimă: $X_1 = 0$, $X_2 = 35$, $X_3 = 0$, max $f_2 = 35$, se calculează $f_1(0, 35, 0) = 80 \cdot 35 = 2800$.

3.

Se alege $\varepsilon_1 = 0.9 \cdot \max f_1(X_1, X_2, X_3) = 0.9 \cdot 4640 = 4176$

$$X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 120$$
$$2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 80$$
$$X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \leq 70$$
$$60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3 \geq 4176$$
$$X_j \geq 0, \; j = 1, 2, 3;$$
$$f_2(X_1, X_2, X_3) = X_2$$
$$\max f_2(X_1, X_2, X_3)$$

Se obține soluția optimă: $X_1 = 0$, $X_2 = 23.53$, $X_3 = 22.93$, max $f_2 = 23.53$, se calculează $f_1(0, 23.53, 22.93) = 4175.4$



4.

Se alege $\varepsilon_2 = 0.9 \cdot \max f_2(X_1, X_2, X_3) = 0.9 \cdot 35 = 31.5$

$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 120}$$
$$\mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 80}$$
$$\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70}$$
$$\mathbf{X_2 \ge \varepsilon_2 = 31.5}$$
$$\mathbf{X_j \ge 0}, \; j = 1, 2, 3;$$
$$\mathbf{f_1(X_1, X_2, X_3) = 60 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2 + 100 \cdot X_3}$$
$$\mathbf{\max f_1(X_1, X_2, X_3)}$$

Se obţine soluţia optimă: $X_1 = 0$, $X_2 = 31.5$, $X_3 = 7$, $\max f_1 = 3220$
se calculează $f_2(0, 31.5, 7) = 31.5$
Se poate continua cu alte valori pentru ε_1 din vecinătatea lui $\max f_1(X_1, X_2, X_3)$, respectiv pentru ε_2 din vecinătatea lui $\max f_2(X_1, X_2, X_3)$. Se va alege varianta dorită de decident.

6. Programarea liniară stochastică

Se va prezenta o extensie a modelelor deterministe, considerând modele stochastice în alocarea resurselor. O critică adusă modelării deterministe este aceea că anumiţi coeficienţi (parametri, variabile) trebuie priviţi ca variabile aleatoare. Modelele matematice deterministe nu aproximează întotdeauna suficient de bine realitatea obiectivă şi nici activităţile de management care au un caracter dinamic. În relaţiile de la modelele precedente (problema maximizării profitului) se vor considera mai multi vectori b şi c cu probabilităţi corespunzatoare şi analog mai multe consumuri specifice date de matrici A cu anumite probabilităţi. Deci, se va considera că A, b, c sunt matrici aleatoare şi se vor nota: $A(w)$, $b(w)$, $c(w)$, iar elementele lor sunt variabile aleatoare definite pe câmpul de probabilitate $\{W, K, P\}$, obţinându-se modelul dat de relaţiile (6.1).

$$\mathbf{A(w) \cdot X \le b(w)}$$
$$\mathbf{X \ge 0} \qquad \mathbf{(6.1)}$$
$$\mathbf{f(X) = c(w) \cdot X, \; w \in W}$$

max f(X)

unde

şi aceasta este o problemă de programare liniară stochastică.

Se pune problema găsirii funcţiei de repartiţie a valorii optime a lui f(X).

Vom avea:

$$\mathbf{f(w) = f(A(w), b(w), c(w)) .} \qquad \mathbf{(6.2)}$$

Funcţia f(X) poate reprezinta profitul şi se doreşte să se ştie probabilitatea p cu care profitul f(X) ia o anumită valoare v, iar probabilitatea 1 – p reprezintă riscul ca profitul să nu ia acea valoare v. Cauzele riscului ca profitul să nu ia valoarea v sunt:

- consumurile de resurse sunt prea mari, fiind date de matricea A;
- resursele disponibile sunt în cantitate prea mică, fiind exprimate de vectorul b;
- profitul unitar al fiecărui produs este prea mic, iar această informaţie este dată de vectorul c.

Se consideră repartiţiile variabilelor aleatoare discrete independente A, b, c :

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \dots & A^q \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1q} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{(6.3)}$$

$$\sum_{k=1}^{q} p_{1k} = 1 \ , \ p_{1k} \in [\,0\ ,\ 1\,]$$

unde:

$A^k = (a_{ij}^k)$,

a_{ij}^k - este consumul specific din resursa R_i realizabil cu probabilitatea p_{1k} ,

k = 1, 2, . . . , q; i = 1, 2 , . . . , m; j = 1, 2, . . . , n.

$$b = \begin{pmatrix} b^1 & b^2 & \dots & b^r \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2r} \end{pmatrix} \ , \ b^k = \begin{pmatrix} b_1^k \\ b_2^k \\ \dots \\ b_m^k \end{pmatrix} \ , \ k = 1,2,...,r; \qquad \mathbf{(6.4)}$$

$$\sum_{k=1}^{r} p_{2k} = 1 \ , \ p_{2k} \in [0\ ,\ 1]$$

şi b_i^k reprezintă disponibilul din resursa R_i care este posibil cu probabilitatea p_{2k} ,

i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . , r.

$$c = \begin{pmatrix} c^1 & c^2 & \dots & c^s \\ p_{31} & p_{32} & \dots & p_{3s} \end{pmatrix} \ , \qquad \mathbf{(6.5)}$$

$$c^k = (c_1^k , c_2^k , \dots , c_n^k) \ , \ k = 1, 2,...,s$$

$$\sum_{k=1}^{s} p_{3k} = 1 \ , \quad p_{3k} \in [0\ ,\ 1]$$

c_j^k - reprezintă profitul unitar al produsului P_j posibil cu probalitatea p_{3k} ,

j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2 , . . . , s.

Evident că avem condiţiile:

$a_{ij}^k \ge 0$, $b_i^h \ge 0$, $c_j^l \ge 0$,

i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . ,q; h = 1, 2, . . . , r; l = 1, 2,. . . , s .

Tripletul (A, b, c) = (A(w), b(w), c(w)) poate lua q . r . s valori. Rezolvarea problemei de programare liniară stochastică dată de relaţiile (6.1), se reduce la rezolvarea

următoarelor probleme de programare liniară deterministe, date de (6.6), care se vor realiza cu probabilitatea P_{khl} :

$$\mathbf{A^k \cdot X \leq b^h}$$
$$\mathbf{X \geq 0}$$
$$\mathbf{f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = c^l \cdot X} \qquad \textbf{(6.6)}$$
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$$

unde:

$k = 1, 2, \ldots, q$; $h = 1, 2, \ldots, r$; $l = 1, 2, \ldots, s$.

Aceste relaţii dau q . r . s probleme (6.6), ce trebuie rezolvate, iar problemele sunt probleme de programare liniară determinstă realizabile cu probabilitatea P_{khl} , rezolvabile cu algoritmul simplex primal sau dual, respectiv cu programele QSB, DSSPOM, LINDO, Qm, AMPL, GAMS, ALLO, LPL, AIMMS sau alte programe.

Dacă modelul matematic dat de relaţiile (6.6) se referă la produse indivizibile (piese/repere), atunci trebuie adăugată condiţia (6.7), rezultând o problemă de programare liniară în numere întregi.

$$\mathbf{X_j \in Z}, \; j = 1, 2, ..., n. \qquad \textbf{(6.7)}$$

Se notează:

$$\mathbf{\max f(X) = \max f(A^k, b^h, c^l) = M_{khl}} \qquad \textbf{(6. 8)}$$

Probabilitatea ca f(X) sa ia valoarea $\mathbf{M_{khl}}$ este :

$$\mathbf{P(f(X) = M_{khl}) = P(A = A^k, b = b^h, c = c^l) = p_{1k} \cdot p_{2h} \cdot p_{3l} = P_{khl}},$$

$k = 1, 2, \ldots, q$; $h = 1, 2, \ldots, r$; $l = 1, 2, \ldots, s$.

Se poate scrie repartiţia profitului maxim (6.9).

$$\max f(a,b,c) = \begin{pmatrix} M_{111} & M_{112} & \ldots & M_{qrs} \\ p_{111} & p_{112} & \ldots & p_{qrs} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(6. 9)}$$

Riscul ca profitul f(X) sa nu ia valoarea M_{khl} este dat de probabilitatea $1 - p_{khl}$.

Funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X, în general, este:

F(x) = P(X < x) = probabilitatea evenimentului X < x , unde x este o anumită valoare curentă. Funcţia de repartiţie F(x) este o funcţie nedescrescatoare.

$$F(x) = \sum_{x_j < x} p_j = \sum_{x_j < x} P(X = x_j) \qquad \textbf{(6. 10)}$$

$P(\alpha \; X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Dacă funcţia obiectiv f(X) are altă semnificaţie concretă, de exemplu poate fi cifra de afaceri, se procedează analog.

<u>Aplicarea modelului elaborat pentru estimarea profitului în alocarea resurselor</u>, în condiţiile a trei piese / repere şi trei resurse. Se va scrie repartiţia şi funcţia de repartiţie a profitului maxim.

Cazul determinist are datele in tabelul nr.6.1.

Tabelul nr. 6.1.

R_i \ P_j	P_1	P_2	P_3	Resurse disponibile b_i
R_1	1	2	3	100
R_2	2	2	1	70
R_3	1	2	1	60
Profitul unitar c_j	30	40	50	

Se consideră q = 2, r = 2 , s = 3 în modelul problemei de programare liniară stochastică, deci sunt două matrici A (consumul specific), doi vectori b (resurse disponibile) şi trei vectori c (profitul unitar), fiecare cu probabilităţile corespunzătoare.

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b^1 & b^2 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1.1 & 2.2 & 3.3 \\ 2.2 & 2.2 & 1.1 \\ 1.1 & 2.2 & 1.1 \end{pmatrix},\ b^1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix},\ b^2 = \begin{pmatrix} 125 \\ 100 \\ 90 \end{pmatrix}$$

c^1 = (30, 40, 50) , c^2 = (40, 50, 60) , $\mathbf{c^3}$ = (55, 60, 80)

Se rezolvă cu programul QSB , modulul Integer linear programming,
q . r . s = 2 . 2 . 3 = 12 probleme de programare liniară în numere întregi, date de (6. 11), realizabile cu anumite probabilităţi ce se vor calcula.

$$\mathbf{A^k \cdot X \ \le \ b^h}$$

$$\mathbf{X \ge 0} \qquad \textbf{(6. 11)}$$

$$\mathbf{X_j \in Z}\ ,\ j = 1, 2, 3$$

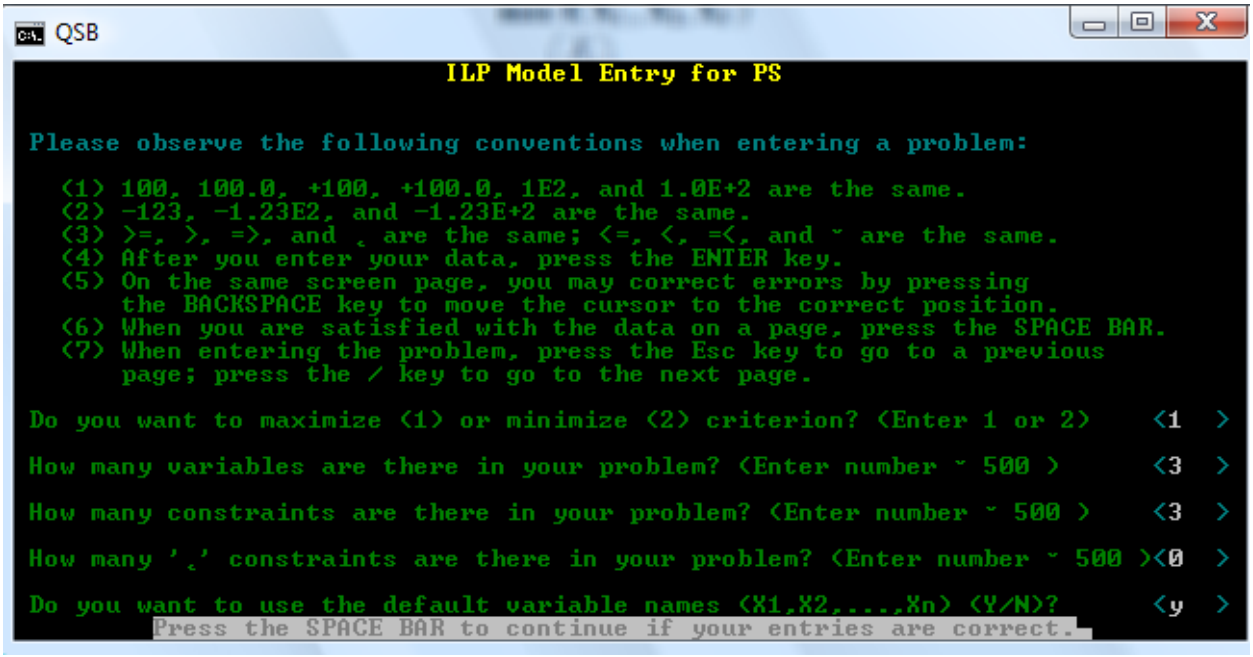
$$\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = c^l \cdot X}$$

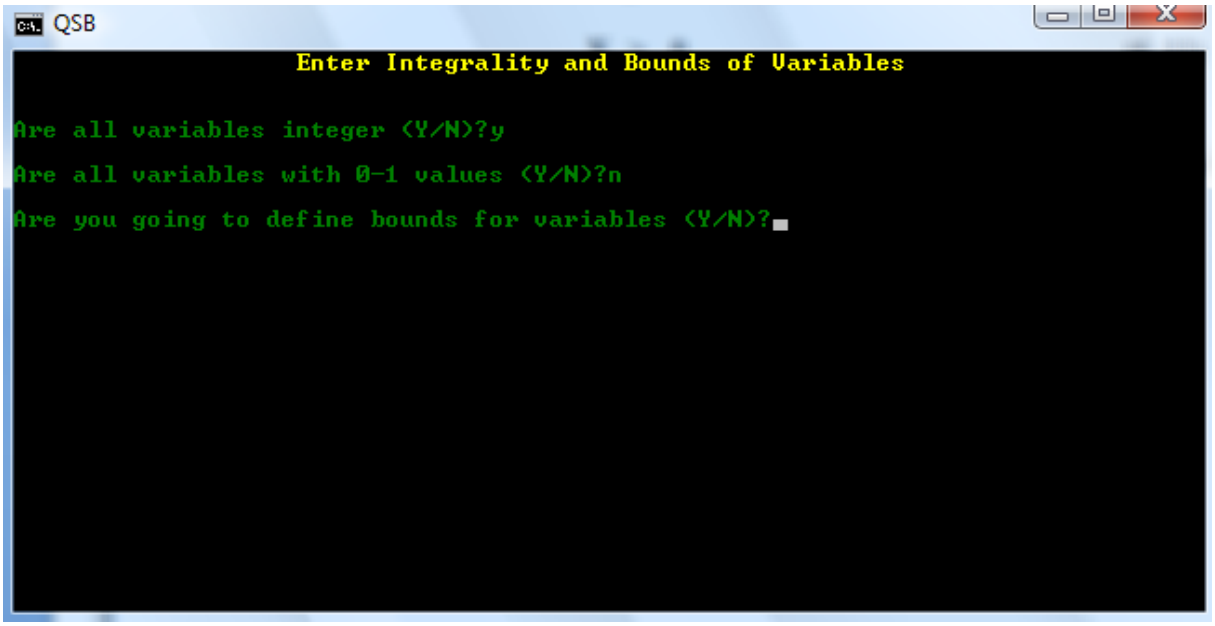
$$\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}$$

unde: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$, k = 1, 2; h = 1, 2; l = 1, 2, 3.

1) Pentru (A^1 , b^1 , c^1) se obţine problema de programare liniară deterministă (6. 12).

$$\begin{aligned} &\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 100} \\ &\mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70} \\ &\mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 60} \\ &\mathbf{X_j \ge 0}\ ,\ j = 1, 2, 3; \qquad \textbf{(6. 12)} \\ &\mathbf{X_j \in Z},\ j = 1, 2, 3 \\ &\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3} \\ &\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)} \end{aligned}$$





Se raspunde la intrebarile programului Qsb din ecranul de mai sus: y, n, n.

Se rezolvă cu programul Qsb şi se obţine soluţia optimă:
max f(X_1 , X_2 , X_3) = M_{111} = 1960 , X_1 = 22, X_2 = 0, X_3 = 26;
realizabilă cu probabilitatea $P_{111} = p_{11} \cdot p_{21} \cdot p_{31} = 0.7 \times 0.8 \times 0.5 = 0.28$.
2) Pentru (A^1 , b^1 , c^2) se obţine problema determinstă (6. 13).

$$\begin{aligned} & \mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 100} \\ & \mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70} \\ & \mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 60} \\ & \mathbf{X_j \ge 0}, \; j = 1, 2, 3; \\ & \mathbf{X_j \in Z}, \; j = 1, 2, 3 \\ & \mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 40 \cdot X_1 + 50 \cdot X_2 + 60 \cdot X_3} \\ & \mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)} \end{aligned} \qquad \textbf{(6. 13)}$$

max f(X_1 , X_2 , X_3) = M_{112} = 2440 , X_1 =22, X_2 = 0, X_3 =26;
cu probabilitatea $P_{112} = p_{11} \cdot p_{21} \cdot p_{32} = 0.7 \times 0.8 \times 0.3 = 0.168$.

3) Pentru (A^1 , b^1 , c^3) se obţine (6. 14).

$$\begin{aligned} & \mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 100} \\ & \mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 70} \\ & \mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 60} \\ & \mathbf{X_j \ge 0,}\ j = 1, 2, 3; \\ & \mathbf{X_j \in Z,}\ j = 1, 2, 3 \\ & \mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 55 \cdot X_1 + 60 \cdot X_2 + 80 \cdot X_3} \\ & \mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)} \end{aligned} \qquad \mathbf{(6.\ 14)}$$

max f(X_1 , X_2 , X_3) = M_{113} = 3290 , X_1 =22, X_2 = 0, X_3 =26;
realizabilă cu probabilitatea $P_{113} = p_{11} \cdot p_{21} \cdot p_{33} = 0.7 \times 0.8 \times 0.2 = 0.112$.

4) Pentru (A^1 , b^2 , c^1) se obţine (6. 15).

$$\begin{aligned} & \mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 125} \\ & \mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 100} \\ & \mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 90} \\ & \mathbf{X_j \ge 0,}\ j = 1, 2, 3; \\ & \mathbf{X_j \in Z,}\ j = 1, 2, 3 \\ & \mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3} \\ & \mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)} \end{aligned} \qquad \mathbf{(6.15)}$$

max f(X_1 , X_2 , X_3) = M_{121} = 2550 , X_1 =35, X_2 = 0, X_3 =30;
realizabilă cu probabilitatea $P_{121} = p_{11} \cdot p_{22} \cdot p_{31} = 0.7 \times 0.2 \times 0.5 = 0.07$.
5) Pentru (A^1 , b^2 , c^2) se obţine (6.16).

$$\begin{aligned} & \mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 125} \\ & \mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 100} \\ & \mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 90} \\ & \mathbf{X_j \ge 0,}\ j = 1, 2, 3; \\ & \mathbf{X_j \in Z,}\ j = 1, 2, 3 \\ & \mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 40 \cdot X_1 + 50 \cdot X_2 + 60 \cdot X_3} \\ & \mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)} \end{aligned} \qquad \mathbf{(6.\ 16)}$$

max f(X_1 , X_2 , X_3) = M_{122} = 3200 , X_1 =35, X_2 = 0, X_3 =30;
realizabilă cu probabilitatea $P_{122} = p_{11} \cdot p_{22} \cdot p_{32} = 0.7 \times 0.2 \times 0.3 = 0.042$.
6) Pentru (A^1 , b^2 , c^3) se obţine (6. 17).

$$\begin{aligned} & \mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \le 125} \\ & \mathbf{2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 100} \\ & \mathbf{X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 \le 90} \\ & \mathbf{X_j \ge 0,}\ j = 1, 2, 3; \\ & \mathbf{X_j \in Z,}\ j = 1, 2, 3 \\ & \mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 55 \cdot X_1 + 60 \cdot X_2 + 80 \cdot X_3} \\ & \mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)} \end{aligned} \qquad \mathbf{(6.\ 17)}$$

max f(X_1 , X_2 , X_3) = M_{123} =4325, X_1 =35, X_2 = 0, X_3 =30;
realizabilă cu probabilitatea $P_{123} = p_{11} \cdot p_{22} \cdot p_{33} = 0.7 \times 0.2 \times 0.2 = 0.028$.

7) Pentru (A^2 , b^1 , c^1) se obţine (6. 18).

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 3.3 \cdot X_3 \le 100}\\
&\mathbf{2.2 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \le 70}\\
&\mathbf{1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \le 60}\\
&\mathbf{X_j \ge 0},\ j = 1, 2, 3; \qquad \textbf{(6. 18)}\\
&\mathbf{X_j \in Z},\ j = 1, 2, 3\\
&\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3}\\
&\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}
\end{aligned}
$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{211} = 1760$, $X_1 = 19$, $X_2 = 1$, $X_3 = 23$;
realizabilă cu probabilitatea $P_{211} = p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{31} = 0.3 \times 0.8 \times 0.5 = 0.12$.
8) Pentru (A^2, b^1, c^2) se obţine (6. 19).

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 3.3 \cdot X_3 \le 100}\\
&\mathbf{2.2 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \le 70}\\
&\mathbf{1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \le 60}\\
&\mathbf{X_j \ge 0},\ j = 1, 2, 3; \qquad \textbf{(6. 19)}\\
&\mathbf{X_j \in Z},\ j = 1, 2, 3\\
&\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 40 \cdot X_1 + 50 \cdot X_2 + 60 \cdot X_3}\\
&\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}
\end{aligned}
$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{212} = 2190$, $X_1 = 19$, $X_2 = 1$, $X_3 = 23$;
cu probabilitatea $P_{212} = p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{32} = 0.3 \times 0.8 \times 0.3 = 0.072$.
9) Pentru (A^2, b^1, c^3) se obţine (6. 20).

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 3.3 \cdot X_3 \le 100}\\
&\mathbf{2.2 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \le 70}\\
&\mathbf{1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \le 60}\\
&\mathbf{X_j \ge 0},\ j = 1, 2, 3; \qquad \textbf{(6. 20)}\\
&\mathbf{X_j \in Z},\ j = 1, 2, 3\\
&\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 55 \cdot X_1 + 60 \cdot X_2 + 80 \cdot X_3}\\
&\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}
\end{aligned}
$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{213} = 2945$, $X_1 = 19$, $X_2 = 1$, $X_3 = 23$;
cu probabilitatea $P_{213} = p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{33} = 0.3 \times 0.8 \times 0.2 = 0.048$.
10) Pentru (A^2, b^2, c^1) se obţine (6. 21).

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 3.3 \cdot X_3 \le 125}\\
&\mathbf{2.2 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \le 100}\\
&\mathbf{1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \le 90}\\
&\mathbf{X_j \ge 0},\ j = 1, 2, 3; \qquad \textbf{(6. 21)}\\
&\mathbf{X_j \in Z},\ j = 1, 2, 3\\
&\mathbf{f(X_1, X_2, X_3) = 30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 50 \cdot X_3}\\
&\mathbf{\max f(X_1, X_2, X_3)}
\end{aligned}
$$

$\max f(X_1, X_2, X_3) = M_{221} = 2290$, $X_1 = 29$, $X_2 = 3$, $X_3 = 26$;
cu probabilitatea $P_{221} = p_{12} \cdot p_{22} \cdot p_{31} = 0.3 \times 0.2 \times 0.5 = 0.03$.

11) Pentru (A^2, b^2, c^2) se obţine (6. 22).

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 3.3 \cdot X_3 \le 125}\\
&\mathbf{2.2 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \le 100}\\
&\mathbf{1.1 \cdot X_1 + 2.2 \cdot X_2 + 1.1 \cdot X_3 \le 90}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{X_j \geq 0}$, j = 1, 2, 3; **(6. 22)**
$\mathbf{X_j \in Z}$, j = 1, 2, 3
$\mathbf{f(X_1 , X_2 , X_3) = 40 . X_1 + 50 . X_2 + 60 . X_3}$
$\mathbf{max\ f(X_1 , X_2 , X_3)}$

max f(X_1 , X_2 , X_3) = M_{222} = 2870 , X_1 = 29, X_2 = 3, X_3 = 26;
cu probabilitatea $P_{222} = p_{12} . p_{22} . p_{32} = 0.3 \times 0.2 \times 0.3 = 0.018$.
12) Pentru (A^2 , b^2 , c^3) se obţine problema dată de relaţiile (6. 23).

$\mathbf{1.1 . X_1 + 2.2 . X_2 + 3.3 . X_3 \leq 125}$
$\mathbf{2.2 . X_1 + 2.2 . X_2 + 1.1 . X_3 \leq 100}$
$\mathbf{1.1 . X_1 + 2.2 . X_2 + 1.1 . X_3 \leq 90}$
$\mathbf{X_j \geq 0}$, j = 1, 2, 3; **(6. 23)**
$\mathbf{X_j \in Z}$, j = 1, 2, 3
$\mathbf{f(X_1 , X_2 , X_3) = 55 . X_1 + 60 . X_2 + 80 . X_3}$
$\mathbf{max\ f(X_1 , X_2 , X_3)}$

max f(X_1 , X_2 , X_3) = M_{223} = 3870 , X_1 = 30, X_2 = 1, X_3 = 27;
cu probabilitatea $P_{223} = p_{12} . p_{22} . p_{33} = 0.3 \times 0.2 \times 0.2 = 0.012$.

Problema de programare liniară stochastică s-a rezolvat prin cele 12 probleme de programare liniară în numere întregi, realizabile cu anumite probabilităţi, care la rândul lor au avut fiecare propriile iteraţii, plus calculul probabilităţilor corespunzătoare, a repartiţiei profitului maxim şi funcţia de repartiţie, deci cantitatea de calcule creşte considerabil prin utilizarea modelului stochastic.

Repartiţia profitului maxim este (6.24).

$$\max f(A,b,c) = \begin{pmatrix} 1760 & 1960 & 2190 & 2290 & 2440 & 2550 & 2870 & 2945 & 3200 & 3290 & 3870 & 4325 \\ 0.12 & 0.28 & 0.072 & 0.03 & 0.168 & 0.07 & 0.018 & 0.048 & 0.042 & 0.112 & 0.012 & 0.028 \end{pmatrix} \quad \textbf{(6. 24)}$$

Funcţia de repartiţie este F(f) dată de (6.25).

$$F(f) = \begin{cases} 0 & ,daca \quad f \leq 1760 \\ 0.12 & ,daca \quad 1760 < f \leq 1960 \\ 0.40 & ,daca \quad 1960 < f \leq 2190 \\ 0.472 & ,daca \quad 2190 < f \leq 2290 \\ 0.502 & ,daca \quad 2290 < f \leq 2440 \\ 0.670 & ,daca \quad 2440 < f \leq 2550 \\ 0.740 & ,daca \quad 2550 < f \leq 2870 \\ 0.758 & ,daca \quad 2870 < f \leq 2945 \\ 0.806 & ,daca \quad 2945 < f \leq 3200 \\ 0.848 & ,daca \quad 3200 < f \leq 3290 \\ 0.960 & ,daca \quad 3290 < f \leq 3870 \\ 0.972 & ,daca \quad 3870 < f \leq 4325 \\ 1 & ,daca \quad f > 4325 \end{cases} \quad \textbf{(6. 25)}$$

Dacă se exclude cea mai mică şi cea mai mare valoare ale profitului maxim, max f (variabila aleatoare), atunci probabilitatea ca profitul maxim să se încadreze în intervalul [1960 ; 3870), deci max f [1960 ; 3870), este:

P(1960max f <3870) = F(3870) - F(1960) = 0.960 - 0.12 = 0.840

deci sunt şanse mari de realizare.

Programarea liniară stochastică poate fi şi sub forma de ***programare liniară cu restricţii aleatoare*** care se formulează astfel:

$$P(A \cdot X \le b) \ge \alpha \qquad (6.26)$$
$$X \ge 0$$
$$f(X, c) = c \cdot X$$
$$\max f(X, c)$$

sau în scriere dezvoltată

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \le b_i\right) \ge \alpha_i \quad , i , 1, 2, \ldots, m; \qquad (6.27)$$
$$X_j \ge 0 \ , \ j = 1, 2, \ldots, n$$
$$f(X_1, \ X_2, \ \ldots, \ X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j.X_j$$
$$\max \ f(X_1, \ X_2, \ \ldots, \ X_n)$$

unde P este probabilitatea, A este matrice, X, b şi c vectori din relaţiile (6.1), iar α este vectorul coloană al probabilităţilor din relaţiile (6.26) cu m componente cuprinse între 0 şi 1.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \ , \ \alpha_i \in [0,1] \ , \ i = 1, 2, \ldots, m;$$

α_i este probabilitatea de satisfacere a restricţiei de rang i, iar 1 - α_i este probabilitatea complementară şi reprezintă riscul permis ca variabilele aleatoare să ia valori pentru care restricţia de rang i nu este satisfăcută, deci:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j > b_i$$
$$P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j > b_i\right) = 1 - \alpha_i \qquad (6.28)$$

Rezolvarea problemei de *programare liniară cu restricţii aleatoare* (6.27) este deosebit de complexă.

Metode matematice de modelare a fluxurilor materiale – C9

7. Programarea fuzzy

Mulţimile fuzzy (vagi) au fost introduse în matematică de Zadeh, L. A. în 1965 ca o necesitate de a măsura imprecisul, vagul, nuanţa, fiind apoi utilizate în diverse domenii ale ştiinţei şi tehnicii . Pentru o mulţime fuzzy nu există o tranziţie netă de la apartenenţa la neapartenenţa unui element la o mulţime, existând grade de apartenenţă intermediare între apartenenţă şi neapartenenţă. Mulţimile fuzzy se bazează pe logica continuă, iar teoria clasică a mulţimilor pe logica bivalentă, deci discontinuă, care lucrează cu două valori logice: adevărul şi falsul, cu valorile de adevăr 1, respectiv 0.

O alta extensie a mulţimilor clasice care poate manevra concepte vagi este dată de mulţimile flue introduse de Y. Gentilhomme în 1968 care au la bază o logică trivalentă cu valorile de adevar: 0 , 1/2 , 1 , corespunzătoare pentru fals, posibil şi adevărat sau la modul general se bazeaza pe logica n-valenta, dar sunt logici discontinue.

Pentru definirea şi utilizarea mulţimilor fuzzy se vor introduce câteva noţiuni necesare.

Se consideră o mulţime nevidă L , înzestrată cu două operaţii, notate: $\vee$ (disjuncţie) şi $\wedge$ (conjuncţie) şi axiomele:

1.) Comutativitatea

$a \vee b = b \vee a$;

$a \wedge b = b \wedge a$;

2.) Asociativitatea

$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$;

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;

3.) Idempotenţa

$a \vee a = a$;

$a \wedge a = a$;

4.) Absorbţia

$a \vee (a \wedge b) = a$;

$a \wedge (a \vee b) = a$;

5.) Distributivitatea

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

6.) Prim şi ultim element

Există elementele $0 , 1 \in L$, astfel încât:

$0 \vee a = a$,

$0 \wedge a = 0$;

$1 \vee a = 1$,

$1 \wedge a = a$;

7.) Negaţia

Există operaţia negaţie " $\bar{}$ " , astfel încât:

$\bar{a} \vee a = 1$

$a \wedge \bar{a} = 0$

$\bar{\bar{a}} = a$

$\bar{0} = 1$

$\bar{1} = 0$.

Se vor defini câteva concepte utilizând cele şapte axiome.

Tripletul $(L, \vee, \wedge)$ care verifică axiomele 1) - 4) se numeşte **latice**.

O latice $(L, \vee, \wedge)$ care verifică axiomele 5) - 7) se numeşte **algebra Boole**.

Definiţie

Fie L o latice şi X o mulţime oarecare.

Se numeşte **L - multime fuzzy** în X o aplicaţie F,

$F : X \to L$.

Fie B o algebră Boole şi X o mulţime oarecare.

Se numeşte **B - mulţime fuzzy** în X o aplicaţie F,

$$F : X \to B .$$

Definiţie

Se poate considera intervalul $[0 , 1] \subset R$, B = [o, 1] , care este o algebră Boole cu operaţiile:

$a \vee b = \max (a, b)$,

$a \wedge b = \min (a, b)$, $\forall$ a, b $\in [0 , 1]$

$\bar{a} = 1 - a$, $\forall$ a $\in [0 , 1]$

În acest caz se numeşte **mulţime fuzzy** sau **vagă** (în X) o aplicaţie

$$F : X \to [0 , 1]$$

[Negoiţă, C.V. , ş.a. , 1974]

Alţi autori, [Dumitrescu, D., Costin, H. , 1996], numesc mulţimea fuzzy mulţime nuanţată, fiind definită astfel:

Definiţie

Dacă X este o mulţime nevidă, **o mulţime fuzzy (nuanţată)** este o pereche (X, A), unde $A : X \to [0 , 1]$.

X este universul mulţimii fuzzy (nuantate) şi A este funcţia de apartenenţă a mulţimii fuzzy. A(x) se interpretează ca fiind gradul de apartenenţă al lui x la mulţimea fuzzy (X, A) .

Dacă A(x) = 1, atunci, cu certitudine, x este un element din A. Între apartenenţa totală şi neapartenenţa totală există o infinitate de situaţii intermediare (fuzzy). Din motive de simplitate se va identifica mulţimea fuzzy cu funcţia ei de apartenenţă, deci vom spune că A este o mulţime fuzzy peste universul X. Se va nota cu L(X) familia mulţimilor fuzzy peste X.

Zimmermann, H. J., [Zimmermann, H.J., 1991], defineşte mulţimea fuzzy asemănător cu cele două definiţii precedente.

Definiţie

Dacă X este o mulţime de obiecte notate generic prin x, atunci mulţimea fuzzy A în X este o mulţime de perechi ordonate

A = { (x, μ_A (x)) $\mid$ x $\in$X }, iar μ_A (x) este numită funcţie de apartenenţă a elementului x la A ,

$$\mu : X \to M$$

, M fiind spaţiul de apartenenţă .

Dacă M conţine numai două elemente 0 şi 1, mulţimea A este non-fuzzy, deci clasică, cu μ_A (x) identică cu funcţia caracteristică a mulţimii non-fuzzy.

Se vor enunţa câteva relaţii şi operaţii cu mulţimi fuzzy.

Dacă A şi B sunt mulţimi fuzzy peste X, **egalitatea mulţimilor fuzzy**:

$$A = B \Leftrightarrow A(x) = B(x) , \forall x \in X .$$

Mulţimea fuzzy A este **inclusă** în mulţimea fuzzy B,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x) , \forall x \in X.$$

Dacă A este o mulţime fuzzy peste X, complementara A' a mulţimii A peste X, este definită de:

$$A'(x) = 1 - A(x) , (\forall) x \in X.$$

Mulţimea vidă se notează cu Φ şi se defineşte:

$$\Phi(x) = 0 , (\forall) x \in X.$$

Complementara mulţimii vide Φ se notează cu X şi:

$$X(x) = 1 , (\forall) x \in X.$$

Reuniunea şi intersecţia mulţimilor fuzzy peste X au fost definite de Zadeh în (7. 1).

$$(A \cup B)(x) = \max (A(x), B(x)) \ , \ \forall x \in X ;$$
$$(A \cap B)(x) = \min (A(x), B(x)) \ , \ \forall x \in X . \qquad \textbf{(7. 1)}$$

Această definire a reuniunii şi intersecţiei mulţimilor fuzzy nu este singura posibilă, iar la modul general se definesc prin utilizarea t-normelor a căror definiţie se dă în continuare.

O **t-normă** este o funcţie

$$T: [0 , 1] \times [0 , 1] \rightarrow [0 , 1]$$

care satisface următoarele patru axiome:

1. condiţia la limită: $T(a, 1) = a , \ \forall a \in [0 , 1]$;
2. monotonia: $a \leq u , b \leq v \Rightarrow T(a, b) \leq T(u, v)$;
3. comutativitatea: $T(a, b) = T(b, a) \ , \ \forall a, b \in [0 , 1]$;
4. asociavitatea: $T(T(a, b), c)) = T(a, T(b, c)) \ , \ \forall a, b, c \in [0 , 1]$;

Dacă T este o t-norma

$$T: [0 , 1] \times [0 , 1] \rightarrow [0 , 1]$$

atunci functia S

$$S: [0 , 1] \times [0 , 1] \rightarrow [0 , 1]$$

definită prin : $S(a, b) = 1 - T(1-a, 1-b) \ , \ \forall a, b \in [0 , 1]$

se numeşte **t-conorma duala** a lui R.

La modul general se definesc reuniunea şi intersecţia mulţimilor fuzzy A şi B definite peste X în (7. 2).

$$(A \cap B)(x) = T(A(x), B(x)) , \forall x \in X; \qquad \textbf{(7. 2)}$$
$$(A \cup B)(x) = S(A(x), B(x)) \ , \ \forall x \in X,$$

unde T este o t-normă şi S este t-conorma duala a lui T.

Câteva exemple concrete de t-norme T şi t-conorme S sunt:

1.) $T_0 (a, b) = \min (a, b)$
$S_0 (a, b) = \max (a, b)$;

2.) $T_1 (a, b) = a.b$
$S_1 (a, b) = a + b - a.b$;

3.) $T_\infty (a, b) = \max (a + b - 1 , 0)$
$S_\infty (a, b) = \min (a + b , 1)$;

4.) $T_s(x,y) = \log_s\left(1 + \frac{(s^x - 1).(s^y - 1)}{s - 1}\right)$, $s > 0$, $s \neq 1$, **(7. 3)**

$S_s (x, y) = 1 - T(1 - x , 1 - y)$.

Cele patru t-norme au proprietatea:

$T_i = \lim_{s \to i} T_s$, unde i = 0 , 1 , ∞ .

Din t-norma 4) , dată de (7. 3), se obţin o infinitate de t-norme, după valorile lui s.

Programarea liniară fuzzy.

Programarea liniară clasică, deterministă, non-fuzzy, utilizată în alocarea resurselor cu maximizarea profitului este în principiu dată de tabelul nr. 3.1 şi relaţiile (3.7) sau matricial (3.8) din cursul C6, pe care le reluăm şi le rescriem alfel prin relaţiile (7.4).

$$\begin{aligned} &\max f(X) \\ &f(X) = c.\ X \\ &A.X \le b \\ &X \ge 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(7. 4)}$$

unde: $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $A = (a_{ij})$, i = 1, 2,..., m ; j = 1, 2,..., n;

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} \ , \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ ... \\ X_n \end{pmatrix}$$

Toţi coeficienţii relaţiei (7.4)sunt mulţimi clasice, non-fuzzy.
Dacă decizia bazată pe soluţia optimă a problemei de programare liniară (7.4) trebuie luată în condiţii vagi, în împrejurări fuzzy, trebuie modificate relaţiile (7.4) şi trebuie utilizat modelul programării liniare fuzzy dat de relaţiile (7.5).

Se presupune că funcţia obiectiv f va avea un nivel aspirat (cel puţin egal) z.

$$\begin{aligned} &c.\ X \underset{\approx}{\ge} z \\ &A.X \underset{\approx}{\le} b \\ &X \ge 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(7. 5)}$$

Relaţia $\underset{\approx}{\le}$ este versiunea fuzzy a relaţiei clasice, non-fuzzy $\le$ şi are interpretarea lingvistică " esenţial mai mic decât sau egal ". La fel, relaţia $\underset{\approx}{\ge}$ este versiunea fuzzy a relaţiei clasice, non-fuzzy $\ge$, şi are interpretarea lingvistică " esenţial mai mare decât sau egal ".
Fiecare restricţie a modelului (7. 5) este privită ca o mulţime fuzzy.

În programarea liniară clasică, non-fuzzy, violarea oricărei restricţii în relaţiile (7.4) duce la soluţii nefezabile, neadmisibile, dar în programarea liniară fuzzy anumite violări ale restricţiilor în relaţiile (7. 5) sunt permise. Spre deosebire de programarea liniară clasică, non-fuzzy, în programarea liniară fuzzy nu este definit unic tipul modelului, fiind posibile multe variaţii, funcţie de trăsăturile caracteristice ale situaţiei reale care va fi modelată.
În relaţiile (7. 5) se face substituţia:

$B = \begin{pmatrix} -c \\ A \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} -z \\ b \end{pmatrix}$ şi relaţiile (7. 5) devin (7. 6).

$$\mathbf{B \,.\, X} \underset{\approx}{\leq} \mathbf{d} \qquad \textbf{(7. 6)}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

În relaţiile (7. 6) fiecare linie din cele m + 1 reprezintă mulţimi fuzzy cu funcţia de apartenenţă a relaţiei i, μ_i (X), care pot fi interpretate ca şi gradul de satisfacere al inegalităţii fuzzy:

$$B_i \,.\, X \underset{\approx}{\leq} d_i \quad , i = 1, 2,..., m + 1,$$

iar B_i este linia i în matricea B.
Deci, notaţiile sunt:

$B_1 = - c$

$d_1 = - z$
$B_{i+1} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, i = 1, 2,..., m;

$d_{i+1} = b_i$, i = 1, 2,..., m;

Funcţia de apartenenţă pentru modelul (7.6) este dată de definirea intersecţiei mulţimilor fuzzy prin relaţia (7.1), obţinându-se relaţiile (7.7).

$$\mu_D(X) = \min_{1 \leq i \leq m+1} \{\mu_i(X)\} \qquad \textbf{(7. 7)}$$

iar pentru rezolvarea problemei fuzzy dată de (7. 6) trebuie aflat (7. 8).

$$\max_{X \geq 0} \mu_D(X) = \max_{X \geq 0} \min_{1 \leq i \leq m+1} \{\mu_i(X)\} \qquad \textbf{(7. 8)}$$

Sunt posibile diverse funcţii de apartenenţă μ_i (X), i = 1,2,...,m + 1.

Se poate utiliza funcţia de apartenenţă (7. 9).

$$\mu_i(X) = \begin{cases} 1, & daca \quad B_i.X \leq d_i \\ 1 - \dfrac{B_i.X - d_i}{p_i}, & daca \quad d_i < B_i.X \leq d_i + p_i \\ 0, & daca : B_i.X > d_i + p_i \end{cases} \qquad \textbf{(7. 9)}$$

unde p_i sunt constante alese subiectiv şi reprezintă violările admisibile ale funcţiei obiectiv şi restricţiilor, pentru i = 1,2,...,m + 1.

Pentru rezolvarea problemei de programare liniară fuzzy (7.6) trebuie determinat (7. 10).

$$\max_{X \geq 0} \min_{1 \leq i \leq m+1} \left(1 - \frac{B_i.X - d_i}{p_i} \right) \qquad \textbf{(7. 10)}$$

Problema de programare liniară fuzzy (7. 5) se reduce la rezolvarea problemei de programare liniară clasică (deterministă), non-fuzzy, dată de relaţiile (7. 11) care are o restricţie şi o variabilă în plus faţă de (7. 5) şi (7. 6) , se rezolvă cu algoritmul simplex primal sau dual sau prin utilizarea programelor Qsb, Dsspom, Lindo sau altele.

$$\max \lambda$$
$$\lambda.p_i + B_i.X \le d_i + p_i \ , i = 1,2,..., m + 1; \qquad (7.\ 11)$$
$$X \ge 0$$
$$\lambda \ge 0$$

Relaţiile (7. 11) se dezvoltă, rezultă (7.11a)

$$\max \lambda$$
$$\lambda.p_1 - c.X \le -z + p_1$$
$$\lambda.p_i + B_i.X \le d_i + p_i \ , i = 2,3, ..., m + 1; \qquad (7.\ 11a)$$
$$X \ge 0$$
$$\lambda \ge 0$$

Relaţiile (7. 11a) se dezvoltă, rezultă (7.11b), apoi (7.11c).

$$\max \lambda$$
$$\lambda.p_1 - \sum_{j=1}^{n} c_j \ . X_j \le -z + p_1$$
$$\lambda.p_{i+1} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ . X_j \le b_i + p_{i+1} \ , i = 1, 2, ..., m; \qquad (7.\ 11b)$$
$$X_j \ge 0 \ , j = 1, 2, ..., n$$
$$\lambda \ge 0$$

Se notează:

$$\lambda = X_{n+1}$$

Rezultă (7.11c).

$$\max X_{n+1}$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j \ . X_j - p_1 \ . X_{n+1} \ge z - p_1$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ . X_j + p_{i+1} \ . X_{n+1} \le b_i + p_{i+1} \ , i = 1, 2, ..., m; \qquad (7.\ 11c)$$
$$X_j \ge 0 \ , j = 1, 2, ..., n, n+1;$$

Exemplul nr. 7.1.

Se consideră o problemă de alocare a resurselor materiale cu maximizarea profitului, Din m = 3 resurse se fabrică n = 3 produse, date în tabelul nr.7.1. şi împrejurările sunt vagi, fuzzy Trebuie determinată ce cantitate se va fabrica din fiecare produs, astfel încât profitul obţinut să fie maxim. Va fi o abordare fuzzy a problemei maximizării profitului.

Tabelul nr.7.1.

P_j / R_i	P_1	P_2	P_3	Resurse disponibile b_i
R_1	1	2	3	100

R_2	2	2	1	70
R_3	1	2	1	60
Profitul unitar c_j	30	40	50	

Modelul de alocare a resurselor prin programare liniară clasică, non-fuzzy este dat de relaţiile (7.13) şi are soluţia optimă:

max f = 1960, $X_1 = 22$, $X_2 = 0$, $X_3 = 26$;

$$\begin{aligned} &\mathbf{X_1 + 2 . X_2 + 3 . X_3 \le 100} \\ &\mathbf{2 . X_1 + 2 . X_2 + X_3 \le 70} \\ &\mathbf{X_1 + 2 . X_2 + X_3 \le 60} \qquad \mathbf{(7.13)} \\ &\mathbf{X_j \ge 0 ,}\ j = 1, 2, 3; \\ &\mathbf{f(X_1 , X_2 , X_3) = 30 . X_1 + 40 . X_2 + 50 . X_3} \\ &\mathbf{\max f(X_1 , X_2 , X_3)} \end{aligned}$$

Reformularea modelului (7.13) în sensul programării liniare fuzzy este dat de relaţiile (7.14).

$$\begin{aligned} &\mathbf{30 . X_1 + 40 . X_2 + 50 . X_3 \gtrapprox z} \\ &\mathbf{X_1 + 2 . X_2 + 3 . X_3 \lessapprox 100} \\ &\mathbf{2 . X_1 + 2 . X_2 + X_3 \lessapprox 70} \qquad \mathbf{(7. 14)} \\ &\mathbf{X_1 + 2 . X_2 + X_3 \lessapprox 60} \\ &\mathbf{X_j \ge 0 ,}\ j = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

z - este nivelul aspirat (aşteptat, cel puţin egal cu z) al funcţiei obiectiv .

Relaţiile $\lessapprox$ si $\gtrapprox$ sunt versiunea fuzzy a relaţiilor $\le$ şi $\ge$.

Problema de programare liniară fuzzy (7.14) se reduce la rezolvarea problemei de programare liniară clasică, non-fuzzy (7.15) , diferită de problema iniţială deterministă, în care s-a notat $\lambda = X_4$ în modelul general (7. 11).

$$\begin{aligned} &\mathbf{30.X_1 + 40.X_2 + 50.X_3 - p_1 .X_4 \ge z - p_1} \\ &\mathbf{X_1 + 2 . X_2 + 3 . X_3 + p_2 .X_4 \le 100 + p_2} \\ &\mathbf{2 . X_1 + 2 . X_2 + X_3 + p_3 .X_4 \le 70 + p_3} \\ &\mathbf{X_1 + 2 . X_2 + X_3 + p_4 .X_4 \le 60 + p_4} \qquad \mathbf{(7. 15)} \\ &\mathbf{X_j \ge 0 ,}\ j = 1, 2, 3, 4; \\ &\mathbf{f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , X_4) = X_4} \\ &\mathbf{\max f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , X_4)} \end{aligned}$$

unde: z - este nivelul aspirat (aşteptat, cel puţin egal cu z) al funcţiei obiectiv ;

p_1 - violarea permisă a funcţiei obiectiv;

p_2 - violarea permisă a restricţiei (1) din relaţiile (7.14);

p_3 - violarea permisă a restricţiei (2) din relaţiile (7.14);

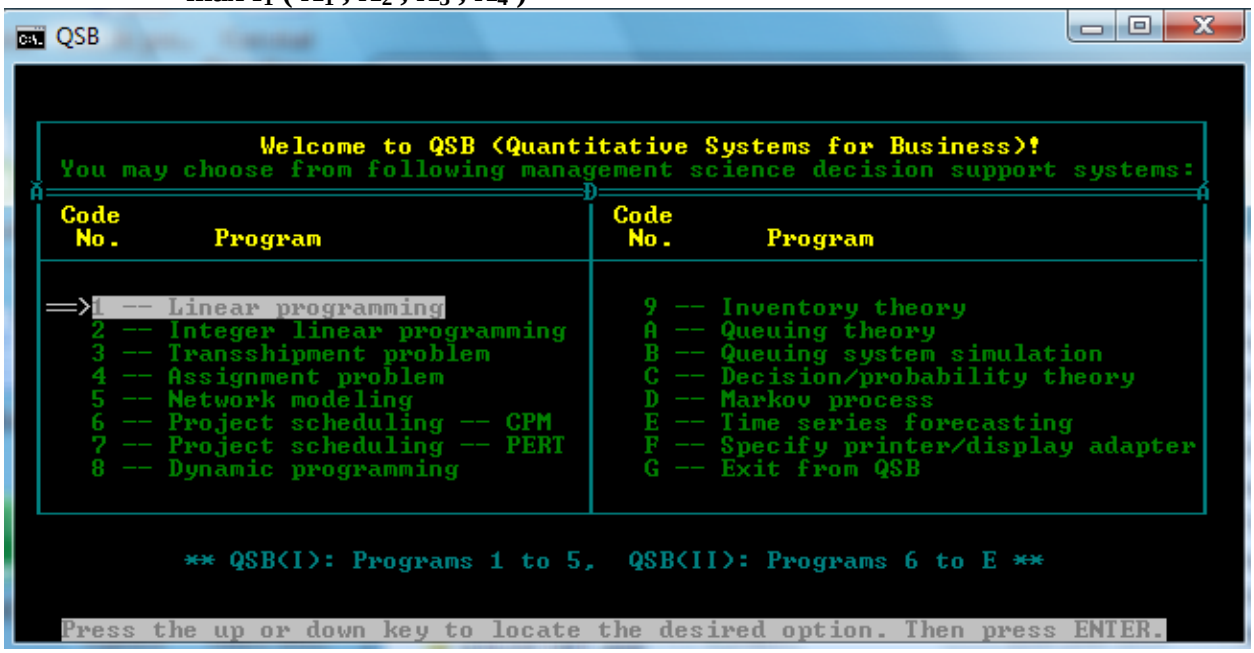
p_4 - violarea permisă a restricţiei (3) din relaţiile (7.14).

Se vor da câteva valori lui z şi p_1 , p_2 , p_3 , p_4 .

- Pentru: z = 1900 ; p_1 = 200 ; p_2 = 20 ; p_3 = 10 ; p_4 = 15, prin înlocuirea acestor valori în relaţiile (7.15), se obţine (7.16).

$$\mathbf{30.X_1 + 40.X_2 + 50.X_3 - 200 . X_4 \ge 1700}$$

$$
\begin{aligned}
&X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 20 \cdot X_4 \le 120 \\
&2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 10 \cdot X_4 \le 80 \\
&X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 15 \cdot X_4 \le 75 \qquad (7.16) \\
&X_j \ge 0 \text{ , } j = 1, 2, 3, 4; \\
&f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , X_4) = X_4 \\
&\max f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , X_4)
\end{aligned}
$$



Prin utilizarea programului QSB, se obţine soluţia:

$X_1 = 21.785715$; $X_2 = 0$;

$X_3 = 25.357142$; $X_4 = \lambda = 1.1071428 = \max f_1$;

Deci, utilizând valorile determinate pentru X_1 , X_2 , X_3 se obţine profitul f:

f = 30 . 21, 785715 + 50 . 25,357142 = 1921,42855 > 1900 = nivelul aspirat, dar

f = 1921,42855 < 1960 = valoarea optimă pentru problema deterministă (7.13). Valorile determinate pentru X_1 , X_2 , X_3 reprezintă soluţia care maximizează în (7. 8) pentru modelul (7.13) cu funcţia de apartenenţă (7. 9).

- Dacă se modifică p_1 în relaţiile (7.16) (rezultate din (7.15)), $p_1 = 100$, se obţine (7.17).

$$
\begin{aligned}
&3.X_1 + 4.X_2 + 5.X_3 - 10 \cdot X_4 \ge 180 \\
&X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 20 \cdot X_4 \le 120 \\
&2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 10 \cdot X_4 \le 80 \\
&X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 15 \cdot X_4 \le 75 \qquad (7.17) \\
&X_j \ge 0 \text{ , } j = 1, 2, 3, 4; \\
&f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , X_4) = X_4 \\
&\max f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , X_4)
\end{aligned}
$$

Relaţiile (7.17) reprezintă o problemă de programare liniară non-fuzzy, diferită de problema deterministă iniţială (7.13), ce se rezolvă cu programul QSB şi se obţine soluţia optimă:

$X_1 = 21,739132$; $X_2 = 0$; $X_3 = 25,21739$; $X_4 = \lambda = 1,1304348 = \max f_1$.

Pentru problema de programare liniară iniţială (7. 13), valoarea profitului f este :

f = 30 . 21.739132 + 50 . 25.21739 = 1913.04346 > z = 1900

f = 1913.04346 < 1960

- Dacă se modifică z şi p_1 în relaţiile (7.16) care s-au obţinut din (7.15), z = 1920 şi $p_1 = 50$, se obţine (7.18).

$$
3.X_1 + 4.X_2 + 5.X_3 - 5 \cdot X_4 \ge 187
$$

$$
\begin{aligned}
&X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 20 \cdot X_4 \le 120 \\
&2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 10 \cdot X_4 \le 80 \\
&X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 15 \cdot X_4 \le 75 \qquad (7.18) \\
&X_j \ge 0, \; j = 1, 2, 3, 4; \\
&f_1 (X_1, X_2, X_3, X_4) = X_4 \\
&\max f_1 (X_1, X_2, X_3, X_4)
\end{aligned}
$$

Relaţiile (7.18) sunt o problemă de programare liniară non-fuzzy ce se rezolvă cu programul QSB şi se obţine în trei iteraţii soluţia optimă: $X_1 = 21.80488$; $X_2 = 0$; $X_3 = 25.414635$; $X_4 = \lambda = 1.0975608 = \max f_1$.

Valoarea funcţiei obiectiv a problemei de programare liniară iniţiale este în acest caz:

$f = 30 \cdot 21.80488 + 50 \cdot 25.414635 = 1924.87815 > z = 1920$

- Dacă se modifică z în relaţiile (7.18), $z = 1960$, se obţine:

$$
\begin{aligned}
&3X_1 + 4X_2 + 5X_3 - 5 \cdot X_4 \ge 191 \\
&X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 20 \cdot X_4 \le 120 \\
&2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 10 \cdot X_4 \le 80 \\
&X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 15 \cdot X_4 \le 75 \qquad (7.19) \\
&X_j \ge 0, \; j = 1, 2, 3, 4; \\
&f_1 (X_1, X_2, X_3, X_4) = X_4 \\
&\max f_1 (X_1, X_2, X_3, X_4)
\end{aligned}
$$

care are soluţia optimă:

$X_1 = 22.000002$; $X_2 = 0$; $X_3 = 26$; $X_4 = \lambda = 0.9999988 = = \max f_1$.

Pentru problema de programare liniară iniţială în acest caz se obţine:

$f = 30 \cdot 22.000002 + 50 \cdot 26 = 1960.00006 > 1960$

- Dacă se modifică din nou z şi p_1 în relaţiile (7.19), $z = 2410$ şi $p_1 = 100$, se obţine (7.20).

$$
\begin{aligned}
&3X_1 + 4X_2 + 5X_3 - 10 \cdot X_4 \ge 231 \\
&X_1 + 2 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + 20 \cdot X_4 \le 120 \\
&2 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 10 \cdot X_4 \le 80 \\
&X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 + 15 \cdot X_4 \le 75 \qquad (7.20) \\
&X_j \ge 0, \; j = 1, 2, 3, 4; \\
&f_1 (X_1, X_2, X_3, X_4) = X_4 \\
&\max f_1 (X_1, X_2, X_3, X_4)
\end{aligned}
$$

Soluţia optimă:

$X_1 = 23.956522$; $X_2 = 0$; $X_3 = 31.869564$; $X_4 = \lambda = 0.02173898 = \max f_1$

şi $f = 30 \cdot 23.956522 + 50 \cdot 31.869564 = 2312.17386 > 2410 - 100 = 2310$

- Dacă se modifică din nou z în relaţiile (7.20) , $z = 2420$ nu vom avea soluţie fezabilă, admisibilă, deci nici soluţie optimă.

Prin utilizarea problemei de programare liniară fuzzy, dacă condiţiile concrete ale firmei impun acest lucru, se obţine mai multă flexibilitate în decizii, dar creşte cantitatea de calcule.

Programarea liniară fuzzy cu restricţii fuzzy şi restricţii non-fuzzy

Este posibil ca o parte din restricţiile unei probleme de programare liniară fuzzy să fie restricţii fuzzy, alte restricţii să fie restricţii clasice (deterministe),
non-fuzzy de forma:

$$D.X \leq h$$

unde: D este o matrice, x şi h sunt vectori, iar funcţia obiectiv să fie fuzzy.

$D = (e_{kj})$, k = 1, 2, …, r; j = 1, 2, …, n

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_r \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$$

În acest caz restricţiile non-fuzzy se adaugă la formularea dată în modelul (7.11) şi se obţine (7.21).

$$\begin{aligned} &\max \lambda \\ &\lambda.p_i + B_i.X \leq d_i + p_i \quad , i = 1,2,..., m + 1; \qquad (7.21) \\ &D.X \leq h \\ &X , \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Relaţiile (7.21) reprezintă o problemă de programare liniară clasică (deterministă), non-fuzzy, care se rezolvă cu algoritmul simplex primal sau dual sau cu un program calculator corespunzator. [Zimmermann, H. J., 1991]

Relaţiile (7.21) se dezvoltă, rezultând relaţiile (7.22).

$$\begin{aligned} &\max \lambda \\ &\lambda.p_i + B_i.X \leq d_i + p_i \quad , i = 1,2,..., m + 1; \qquad (7.22) \\ &\sum_{j=1}^{n} e_{kj}.X_j \leq h_k \quad , \; k = 1, 2, ..., r \\ &X , \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Din relaţiile (7.11b) şi (7.22), rezultă modelul din relaţiile (7. 23).

$$\begin{aligned} &\max \lambda \\ &\lambda.p_1 - \sum_{j=1}^{n} c_j \,.\, X_j \leq -z + p_1 \\ &\lambda.p_{i+1} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.\, X_j \leq b_i + p_{i+1} \quad , i = 1, 2, ..., m; \qquad (7.\ 23) \\ &\sum_{j=1}^{n} e_{kj}.X_j \leq h_k \quad , \; k = 1, 2, ..., r \\ &X_j \geq 0 \; , \; j = 1, 2, ..., n \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Se notează:

$$\lambda = X_{n+1}$$

Din (7.23) şi (7.11c) rezultă (7.24) care rezolvă problema de programare liniară fuzzy cu restricţii fuzzy şi restricţii non-fuzzy, deci problema (7.21).

$$\max X_{n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \,.\, X_j - p_1 \,.\, X_{n+1} \geq z - p_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.\, X_j + p_{i+1} \,.\, X_{n+1} \leq b_i + p_{i+1} \;, \; i = 1, 2, ..., m; \qquad (7.\ 24)$$

$$\sum_{j=1}^{n} e_{kj} \,.\, X_j \leq h_k \;\; , \;\; k = 1, 2, ..., r$$

$$x_j \geq 0 \;, \; j = 1, 2, ..., n, n+1;$$

Exemplul nr. 7.2.

Se reia exemplul 7.1. cu modelul matematic dat de relaţiile (7.14), problemă de programare liniară fuzzy, în relaţiile (7.25) , având şi două restricţii non fuzzy.

$$\begin{aligned} 30 \,.\, X_1 + 40 \,.\, X_2 + 50 \,.\, X_3 &\gtrapprox z \\ X_1 + 2 \,.\, X_2 + 3 \,.\, X_3 &\lessapprox 100 \\ 2 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 + X_3 &\lessapprox 70 \qquad (7.\ 25) \\ X_1 + 2 \,.\, X_2 + X_3 &\lessapprox 60 \\ X_1 &\geq 20 \\ X_2 &\geq 10 \\ X_j \geq 0 \;, \; j = 1, 2, 3; & \end{aligned}$$

Se rezolvă problema de programare liniară fuzzy (7.25) cu modelul (7. 26).

$$\begin{aligned} 30.X_1 + 40.X_2 + 50.X_3 - p_1 \,.X_4 &\geq z - p_1 \\ X_1 + 2 \,.\, X_2 + 3 \,.\, X_3 + p_2 \,.X_4 &\leq 100 + p_2 \\ 2 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 + X_3 + p_3 \,.X_4 &\leq 70 + p_3 \\ X_1 + 2 \,.\, X_2 + X_3 + p_4 \,.X_4 &\leq 60 + p_4 \qquad (7.\ 26) \\ X_1 &\geq 20 \\ X_2 &\geq 10 \\ X_j \geq 0 \;, \; j = 1, 2, 3, 4; & \\ f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , X_4) &= X_4 \\ \max f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , X_4) & \end{aligned}$$

unde: z - este nivelul aspirat (aşteptat, cel puţin egal cu z) al funcţiei obiectiv ;

p_1 - violarea permisă a funcţiei obiectiv;

p_2 - violarea permisă a restricţiei (1) din relaţiile (7.25);

p_3 - violarea permisă a restricţiei (2) din relaţiile (7.25);

p_4 - violarea permisă a restricţiei (3) din relaţiile (7.25).

Pentru: $z = 1900$; $p_1 = 100$; $p_2 = 20$; $p_3 = 10$; $p_4 = 15$, din (7.26) rezultă (7.27), se rezolvă cu programul Qsb.

$$\begin{aligned} 30.X_1 + 40.X_2 + 50.X_3 - 100 \,.\, X_4 &\geq 1800 \\ X_1 + 2 \,.\, X_2 + 3 \,.\, X_3 + 20 \,.\, X_4 &\leq 120 \\ 2 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 + X_3 + 10 \,.\, X_4 &\leq 80 \\ X_1 + 2 \,.\, X_2 + X_3 + 15. \, X_4 &\leq 75 \qquad (7.\ 27) \end{aligned}$$

$X_1 \geq 20$

$X_2 \geq 10$

$X_j \geq 0$, j = 1, 2, 3, 4;

$f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , X_4) = X_4$

max $f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , X_4)$

Soluţia optimă: $X_1 = 20$, $X_2 = 10$, $X_3 = 16.66$, $X_4 = 0.33$, max $f_1 = 0.33$

Valoarea funcţiei obiectiv a problemei de programare liniară iniţiale este:

f = 30 . 20 + 40 . 10 + 50 . 16.66 = 1833 > z - 100 = 1900 – 100 = 1800

Se pot lua diverse valori pentru z, p_1, p_2, p_3, p_4 .

2. Optimizarea fluxului de piese la prelucrare. Ordonanţarea fabricaţiei

Ordonanţarea fabricaţiei înseamnă determinarea ordinii optime de prelucrare (minimizarea timpului total de prelucrare, minimizarea timpului total al reglajelor, minimizarea timpului de stagnare a utilajelor etc.) a n produse pe m maşini. Ordonanţarea fabricaţiei se încadrează în programarea operativă a producţiei care este o componentă importantă a managementului producţiei.

Problema ordonanţării fabricaţiei a apărut în literatura de specialitate în 1954 datorită lucrărilor lui S. M. Johnson care propune şi rezolvă problema prelucrării a n produse pe m = 2 maşini, elaborând un algoritm care îi poartă numele.

Principalele obiective ale ordonanţării producţiei sunt:

1. realizarea unei succesiuni tehnologice prescrise şi logice a operaţiilor pentru fiecare produs pus în fabricaţie;

2. încărcarea eficientă a capacităţilor de producţie;

3. minimizarea duratei totale a ciclului de producţie;

4. respectarea maximă a termenelor de livrare a produselor;

5. facilitarea alegerii variantei eficiente de program prin procesul decizional;

6. controlul, urmărirea şi actualizarea programului de producţie;

7. utilizarea forţei de muncă minime în activitatea de programare şi urmărire a producţiei.

Ordonanţarea fabricaţiei se poate face prin algoritmi exacţi, care dau solutia optima şi prin algoritmi euristici, care nu furnizează în general soluţiile optime, ci soluţii suboptimale, suficient de bune, din vecinătatea soluţiei optime. Se reduce timpul de calcul prin utilizarea algoritmilor euristici.

Pentru ordonanţarea fabricaţiei prin ***algoritmi euristici*** se pot utiliza reguli de prioritate, cum ar fi:

- ordinea sosirii, primul venit primul servit - FIFO;
- cel mai mic termen de predare;
- cel mai costisitor reper;
- cel mai mare timp de execuţie;
- cel mai mic timp de execuţie ;
- cel mai mare timp total de prelucrare a reperului;
- cel mai mic timp total de prelucrare a reperului;
- cea mai importantă comandă;
- cel mai mare timp de prelucrare pentru operaţiile premergătoare;
- cel mai mic timp de prelucrare pentru operaţiile premergătoare ;
- LIFO (ultimul venit, primul servit).

Nici una dintre aceste reguli (sau alte reguli) nu are o superioritate clară faţă de altele, utilizarea lor depinde de datele concrete ale companiei. Se pot utiliza reguli combinate de prioritate pentru

ordonanţare, de tipul conjunctiv, disjunctiv, aditiv, multiplicativ, multicriterial sau alfel. În utilizarea indicatorilor de prioritate funcţia obiectiv nu este specificată. Dacă se obţin mai multe soluţii de ordonanţare acceptabile se poate selecta prin decizii multicriteriale cea mai bună soluţie.

2.1. Ordonanţarea a n piese pe două maşini.

Pe două maşini A si B trebuie prelucrate n piese diferite, fluxul de lucru este în ordinea A, B . Fiecare piesă P_i are timpii de prelucrare pe cele două maşini daţi de vectorul (a_i , b_i) , i = 1, 2, ..., n. Se consideră că timpul de pregătire dintre lucrări este zero sau dacă există este acelaşi pentru fiecare piesă P_i , indiferent de lucrarea precedentă şi de aceea se poate include în timpul de prelucrare, deci în (a_i , b_i) , i = 1, 2, ..., n. Timpul de transport de la maşina A la maşina B se consideră zero.

Ordonanţarea fabricaţiei pe mai multe maşini se poate realiza cu rezultate bune prin metode euristice, cum ar fi: programarea secvenţială, programarea în aval, programarea în amonte. Evaluarea eficacităţii ordonanţării realizate se poate face prin respectarea termenelor de predare impuse, iar dacă există termene depăşite trebuie ţinut cont de penalizări.

Algoritmul lui Johnson

- Se determină:

$$\min_{1 \le i \le n} (a_i , b_i)$$

- Dacă minimul este a_k , se va planifica mai întâi piesa P_k .
- Dacă minimul este b_k , lucrarea P_k se va planifica ultima.

Se scoate piesa P_k din coada de aşteptare la prelucrare, rămânând n - 1 piese de prelucrat şi se repetă cei patru paşi ai algoritmului.

Roy a dat **o altă formulare** a algoritmului lui **Johnson:**

- se determină mulţimile disjuncte P_1 si P_2 :

$P_1 = \{ i \mid a_i \le b_i \}$;

$P_2 = \{ i \mid a_i > b_i \}$;

$P_1 \cup P_2 = \{ 1, 2, ..., n \}$;

- mulţimea P_1 se ordonează după numerele crescătoare a_1 , iar P_2 după numerele descrescătoare b_i ;

multimea $P_1 \cup P_2$ reprezintă ordinea optimă de trecere a celor n piese la cele două maşini.

Exemplul nr. 2.1.

Să se determine ordonanţarea a n = 6 piese pe m = 2 maşini A şi B , dacă timpii de prelucrare pe fiecare maşină, exprimaţi în minute, sunt în tabelul nr. 2.1 şi timpii de transport de la maşina A la B sunt zero. Se va face şi graficul Gantt corespunzător.

Tabelul nr. 2.1

Piesa P_i	**a_i**	**b_i**	**Succesiunea**
P_1	8	7	4
P_2	4	1	6
P_3	9	5	5

P_4	6	10	3
P_5	2	11	1
P_6	3	13	2

Succesiunea de prelucrare este: P_5 , P_6 , P_4 , P_1 , P_3 , P_2 .

Timpul total de prelucrare rezultă din graficul Gantt ce se va construi, T = 49 u.t.

2.2. Ordonanţarea fabricaţiei a n produse pe m = 2 maşini cu timpul de transport $t_i > 0$

Ordonanţarea fabricaţiei a n produse pe m = 2 maşini A şi B, când timpul de transport al produsului P_i de la maşina A la maşina B este t_i , $t_i > 0$, timpii de prelucrare sunt a_i , b_i , i = 1, 2, ..., n, se face utilizând algoritmul Johnson pentru timpii a'_i , b'_i ,

unde:

$a'_i = a_i + t_i$ (1)

$b'_i = b_i + t_i$, i = 1, 2,..., n.

Succesiunea de prelucrare obţinută pentru timpii a'_i , b'_i i = 1, 2, ..., n; este succesiunea de prelucrare pentru problema iniţială cu timpii a_i , b_i , i = 1, 2, ..., n; Se va face graficul Gantt pentru problema iniţială.

Exemplul nr. 2.2.

Să se determine ordonanţarea a n = 6 piese pe m = 2 maşini A şi B , dacă timpii de prelucrare pe fiecare maşină sunt în tabelul nr. 2. 2 şi timpii de transport de la maşina A la B sunt diferiţi de zero, exprimaţi în minute. Se va face şi graficul Gantt corespunzător.

Tabelul nr.2.2 se transformă cu relaţiile (1) în tabelul nr.2.3 căruia i se aplică algoritmul lui Johnson, rezultând succesiunea de prelucrare, care se notează apoi şi în tabelul nr.2.2.

Tabelul nr. 2.2.

Piesa P_i	**a_i**	**b_i**	**t_i**	**Succesiunea**
P_1	8	7	3	4
P_2	4	1	1	6
P_3	9	5	4	5
P_4	6	10	2	2
P_5	2	11	5	1
P_6	3	13	7	3

Tabelul nr. 2.3

Piesa P_i	**a'_i**	**b'_i**	**Succesiunea**
P_1	11	10	4
P_2	5	2	6
P_3	13	9	5
P_4	8	12	2
P_5	7	16	1
P_6	10	20	3

Succesiunea de prelucrare este: P_5 , P_4 , P_6 , P_1 , P_3 , P_2 . Se va face graficul Gantt.

2. 3. Ordonanţarea fabricaţiei a n produse pe m = 3 maşini

La modul general ordonanţarea fabricaţiei a n produse pe m = 3 maşini este suficient de complicată. Ordonanţarea fabricaţiei a n produse pe m = 3 maşini A, B, C, în ordinea A, B, C, cu timpii de prelucrare daţi prin vectorul: (a_i , b_i , c_i), i = 1, 2, ..., n , dacă este verificată una din următoarele două condiţii, (2) sau (3) este relativ simplă:

$$\min_{1 \le i \le n} a_i \ge \max_{1 \le i \le n} b_i \qquad (2)$$

sau

$$\min_{1 \le i \le n} c_i \ge \max_{1 \le i \le n} b_i \quad . \qquad (3)$$

Problema se reduce la ordonanţarea a n piese pe două maşini.

Se calculează:

$$a'_i = a_i + b_i \qquad (4)$$
$$b'_i = c_i + b_i \ , \ i = 1, 2, ..., n;$$

şi se aplică algoritmul lui Johnson considerând n piese pe două maşini A' şi B' cu timpii (a'_i , b'_i), i = 1, 2, ..., n , rezultând succesiunea cea mai bună de prelucrare, soluţie suboptimală, din vecinătatea soluţiei optime.

Exemplul nr. 2.3.

Să se determine ordonanţarea a n = 6 piese pe m = 3 maşini A, B şi C dacă timpii de prelucrare pe fiecare maşină sunt în tabelul nr. 2.4 şi timpii de transport de la maşina A la B, respectiv B la C sunt zero. Se va face şi graficul Gantt corespunzător.

Sunt verificate relaţiile (2), deci tabelul nr. 2.4 se transformă cu relaţiile (4) în tabelul nr.2.5 căruia i se aplică algoritmul lui Johnson, rezultând succesiunea de prelucrare, care se notează apoi şi în tabelul nr.2. 4.

Tabelul nr. 2.4

Piesa P_i	**a_i**	**b_i**	**c_i**	**Succesiunea**
P_1	8	3	6	4
P_2	11	1	5	6
P_3	9	5	4	1
P_4	12	6	2	5
P_5	10	2	7	3
P_6	13	7	9	2

Tabelul nr. 2.5

Piesa P_i	**a'_i**	**b'_i**	**Succesiunea**
P_1	11	9	4
P_2	12	6	6
P_3	14	9	1
P_4	18	8	5
P_5	12	9	3
P_6	20	16	2

Succesiunea de prelucrare este: P_3 , P_6 , P_5 , P_1 , P_4 , P_2 . Se va face graficul Gantt.

2.4. Ordonanţarea fabricaţiei a n piese pe m maşini, m > 3

Modelele matematice exacte de rezolvare a ordonanţării producţiei a n produse pe m maşini (m > 3) sunt dificil de aplicat din cauza complexităţii şi timpului de calcul foarte mare, dar există algoritmi euristici care nu dau soluţia optimă, ci o soluţie suboptimală, deci apropiată de soluţia optimă şi acceptabilă.

Ordonanţarea fabricaţiei a n produse pe m maşini, $m \geq 3$, se poate face teoretic prin rezolvarea unei probleme de programare liniară disjunctivă, care are forma :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.X_j \geq a_i \quad , \text{i} = 1, 2,..., \text{m};$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj}.X_j \geq b_k \quad \text{sau} \quad \sum_{j=1}^{n} c_{kj}.X_j \geq c_k \quad , \text{k} = 1,2,..., \text{p}, \ \text{p} \in \text{N} \qquad \textbf{(5)}$$

$$X_j \geq 0 \ , \text{j} = 1, 2, \ldots , \text{n};$$

$$\text{f} = \sum_{j=1}^{n} d_j.X_j$$

$$\min \text{f}$$

Rezolvarea problemei date de relaţiile (5) se reduce la rezolvarea a 2^p probleme de programare liniară şi alegerea dintre ele a aceleia pentru care funcţia obiectiv f are valoarea cea mai mică. Se pot utiliza programe calculator: Qsb, Dsspom, Lindo etc. pentru rezolvarea celor 2^p probleme de programare liniară, dar timpul de calcul este mare.
De exemplu, pentru o întreprindere este posibil să existe în modelul (5) p = 10 condiţii disjunctive, deci în acest caz ar trebui rezolvate $2^{10} = 1024$ probleme de programare liniară. Din cauza cantităţii mari de calcule, în practică, în funcţie de valorile concrete ale lui n şi m, precum şi a condiţiilor concrete ale întreprinderii, se utilizează algoritmi euristici , cu care se obţine în general o soluţie suboptimală.din vecinătatea soluţiei optime.

2. 5. Ordonanţarea fabricaţiei a n piese pe o maşină

Ordonanţarea fabricaţiei a n piese pe o maşină (*minimizarea timpului necesar efectuării tuturor reglajelor*) se poate face utilizând algoritmii NB (Next Best) şi NB cu origine variabilă. În cazul unui utilaj complex care necesită o durată mare de reglaj pentru trecerea de la prelucrarea unui tip de produs (piesă) la altul, se pune problema determinării succesiunii optime a celor n produse (piese) programate să fie prelucrate pe acel utilaj. Optimizarea o înţelegem în sensul de minimizare a timpului necesar efectuării tuturor reglajelor. Se notează cu t_{ij} timpul total de reglare a utilajului după terminarea prelucrării piesei P_i pentru a începe prelucrarea piesei P_j . Cu cât produsul precedent P_i este mai asemănător cu produsul următor P_j , cu atât timpul t_{ij} va fi mai mic. Valorile t_{ii} nu au sens , deoarece ar urma acelaşi produs după el însuşi. Sunt posibile n! = 1.2. … . n succesiuni de prelucrare a celor n piese şi nu este rentabil din punct de vedere al timpului de calcul să se ia toate permutările posibile ale celor n piese. Se reduce timpul de calcul prin utilizarea algoritmilor euristici care nu furnizează în general soluţiile optime, ci soluţii suboptimale, suficient de bune, din vecinătatea soluţiei optime.

Algoritmul NB - Next **B**est**.** (în engleză: Next = următorul, Best = cel mai bun).
Este un algoritm euristic. Produsul (piesa) următor P_j se alege cel care prezintă cel mai mic timp de reglare a utilajului după executarea produsului (piesei) precedent P_i . Se presupune că primul produs ce se prelucrează este P_1 , iar t_{ii} nu are sens. Cele n produse (piese) se pun în tabel, tabelul nr.2. 6, iar pe fiecare linie se trec timpii de reglare a utilajului la trecerea de la prelucrarea produsului din căsuţa stângă a fiecărei linii la celelalte piese, iar diagonala principală nu se ia în calcul şi nici coloana lui P_1 .

Tabelul nr.2. 6

P_j / P_i	P_1	P_2	P_3	…	P_n
P_1	-	t_{12}	t_{13}	…	t_{1n}
P_2	-	-	t_{23}	…	t_{2n}
…	…	…	…	…	…
P_n	-	t_{n2}	t_{n3}	…	-

Se determină

$t_{1k} = \min \{ t_{1i} , i = 2, 3, …, n \}$,

deci după P_1 se prelucrează P_k . Pe linia lui P_k , deci linia k, se determină din nou valoarea minimă pentru piesele neprelucrate ,

$t_{kl} = \min \{ t_{kj} , j = 2, 3,…, n\}$,

rezultând a treia piesă de prelucrat piesa P_l , iar procedeul se repetă. Timpul total de reglaj va fi: $T = t_{1k} + t_{kl} + …$.

Algoritmul NB (Next Best) cu origine variabilă.

Alegerea succesiunii de prelucrare este asemănătoare cu cea din algoritmul NB , dar se vor considera n-1 succesiuni în loc de una.

1) **P_1 , P_2** , P_k , …

După piesa P_1 se prelucrează piesa P_2, apoi de pe linia 2 se determină timpul minim pentru a obţine a treia piesă de prelucrat P_k.

$t_{2k} = \min \{ t_{2j} , j = 3, 4, …, n \}$, apoi se continuă cu algoritmul NB

şi timpul total de reglaj va fi : $T_1 = t_{12} + t_{2k} + …$

2) **P_1 , P_3** , P_h , …

După piesa P_1 se prelucrează piesa P_3 , apoi de pe linia 3 se determină timpul minim pentru a obţine a treia piesă de prelucrat P_h .

$t_{3h} = \min \{ t_{3j} , j = 2, 4, 5, …, n \}$, apoi se continuă cu algoritmul NB

şi timpul total de reglaj va fi : $T_2 = t_{13} + t_{3h} + …$

3) **P_1 , P_4** , P_l , …

După piesa P_1 se prelucrează piesa P_4 , apoi de pe linia 4 se determină timpul minim pentru a obţine a treia piesă de prelucrat P_l .

$t_{4l} = \min \{ t_{4j} , j = 2, 4, 5, …, n \}$,

$T_3 = t_{14} + t_{4l} + …$

…

n-1) **P_1 , P_n** , P_r , …

$T_{n-1} = t_{1, n} + t_{nr} + …$

Se determină:

$$T_0 = \min \{ T_k , k = 1, 2, …, n-1\}$$

care va da succesiunea de prelucrare cea mai bună şi se va alege.

Exemplul nr.2.4.

Să se determine ordonanţarea a n = 7 piese pe un utilaj cu timpii de reglaj exprimaţi în aceleaşi unităţi de timp (u.t.) şi daţi în tabelul nr. 2.7

Tabelul nr.2. 7

P_j / P_i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1	-	7	5	9	4	10	12
P_2	-	-	8	3	11	5	17
P_3	-	2	-	7	18	13	9
P_4	-	6	9	-	1	3	8
P_5	-	11	4	5	-	16	7

P_6	-	4	7	2	8	-	5
P_7	-	5	6	15	3	19	-

1.) *Rezolvare* prin **algoritmul NB**.

Minimul de pe linia lui P_1 este $t_{15} = 4$, deci după piesa P_1 se va pelucra piesa P_5 . Valoarea minimă pe linia lui P_5 este $t_{53} = 4$, deci după piesa P_5 se va pelucra piesa P_3 , iar minimul de pe linia lui P_3 este $t_{32} = 2$, deci urmează la prelucrare după piesa P_3 piesa P_2. Valoarea minimă pe linia lui P_2 pentru piesele neprelucrate este $t_{24} = 3$, deci urmează la prelucrare P_4 . Valoarea minimă pe linia lui P_4 pentru piesele neprelucrate este $t_{46} = 3$, urmând la prelucrare P_6. Ultima piesă de prelucrat rămâne P_7 şi $t_{67} = 5$.

Succesiunea de prelucrare este : P_1 , P_5 , P_3 , P_2 , P_4 , P_6 , P_7 .

Timpul total de reglaj a utilajului este:

$T = t_{15} + t_{53} + t_{32} + t_{24} + t_{46} + t_{67} = 4 + 4 + +2 + 3 + + 3 + 5 = 21$ u.t.

2.) *Rezolvare* prin **algoritmul NB cu origine variabilă**.

1. P_1 , P_2 , …

Minimul pe linia lui P_2 este $t_{24} = 3$, deci după piesa P_2 urmează la prelucrare P_4 . Valoarea minimă pe linia lui P_4 pentru piesele neprelucrate este $t_{45} = 1$, urmând la prelucrare P_5 . Valoarea minimă pe linia lui P_5 pentru piesele neprelucrate este $t_{53} = 4$, deci după piesa P_5 se va pelucra piesa P_3 , iar minimul de pe linia lui P_3 este $t_{37} = 9$, deci urmează la prelucrare după piesa P_3 piesa P_7 . Ultima piesă de prelucrat rămâne P_6 şi $t_{76} = 5$. Succesiunea de prelucrare este : P_1 , P_2 , P_4 , P_5 , P_3 , P_7 , P_6 . Timpul total de reglaj a utilajului este: $T_1 = t_{12} + t_{24} + t_{45} + t_{53} + t_{37} + t_{76} = 7 + 3 + 1 + 4 + + 9 + 19 = 43$ u.t.

2. P_1 , P_3 , …

Minimul pe linia lui P_3 este $t_{32} = 2$, deci după piesa P_3 urmează la prelucrare P_2 . Se determină în mod analog succesiunea de prelucrare : P_1 , P_3 , P_2 , P_4 , P_5 , P_7 , P_6 şi timpul total de reglaj a utilajului este: $T_2 = t_{13} + t_{32} + t_{24} + t_{45} + t_{57} + t_{76} = 5 + 2 + 3 + 1 + 7 + 19 = 37$ u.t.

3. P_1 , P_4 , …

Se obţine succesiunea: P_1 , P_4 , P_5 , P_3 , P_2 , P_6 , P_7 şi timpul total de reglaj a utilajului este:

$T_3 = t_{14} + t_{45} + t_{53} + t_{32} + t_{26} + t_{67} = 9 + 1 + 4 + 2 + 5 + 5 = 26$ u.t.

4. P_1 , P_5 , …

Se obţine succesiunea: P_1 , P_5 , P_3 , P_2 , P_4 , P_6 , P_7 şi timpul total de reglaj a utilajului este:

$T_4 = t_{15} + t_{53} + t_{32} + t_{24} + t_{46} + t_{67} = 4 + 4 + 2 +3 + 3 + 5 = 21$ u.t.

5. P_1 , P_6 , …

Se obţine succesiunea: P_1 , P_6 , P_4 , P_5 , P_3 , P_2 , P_7 şi timpul total de reglaj a utilajului este:

$T_5 = t_{16} + t_{64} + t_{45} + t_{53} + t_{32} + t_{27} = 10 + 2 + 1 +4 + 2 + 17 = 36$ u.t.

6. P_1 , P_7 , …

Se obţine succesiunea: P_1 , P_7 , P_5 , P_3 , P_2 , P_4 , P_6 şi timpul total de reglaj a utilajului este:

$T_6 = t_{17} + t_{75} + t_{53} + t_{32} + t_{24} + t_{46} = 12 +3 + 4 +2 + 3 + 3 = 27$ u.t.

Min $\{T_i , i = 1, 2,…, 6\}$ = min $\{43. 37, 26, 21, 36, 27\} = 21 = T_4$

Succesiunea cea mai bună: P_1 , P_5 , P_3 , P_2 , P_4 , P_6 , P_7 .

<u>Succesiunea cea mai defavorabilă.</u>

Dacă se ia ca şi *criteriu de alegere timpul maxim* în algoritmul NB sau în algoritmul **NB** cu origine variabilă, se obţine succesiunea de prelucrare cea mai defavorabilă, nedorită.

Maximul de pe linia lui P_1 este $t_{17} = 12$, deci după piesa P_1 se va pelucra piesa P_7 . Valoarea maximă pe linia lui P_7 este $t_{76} = 19$, deci după piesa P_7 se va pelucra piesa P_6 , iar maximul de pe linia lui P_6 este $t_{65} = 8$, deci urmează la prelucrare după piesa P_6 piesa P_5. Valoarea maximă pe linia lui P_5 pentru piesele neprelucrate este $t_{52} = 11$, deci urmează la prelucrare P_2 . Valoarea maximă pe linia lui P_2 pentru piesele neprelucrate este $t_{23} = 8$, urmând la prelucrare P_3. Ultima piesă de prelucrat rămâne P_4 şi $t_{34} = 7$.

a) Succesiunea de prelucrare cea mai defavorabilă, nedorită, obţinută prin NB este : : P_1 , P_7 , P_6 , P_5 , P_2 , P_3 , P_4 Timpul total de reglaj a utilajului este:

$T_{d1} = t_{17} + t_{76} + t_{65} + t_{52} + t_{23} + t_{34} = 12 + 19 + 8 + 11 + 8 + 7 = 65$ u.t.

, rezultând un interval de încadrare a timpului de reglaj al utilajului $f \in [21, 65]$ u.t.

b) Dacă se consideră succesiunea : P_1 , P_6 , P_5 , P_2 , P_7 , P_4 , P_3 , iar timpul total de reglaj a utilajului este: $T_{d2} = t_{16} + t_{65} + t_{52} + t_{27} + t_{74} + t_{43} = 10 + 8 + 11 + 17 + 15 + 9 = 70$ u.t. , rezultând un interval de încadrare a timpului de reglaj al utilajului mai mare $f \in [21, 70]$ u.t.

c) Dacă se consideră succesiunea : P_1 , P_6 , P_3 , P_5 , P_2 , P_7 , P_4 , iar timpul total de reglaj a utilajului este: $T_{d3} = t_{16} + t_{63} + t_{35} + t_{52} + t_{27} + t_{74} = 10 + 7 + 18 + 11 + 17 + 15 = 78$ u.t. , şi rezultă un interval de încadrare a timpului de reglaj al utilajului mult mai mare $f \in [21, 78]$ u.t.

2. 6. Ordonanţarea fabricaţiei a n piese pe m maşini , m>2

La modul general ordonanţarea fabricaţiei a n piese pe m maşini , m>2, este complexă, are nevoie de calcule multe. Din cauza cantităţii mari de calcule, în practică, în funcţie de valorile concrete ale lui n şi m, m>2, precum şi a condiţiilor concrete ale firmei, se utilizează algoritmi euristici , cu care se obţine în general o soluţie suboptimală din vecinătatea soluţiei optime.

De exemplu, ordonanţarea fabricaţiei a n piese pe m = 4 maşini cu timpii de prelucrare (minute) (a_i, b_i, c_i, d_i) , i = 1, 2, …, n; se pot considera succesiuni rezultate din:

- Min M = Min(a_i - b_i, i = 1, 2, …, n), se ordonează crescător M.
- Min M = Min(c_i - d_i , i = 1, 2, …, n), se ordonează crescător M.
- Min M = Min(b_i - c_i , i = 1, 2, …, n), se ordonează crescător M.
- Min M = Min(a_i + b_i + c_i + d_i , i = 1, 2, …, n) , se ordonează crescător M.

Din succesiunile de prelucrare se alege varianta cu timpul mai mic.

Exemplul nr. 2. 6

Se consideră ordonanţarea fabricaţiei a n = 5 piese pe m = 4 maşini A, B, C, D, cu timpii de prelucrare (minute) a_i, b_i, c_i, d_i din tabelul nr. 2.9. Ordinea de prelucrare pe maşini este A, B, C, D. Trebuie determinată succesiunea de prelucrare optimă în sensul minimizării timpului total de prelucrare. Sunt 5! = 1.2.3.4.5 = 120 succesiuni de prelucrare, este dificil de determinat ordinea de prelucrare optimă. Se poate determina euristic o succesiune astfel:

1. Min(a_i - b_i , i = 1, 2, …, 5)

Min M = Min(a_i - b_i, i = 1, 2, …, 5) = min(3, -1, -7, -1, 2) = -7 = a_3 - b_3 , se ordonează crescător M. Succesiunea de prelucrare: P_3, P_4, P_2, P_5, P_1 este o soluţie suboptimală, se face graficul Gantt, se obţine T_1 = 36 minute, T < 83 . Total aşteptări (din T = 36) = 0 + 1 + 16 + 11 = 28 minute.

. Tabelul nr. 2. 9

P_i	a_i	b_i	c_i	d_i	$a_i + b_i + c_i + d_i$
P_1	5	2	4	3	14
P_2	6	7	1	4	18
P_3	1	8	2	6	17
P_4	4	5	3	7	19
P_5	3	1	6	5	15
Total	19	23	16	25	83

2. Min(c_i - d_i , i = 1, 2, …, 5)

Min M = Min(c_i - d_i , i = 1, 2, …, 5) = min (1, -3, -4, -4, 1) = -4 = $c_3 – d_3 = c_4 – d_4$, se ordonează crescător M. Succesiuni de prelucrare:

P_3, P_4, P_2, P_5, P_1 ; T_2 = 36 minute;

P_3, P_4, P_2, P_1, P_5 ; T_3 = 38 minute;

P_4, P_3, P_2, P_5, P_1 ; T_4 = 38 minute;

P_4, P_3, P_2, P_1, P_5 ; T_5 = 41 minute;

Sunt soluţii suboptimale, se face graficul Gantt, se obţin T_i = …

3. Min M = Min(b_i - c_i , i = 1, 2, …, 5) = min (-2, 6, 6, 2, -5) = -5 = b_5 - c_5 , se ordonează crescător M. Succesiuni de prelucrare:

P_5, P_1, P_4, P_2, P_3; T_6 = 41 minute;

P_5, P_1, P_4 , P_3, P_2; T_7 = 35 minute;

Sunt soluţii suboptimale, se face graficul Gantt, se obţine T_i = …

4. Min M = Min(a_i + b_i + c_i + d_i , i = 1, 2, …, 5) = min (14, 18, 17, 19, 15) = 14 = a_1 + b_1 + +c_1 + d_1 ,
   Se ordonează crescător M. Succesiunea de prelucrare: P_1, P_5, P_3, P_2, P_4; T_8 = 39 minute;

Se alege succesiunea : P_5, P_1, P_4 , P_3, P_2 , cu timpul total cel mai mic dintre cele 8 considerate, T_7 = 35 minute.

2.7. Ordonanţarea fabricaţiei a n piese utilizând priorităţile

Prioritatea este utilizată pentru a determina ordinea în care comenzile clienţilor ar trebui procesate. Priorităţile trebuie să reflecte necesităţile curente ale clienţilor pentru comenzile din aceeaşi linie de fabricaţie sau grup de utilaje. Selectarea unor metode de ordonanţare depinde de obiectivele programării producţiei şi de criteriile de apreciere a rezultatelor.

Se pot utiliza diverse reguli de fabricatie pe baza de prioritati, cum ar fi: FIFO - First In First Out (Primul Venit Primul Servit), LIFO - Last In First Out (Ultimul Venit Primul Servit), SPT - Shortest Processing Time (SOT - Shortest Operation Time) (Cel mai scurt timp de fabricaţie), RANDOM - ordine aleatoare, EDD – Earliest Due Date (Cel mai mic termen de finalizare, de livrare) etc.

1. FIFO - First In First Out, deci Primul Venit Primul Servit, se ordonează comenzile în *ordinea în care au ajuns la firmă*.
2. LIFO - Last In First Out, deci Ultimul Venit Primul Servit, regula este inversa lui FIFO, adică ordonează comenzile în *ordinea inversă în care au sosit*.
3. SPT - Shortest Processing Time sau SOT - Shortest Operation Time, deci se ordonează comenzile în *ordinea*: *Cel mai scurt (mic) timp de fabricaţie*.
4. RANDOM - aleator, deci se ordonează comenzile în *ordine aleatoare.*
5. EDD - Earliest Due Date, deci Cel mai mic termen de finalizare, de livrare.

Exemplul nr. 5.

Dacă comenzile pentru fabricare sunt primite în ordinea: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 , cu datele din tabelul nr.8, atunci ordinea de ordonanţare, deci şi de fabricare, va fi (diferită de la o metodă la alta):

1. FIFO: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 ;
2. LIFO: P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1 ;
3. SPT : P_5 , P_6 , P_2 , P_4 , P_1 , P_3;
4. RANDOM: (se generează 6 numere aleatoare, care dau ordinea de fabricaţie, de exemplu: 4,1,6,5,3,2): P_4, P_1, P_6, P_5, P_3, P_2 ;
5. EDD: P_2, P_4, P_5, P_3, P_6, P_1 .

Tabelul nr. 8

P_i	Timpul de fabricare [ore]	Termenul de livrare [zile]	Succesiunea (depinde de metodă)
P_1	8	7	
P_2	4	1	
P_3	9	5	
P_4	6	2	
P_5	2	4	
P_6	3	6	

Metode matematice de modelare a fluxurilor materiale - C10

8. ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR

Definiţia 8.1.

Se numeşte **multigraf orientat** perechea **G = (X , U),** în care X este o mulţime de elemente oarecare, iar $U \subset X \times X \times N$.

Elementele mulţimii X sunt numite vârfuri ale multigrafului, iar elementele mulţimii U sunt numite arcele multigrafului. Pentru arcul $\mathbf{u_i = (x_j , x_k , h)}$ componenta a treia h are rolul de numerotare a arcelor care nu pot fi diferenţiate altfel. Se va considera că mulţimile X şi U sunt finite, iar cardinalul mulţimii X, notat cu n = $|X|$, se numeşte ordinul multigrafului. Se notează cu m cardinalul mulţimii U şi m se numeşte dimensiunea multigrafului G. Se vor considera doar multigrafuri finite.

Definiţia 8.2.

Un multigraf G se numeşte **p-graf** dacă între oricare două vârfuri ale sale există cel mult p arce care să aibă acelaşi sens şi G are două vârfuri între care există exact p arce care au acelaşi sens.

Definiţia 8.3.

Un 1-graf se numeşte **graf orientat**.

Pentru un graf orientat G = (X , U), $U \subset X \times X$, deci U este şi poate fi privită şi ca o relaţie binară.

Definiţia 8.4.

Orice mulţime X, finită sau nu, dar numărabilă, prevăzută cu o relaţie binară Γ , se numeşte graf şi se va nota G = (X , Γ) sau G = (X , U).

Se poate pune în evidenţă aplicaţia Γ care poate fi univocă (deci este funcţie) sau multivocă când pentru $x \in X$, rezultă $\Gamma(x) \in P(X)$.

Se vor considera grafuri finite.

În limba română se utilizează pentru substantivul graf pluralul grafuri , dar şi grafe.

Deci, un **graf orientat** sau un **1-graf** este perechea:

$$\mathbf{G = (X , U)}$$

formată dintr-o mulţime finită de elemente X, numite vârfuri, şi dintr-o familie U (sau Γ) de perechi de vârfuri care se numesc arce.

Evident, $U \subseteq X \times X$ sau $\Gamma \subseteq X \times X$

Se va nota:

$$\mathbf{X = \{ x_1 , x_2 , \dots , x_n \}}$$

$$\mathbf{U = \{ u_1 , u_2 , \dots , u_m \}},\ m, n \in N^*$$

Pentru arcul $\mathbf{u_i = (x_j , x_k)}$ vârful x_j se numeşte extremitatea iniţială sau originea arcului, iar vârful x_k este extremitatea terminală. Dacă extremităţile unui arc coincid, atunci arcul se numeşte **buclă**.

Exemplul nr. 8.1.

Multigraful din fig. nr. 8.1. este un 2-graf, are mulţimea vârfurilor X şi mulţimea arcelor U.

X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

U = {(1, 2, 1); (2, 3, 1); (2, 3, 2); (3, 4, 1); (4, 7, 1); (7, 6, 1); (7, 6, 2); (6, 5, 1); (5, 1, 1)}

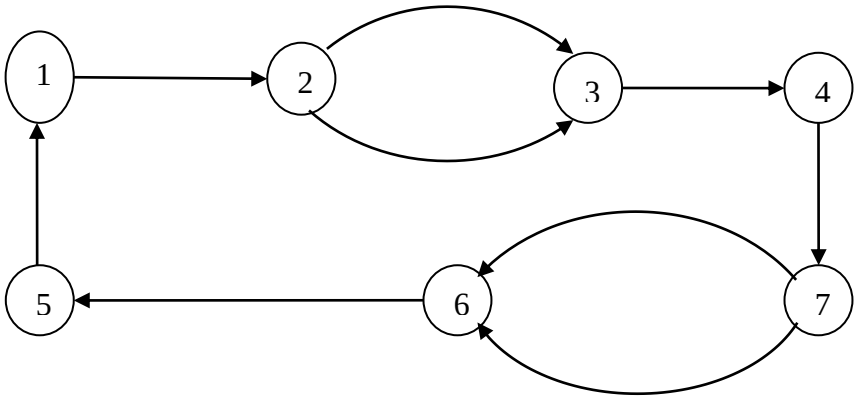


Fig. nr. 8.1.

Exemplul nr. 8.2.

Graful orientat din fig. nr. 8.2. are mulţimea vârfurilor X şi mulţimea arcelor U.

X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

U = {(1, 1); (1, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 4); (4, 5); (5, 6); (6, 1); (6, 3)}

În vârful 1 arcul (1, 1) este o buclă.

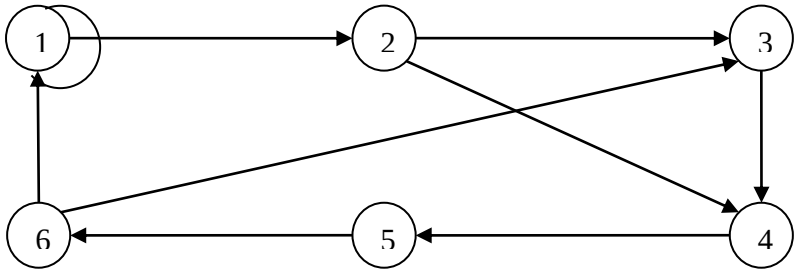


Fig. nr. 8.2.

Un drum într-un graf este succesiunea de vârfuri legate fiecare de următorul prin câte un arc.

Se notează drumul d:

$$\mathbf{d = [\, x_1 , x_2 , \ldots , x_k , \ldots , x_p \,],\ p < n}$$

sau prin arcele ce-l formează:

$$\mathbf{d = [(x_1 , x_2) , \ldots , (x_k , x_{k+1}) , \ldots , (x_{p-1} , x_p)]}$$

Vârful x_1 se numeşte extremitatea iniţială a drumului d, iar x_p este extremitatea terminală. Dacă drumul are proprietatea că extremitatea iniţială a primului arc coincide cu extremitatea terminală a ultimului arc, el se numeşte **circuit**.

Un **drum** se numeşte **elementar** dacă nu utilizează de două ori acelaşi vârf, iar în caz contrar este neelementar.

Un **drum** se numeşte **simplu** dacă nu utilizează de două ori acelaşi arc, adică toate arcele drumului sunt distincte două câte două, iar în caz contrar este compus.

Un drum elementar este şi simplu, dar reciproca nu este adevărată.

Un **graf parţial** este graful $G_1 = (X , U_1)$ obţinut din graful $G = (X , U)$ dacă se suprimă cel puţin un arc, $U_1 \subset U$.

Exemplul nr. 8.3.

În fig. nr. 8.3. drumul $d = [X_2 , X_3 , X_2 , X_4 , X_2]$ este simplu, dar nu este elementar.

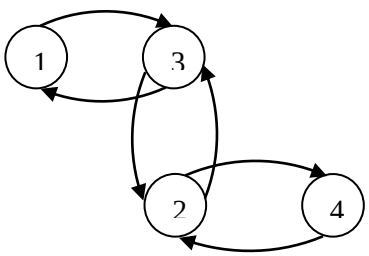


Fig. nr. 8.3.

Un **drum** se numeşte **eulerian** dacă este simplu şi trece prin toate arcele grafului.

Un **drum** se numeşte **hamiltonian** dacă este elementar şi trece prin toate vârfurile grafului**,** deci dacă trece numai o dată prin fiecare din vârfurile grafului.

Un **graf** orientat G = (X , U) se numeşte **hamiltonian** dacă există un circuit elementar care trece prin toate vârfurile grafului, iar un astfel de circuit se numeşte circuit hamiltonian.

Subgraful generat de o mulţime de vârfuri A $\subset$ X al unui graf G = (X , U) este graful $G_A = (A , U_A)$,

unde:

$$U_A = \{ u_i \mid u_i = (x , y), x \in A , y \in A , u_i \in U \},$$

deci, este graful cu mulţimea de vârfuri A şi mulţimea arcelor compuse din toate arcele grafului G care au ambele extremităţi în A.

Graful parţial al unui graf G generat de o submulţime de arce V $\subset$ U este graful {X, V} , deci se obţine din graful G prin suprimarea arcelor din U / V.

Un **graf** este **tare conex** dacă între oricare două vârfuri distincte ale grafului există un drum.

O **componentă tare conexă** a unui graf G = (X , U) este un subgraf G_A al lui G care este tare conex şi care este maximal în raport cu incluziunea faţă de această proprietate, adică ($\forall$) x $\in$ X - A, subgraful lui G generat de A U { x } nu mai este tare conex.

Două vârfuri $x_i , x_j \in X$ ale grafului G = (X , U) se numesc echivalente, $x_i \equiv x_j$, dacă există un drum de la x_i la x_j şi unul de la x_j la x_i . Aceasta relatie ($\equiv$) este reflexivă, simetrică şi tranzitivă, deci este relaţie de echivalenţă. Clasele de echivalenţă determinate de această relaţie de echivalenţă sunt componentele tare conexe: G_{A1}, G_{A2}, ... , G_{Ak} ale lui G, care verifică:

$$\mathbf{A_i \cap A_j = \Phi \ , i \neq j \ , A_i, A_j \neq \Phi \ ;} \ i, j = 1, 2, \dots , k.$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \mathbf{= X}$$

Pentru graful orientat G = (X , U) se defineşte o funcţie l:

$$\mathbf{l : U \quad R_+ \cup \{ 0 \}}$$

care asociază fiecărui arc u valoarea sa l(u) care poate avea semnificaţia concretă de distanţă dintre extremităţile arcului u, durata trecerii de la extremitatea iniţială la extremitatea terminală a arcului u, costul trecerii de la extremitatea iniţială la extremitatea terminală a arcului u, capacitatea arcului respectiv etc. Lungimea unui drum este egală cu numărul arcelor sale. Valoarea unui drum este suma valorilor arcelor care îl compun. Distanţa minimă dintre două vârfuri ale grafului G este lungimea minimă a valorii drumurilor care unesc cele două vârfuri. Lungimea, în sensul de valoare, unui arc poate fi interpretată în diferite moduri: fie ca o distanţă euclidiană, fie ca un timp asociat unei anumite operaţii care se desfăşoară între două evenimente marcate prin cele două extremităţi ale unui arc, fie ca un cost asociat unei operaţii reprezentate printr-un arc al unui graf.

Pentru graful G = (X , U) se defineşte matricea conexiunilor (tranziţiilor), numită şi matrice de adiacenţă:

$$A = (a_{ij}) \ , \quad \text{i, j = 1, 2, ..., n;}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , daca \quad (X_i, X_j) \in U \\ 0 & , daca \quad (X_i, X_j) \notin U \end{cases}$$

De exemplu, pentru graful din exemplul nr. 8.2., matricea de adiacenţă este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.2. Determinarea drumurilor hamiltoniene minime

Se consideră graful G,

G =(X, U) ,
X = { x_1, x_2, ... , x_n } ,
U = {(x_i , x_j) | x_i , x_j ∈ X },

Valoarea (lungimea) arcelor din graful considerat poate reprezenta timpul de prelucrare sau costul prelucrării unor piese.

Problema se rezolvă prin determinarea drumurilor hamiltoniene în graful G considerat şi alegerea celui de lungime minimă.

Se poate rezolva problema determinării drumurilor hamiltoniene cu **algoritmul lui FOULKES** cu care în prima fază se determină componentele tare conexe ale grafului G.
Calculele ce se fac folosesc operatiile + si × din algebra Boole {0 , 1} :

0 + 0 = 0 ;	0 × 0 = 0	**(8.3)**
0 + 1 = 1 ;	0 × 1 =0	
1 + 0 = 1 ;	1 × 0 = 0	
1 + 1 = 1 ;	1 × 1 = 1	

De fapt + corespunde **disjuncţiei** (sau), iar **×** corespunde conjuncţiei (şi) din logica matematică bivalentă.

a) Algoritmul lui FOULKES

1. Se scrie matricea booleană A a grafului G, G = (X , U) :

A = (a_{ij}) , i,j = 1, 2, ...,n.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ,daca \quad (X_i, X_j) \in U \\ 0 & ,daca \quad (X_i, X_j) \notin U \end{cases}$$

2. Fie

$$M = A + E ,$$

unde E este matricea unitate de ordinul n, iar adunarea este booleană.
Deci:

Matricea M se ridică la puteri succesive până când două puteri consecutive ale lui M sunt egale. Dacă n este mare, se caută k minim :

$2^k < n$, astfel încât:

$$M^{2^k} = M^{2^{k-1}} \qquad \textbf{(8.4)}$$

Înmulţirea matricelor se face tot în sens boolean.

M^{2^k}

3. În matricea M se suprimă liniile de rang $i_1, i_2 , \ldots , i_p$ care sunt formate numai cu cifra 1 şi coloanele corespunzătoare care sunt formate numai cu cifra 0 şi se obţin astfel vârfurile: $X_{i1}, X_{i2}, \ldots ,X_{ip}$ care formează prima clasă de echivalenţă G_{M1} (componentă tare conexă).

4. Dacă M_R este matricea rămasă din matricea M după suprimarea liniilor şi coloanelor la etapa 3, se aplică etapa 3. lui M_R, iar dacă nu este posibil, se aplică etapele 2 şi 3 , determinând a doua clasă de echivalenţă G_{M2} . Procedeul continuă până se obţin toate clasele de echivalenţă ale grafului G: $G_{M1}, G_{M2}, \ldots ,G_{Mm}$, iar pentru vârfurile fiecărei clase de echivalenţă G_{Mi} , i = 1, 2, . . . ,m , se trasează arcele care păstrează incidenţele din graful G.

b) <u>Determinarea drumului hamiltonian minim</u>

1. Se aplică algoritmul lui Foulkes pentru a se determina componentele tare conexe ale grafului G considerat**.**

2. Între vârfurile acestor componente se consideră **incidenţele lor din graful G .**

3.Trecând succesiv de la o componentă conexă la alta, se stabilesc toate drumurile hamiltoniene ale grafului G .

4. Pentru drumurile hamiltoniene determinate se calculează :

$$\min \quad T = \min \sum_{(i,j) \in DH} t_{ij} \qquad \textbf{(8.5)}$$

sau

$$\min \quad C = \min \sum_{(i,j) \in DH} c_{ij}$$

Suma se ia pentru (X_i , X_j) $\in$ DH
Unde

DH = drumul hamiltonian,

se obţine drumul hamiltonian de lungime minimă (timp total minim sau sau cost total minim).

Exemplul nr. 8. 4.

Se presupune că trebuie prelucrate n = 7 piese P_1 , P_2 , …, P_7 pe o maşină, iar la trecerea de la prelucrarea piesei P_i la prelucrarea piesei P_j se consumă timpul t_{ij} , $t_{ij} > 0$; i, j =1, 2, . . . , 7, $i \neq j$, urmărindu-se minimizarea timpului total de nefuncţionare a maşinii. Se va asocia acestei probleme un graf orientat G, fig. nr.8.4,

$$\mathbf{G = (X , U) ,}$$
$$\mathbf{X = \{x_1, x_2, . . . , x_7\} ,}$$
$$\mathbf{U = \{ u_1, u_2, . . . , u_m\},}$$

ale cărui vârfuri x_i , i = 1, 2, . . . , 7; sunt cele 7 piese, iar valoarea (lungimea) arcului de la vârful P_i la vârful P_j este t_{ij} ,

$$\mathbf{l (P_i , P_j) = t_{ij}} , \ i, j =1, 2,. . . , 7; \ i \neq j.$$

Problema determinării succesiunii optime de prelucrare a celor 7 piese se reduce la problema determinării drumului hamiltonian minim în graful G considerat, deci se aplică algoritmul lui Foulkes.
Matricea booleană (de adiacenţă, a tranziţiilor) a grafului G este A. Se calculează matricea M, M^2 , M^4 , M^5 .

Din calcul rezultă $M^4 = M^5$, vârfurile 2, 3, 6 au în matricea M^4 liniile corespunzătoare 2, 3, 6 formate din elemente egale cu 1 şi coloanele formate numai din elemente egale cu 0, exceptând elementele de la intersecţia acestora, care sunt 1, rezultă prima componentă tare conexă este formată din vârfurile 2, 3, 6., $C_1 = G_{M1} = \{2, 3, 6\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 1&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^2 \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 1&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 1&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \cdot M^1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix} =$$

$$= M^4$$

Se elimină (taie) din matricea M^4 liniile şi coloanele 2, 3, 6 şi rezultă matricea M_1 . În matricea M_1 liniile 1, 2 care corespund vîrfurilor 1 şi 4 au toate elementele egale cu 1 şi coloanele corespunzătoare au elementele 0, exceptând cele de la intersecţie, deci se obţine a doua componentă tare conexă $C_2 = G_{M2} = \{1, 4\}$. Se suprimă (taie) liniile şi coloanele 1, 2 din M_1 care corespund vârfurilor 1 şi 4, rezultă matricea M_2 .

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1&1\\ 1&1 \end{pmatrix}$$

Rezultă a treia componentă tare conexă $C_3 = G_{M3} = \{5, 7\}$. Dacă se reaşează vârfurile grafului din fig. nr. 8.4 după componentele tare conexe la care aparţin, graful dat se va reprezenta ca în fig. nr.8.5. Se determină drumul de lungime minimă.

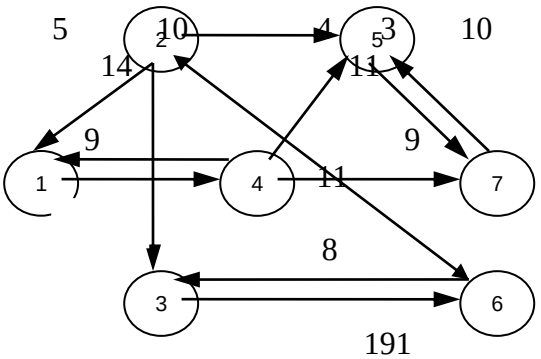


Fig. Nr. 8.4.

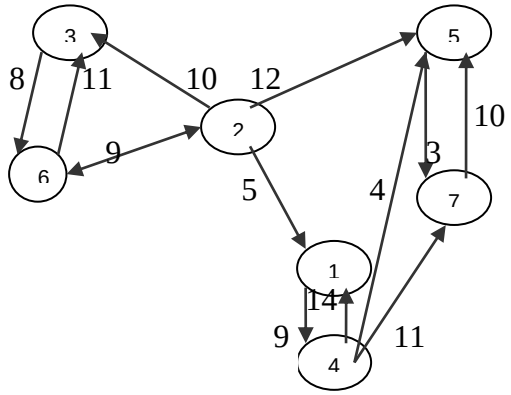


Fig. Nr.8.5.

Un drum se numeşte *hamiltonian* dacă trece numai o dată prin fiecare din vârfurile grafului. Din fig. nr.8.5. rezultă două drumuri hamiltoniene:

- primul drum trece prin vârfurile: 3, 6, 2, 1, 4, 7, 5 şi are lungimea $l(D_1)$,

$l(D_1) = 8 + 9 + 5 + 9 + 11 + 10 = 52$ u.t.;

- al doilea drum trece prin vârfurile: 3, 6, 2, 1, 4, 5, 7 şi are lungimea $l(D_2)$,

$l(D_2) = 8 + 9 + 5 + 9 + 4 + 3 = 38$, deci drumul hamiltonian de lungime minimă este D_2 .

Trebuie prelucrate n = 7 piese P_1 , P_2 , …, P_7 pe o maşină, iar la trecerea de la prelucrarea piesei P_i la prelucrarea piesei P_j se consumă timpul $t_{i\,j}$, $t_{i\,j} > 0$; i , j =1, 2, . . . , 7, $i \neq j$, iar minimizarea timpului total de nefuncţionare a maşinii se realizează dacă se prelucrează astfel: P_3 , P_6 , P_2 , P_1 , P_4 , P_5 , P_7 .

8.3. Metode de planificare, programare şi control în reţea. Metoda drumului critic

Metodele teoriei grafurilor se pot utiliza în managementul prin proiecte. Un proiect este reprezentat de o mulţime de operaţii sau activităţi specifice, a căror înlănţuire este în funcţie de dependenţele tehnologice impuse şi conduce la atingerea unui obiectiv, a unui scop dinainte precizat. Un proiect sau o lucrare oricât de complexă, poate fi descompusă în lucrări simple sau operaţii denumite activităţi şi în etape denumite evenimente care marchează sfârşitul sau începutul activităţilor. Evenimentele se reprezintă prin vârfuri (noduri) într-un graf reţea, iar activităţile prin arce sau săgeţi ale grafului reţea. Astfel, un proiect sau o lucrare oricât de complexă se reprezintă printr-un graf reţea format din vârfuri şi arce.

Principalele metode de drum critic sunt: CPM, PERT, CPM/COST, PERT/COST, MPM. Se pot utiliza diverse programe pe calculator, de exemplu: Qsb, Dsspom, Microsoft Project etc.

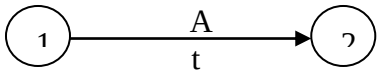
8.3.1. Metoda CPM

Metoda CPM – Critical Path Method a apărut în 1957 în SUA şi se utilizează la conducerea unor proiecte cu durata activităţilor bine cunoscute, deci deterministe. Structura proiectului de condus este reprezentată printr-un graf (o reţea) cu activităţile pe arce, fiecărei activităţi asociindu-i-se o singură valoare, durata sa fixă. O lucrare oricât de complexă poate fi descompusă în lucrări (operaţii) simple denumite activităţi şi în etape denumite evenimente care

marchează sfârşitul sau începutul activităţilor. Evenimentele se reprezintă prin vârfuri (noduri), iar activităţile prin arce în graful reţea.

Se vor prezenta câteva reguli de întocmire a reţelelor de drum critic.

1. Modul de reprezentare a activităţilor şi evenimentelor:



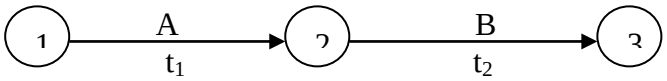
unde: 1, 2 – sunt evenimente (noduri);

A – denumirea activităţii;

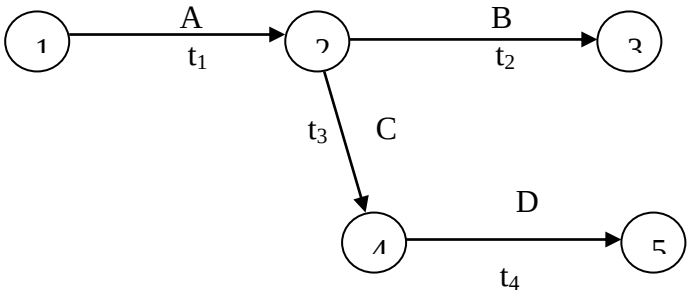
t – durata activităţii.

2. Activităţile se reprezintă în ordine tehnologică sau logică. Activităţile pot fi succesive, când se înşiruie în ordine tehnologică sau simultane (paralele) în cazul în care pornesc din acelaşi evenimente, se desfăşoară paralel în timp.

Activităţi succesive:



Activităţi simultane (paralele):



3. O activitate nu poate începe înainte ca activitatea precedentă să se fi terminat.

Activităţile sunt de trei feluri:

- activităţi propriu-zise, consumă timp şi resurse;
- aşteptări, consumă numai timp;
- activităţi fictive, nu consumă nici resurse, nici timp , t = 0 . Activităţile fictive au un rol logic, se utilizează pentru elimina anumite confuzii şi se reprezintă prin arce întrerupte, linie punctată.

4. Nu este permisă existenţa circuitelor în nici o reţea de drum critic.
5. O reţea trebuie să posede un singur nod iniţial şi un singur nod final.
6. Orice alt nod în afară de cel iniţial şi cel final trebuie să posede cel puţin o activitate precedentă şi cel puţin o activitate următoare.

Termenele evenimentelor

Se consideră o reţea de drum critic cu evenimentele notate de la 1 la n. Pentru fiecare eveniment al reţelei se pot calcula două termene:

- termenul minim al evenimentului j , notat T_{Ej} , E de la Early (în engleză) – devreme, curând, reprezintă termenul cel mai devreme de realizare a evenimentului j şi este egal

cu lungimea (valoarea) drumului maxim ales dintre toate drumurile care duc de la evenimentul iniţial 1 la evenimentul j, adică:

$$T_{Ej} = \max\{L(D_{1j})\} \qquad (8.6)$$

unde D_{1j} este un drum oarecare de la evenimentul iniţial 1 la evenimentul j, iar $L(D_{1j})$ este valoarea (lungimea) sa. Prin valoarea unui drum se va înţelege suma duratelor activităţilor componente ale drumului.

- termenul maxim al evenimentului j, notat T_{Lj} , L de la Late (în engleză) – târziu, reprezintă termenul cel mai târziu admisibil de realizare a evenimentului j, astfel ca durata minimă a proiectului să nu fie depăşită (durata minimă a proiectului este T_{En}). Rezultă că termenul maxim T_{Lj} este egal cu diferenţa dintre durata totală a proiectului T_{En} şi durata drumului cel mai lung care duce de la evenimentul j la evenimentul final n, deci:

$$T_{Lj} = T_{En} - \max\{L(D_{jn})\} \qquad (8.7)$$

sau

$$T_{Lj} = \min\{T_{En} - L(D_{jn})\} \ .$$

Deci, pentru a-l obţine pe T_{Lj} se parcurge reţeaua în sens invers, de la evenimentul final n la evenimentul j, scăzând din durata minimă T_{En} a proiectului lungimea fiecărui drum D_{jn} (parcurs în sens invers) şi alegând cel mai mic rezultat.

Evenimentele pentru care $T_{Ej} = T_{Lj}$ sunt *critice* şi nu admit nici o amânare, aceste evenimente determinând *drumul critic*. Toate celelalte evenimente admit o întârziere maximă egală cu $T_{Lj} - T_{Ej}$.

Termenele şi rezervele de timp ale activităţilor

Fiecărui activităţi (i, j) îi corespund patru termene:

- termenul minim de începere $T_S^{min}(i, j)$;
- termenul minim de terminare $T_F^{min}(i, j)$;
- termenul maxim de începere $T_S^{max}(i, j)$;
- termenul maxim de terminare $T_F^{max}(i, j)$.

Termenul minim de începere al activităţii (i, j) este egal cu termenul minim al evenimentului i:

$$T_S^{min}(i, j) = T_{Ej} = \max\{L(D_{1j})\}$$

Termenul minim de terminare al activităţii (i, j) , $T_F^{min}(i, j)$, este egal cu termenul minim de începere adunat cu durata sa t_{ij}:

$$T_F^{min}(i, j) = T_S^{min}(i, j) + t_{ij}$$

Termenul maxim de terminare al activităţii (i, j) , $T_F^{max}(i, j)$, este egal cu termenul maxim al evenimentului j:

$$T_F^{max}(i, j) = T_{Lj} = \min\{T_{En} - L(D_{jn})\}$$

Termenul maxim de începere al activităţii (i, j) , $T_S^{max}(i, j)$, este egal cu termenul maxim de terminare al activităţii (i, j) minus durata activităţii t_{ij} :

$$T_S^{max}(i, j) = T_F^{max}(i, j) - t_{ij}$$

Rezervele sau **marjele de timp** ale unei activităţi (i, j) sunt:

- rezerva totală $R_T(i, j)$;
- rezerva liberă $R_L(i, j)$;
- rezerva intermediară $R_I(i, j)$;
- rezerva sigură sau independentă $R_S(i, j)$.

Rezerva totală a activităţi (i, j), notată $R_T(i, j)$, reprezintă intervalul de timp maxim cu care se poate mări durata t_{ij} fără ca durata totală a proiectului să fie depăşită.

$$R_T(i, j) = T_{Lj} - (T_{Ej} + t_{ij}) = T_F^{max}(i, j) - T_F^{min}(i, j)$$

O activitate (i, j) este critică dacă rezerva sa totală este zero:

$$R_T(i, j) = 0$$

Consumarea rezervei totale a activităţii (i, j) $R_T(i, j)$ implică anularea rezervelor activităţilor precedente şi ale celor următoare activităţii (i, j).

Rezerva sau **marja liberă** a activităţii (i, j) , notată $R_L(i, j)$, reprezintă intervalul de timp maxim cu care se poate mări durata t_{ij} , fără ca durata totală a proiectului să fie depăşităşi fără să se anuleze rezervele activităţilor următoare ale activităţii (i, j).

$$R_L(i, j) = T_{Ej}$$

Consumarea rezervei libere $R_L(i, j)$ conduce la anularea rezervelor activităţilor precedente activităţii (i, j).

Rezerva intermediară a activităţii (i, j) , notată $R_I(i, j)$, reprezintă intervalul de timp maxim cu care se poate mări durata activităţii (i, j), notată t_{ij}, fără să se depăşească durata totală a proiectului şi fără să se anuleze rezervele activităţilor precedente.

$$R_I(i, j) = T_{Lj} - (T_{Li} + t_{ij})$$

Consumarea rezervei intermediare $R_I(i, j)$ conduce la anularea rezervelor activităţilor următoare activităţii (i, j).

Rezerva sigură sau **independentă** $R_S(i, j)$ este intervalul de timp maxim cu care poate fi mărită durata t_{ij} fără a depăşi durata totală a proiectului şi fără a afecta în vreun fel rezervele celorlalte activităţi. .

$$R_S(i, j) = \max \{T_{Ej} - (T_{Li} + t_{ij}), 0\}$$

8.3.2. Metoda PERT – **P**rogram **E**valuation and **R**eview **T**echnique.

Metoda PERT a fost elaborată în SUA în laboratoarele marinei militare americane, în 1958. Metoda PERT se utilizează în conducerea proiectelor din domeniul cercetării şi dezvoltării, la care duratele activităţilor sunt cunoscute cu un grad mare de imprecizie, considerând duratele activităţilor ca variabile aleatoare. Această metodă utilizează reţele cu activităţile pe arce, durata fiecărei activităţi fiind evaluată prin trei estimări: pesimistă, cea mai probabilă şi optimistă.

Durata optimistă a activităţii (i, j), notată a_{ij} , corespunde cazului când există condiţiile cele mai favorabile pentru desfăşurarea activităţii.

Durata cea mai probabilă a activităţii (i, j), notată m_{ij} , este estimarea cu cea mai mare şansă de realizare în condiţii normale de lucru.

Durata pesimistă a activităţii (i, j), notată b_{ij} , este intervalul de timp maxim de realizare a activităţii (i, j), corespunzător împrejurărilor cele mai defavorabile de execuţie, excluzând calamităţile naturale.

Pentru fiecare activitate (i, j) sunt verificate inegalităţile:

$$0 < a_{ij} \le m_{ij} \le b_{ij}$$

Variabila aleatoare t_{ij} este durata activităţii (i, j) şi verifică inegalităţile:

$$0 < a_{ij} \le t_{ij} \le b_{ij}$$

Utilizând cele trei estimări ale activităţii (i, j): pesimistă, cea mai probabilă şi optimistă, t_{ij} se calculează ca o medie ponderată cu relaţia (8.8).

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} + 4.m_{ij} + b_{ij}}{6} \qquad (8.8)$$

Dispersia este (8.9).

$$\sigma_{ij}^2 = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2 \qquad (8.9)$$

Durata fiecărei activităţi se va calcula cu relaţia (8.8) şi se va scrie pe arcul corespunzător al reţelei, iar în continuare se procedează ca la metoda CPM pentru determinarea drumului critic. Durata totală a proiectului T_e este o variabilă aleatoare cu media şi dispersia egale cu suma mediilor şi respectiv dispersiilor duratelor activităţilor critice componente.

$$T_e = \sum_{(i,j) \in DC} t_{ij} \qquad (8.10)$$

$$\sigma^2 = \sum_{(i,j) \in DC} \sigma_{ij}^2 \qquad (8.11)$$

S-a notat cu DC drumul critic determinat şi cu T_e timpul (durata) estimat.

Se poate determina probabilitatea de realizare a unui proiect utilizând factorul de probabilitate Z şi tabelele corespunzătoare.

$$Z = \frac{T_{pl} - T_e}{\sqrt{\sigma^2}} \qquad (8.12)$$

T_{pl} reprezintă termenul (durata) planificat al proiectului, T_e este durata estimată cu (8.10) .

Exemplul nr. 8. 5.

Problemă de drum critic – metoda CPM.

Un proiect determinist are structura, activităţile şi evenimentele în graful reţea din figura nr. 8.6. Se cere să se determine durata minimă a proiectului şi drumul critic. Se va rezolva cu programele Qsb şi Dsspom. Din rezolvarea cu programul Qsb rezultă durata minimă a proiectului este 24 unităţi de timp. Sunt două drumuri critice formate din activitatile:

DC1: A, F, G, I, M, N, D ;

DC2: A, F, G, C, D.

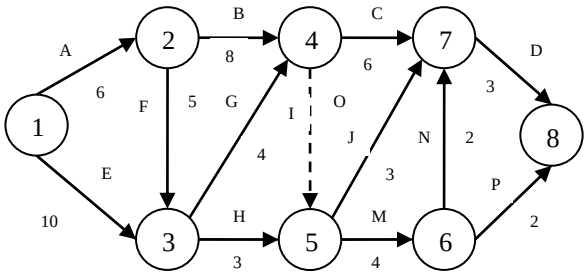
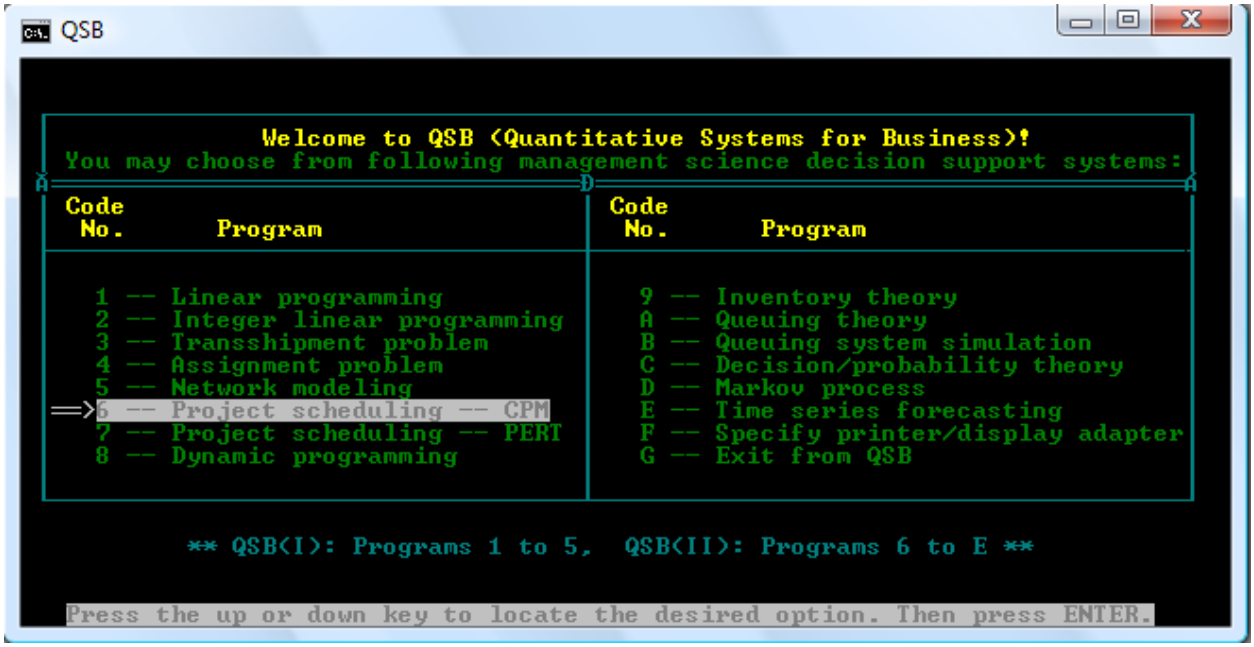


Fig. Nr.8.6.



Exemplul nr. 8.6.

Problemă de drum critic în tabelul nr.8.1.– metoda PERT. Graful reţea corespunzător este în fig.nr.8.7. Se va rezolva cu programele Qsb şi Dsspom.

Tabelul nr. 8.1.

Nr.	Activitate	Noduri	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
1	A_4	(1, 2)	3	4	6
2	B_4	(2, 3)	2	4	5
3	A_6	(3, 4)	1	2	3
4	C_2	(2, 5)	3	6	8
5	E_4	(5, 6)	3	4	5
6	F_2	(6, 7)	1	2	3
7	G3	(6, 8)	2	3	5
8	H_6	(7, 9)	5	6	7
9	I_{12}	(9, 10)	10	12	13
10	J_1	(10, 11)	1	2	4
11	K_2	(11, 12)	2	3	4

12	O_1	(4, 5)	0	0	0
13	O_2	(8, 9)	0	0	0

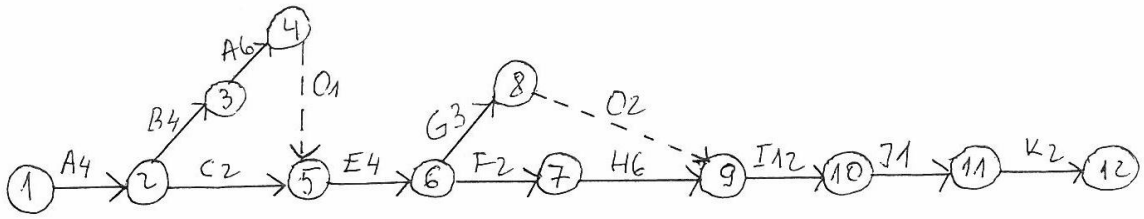
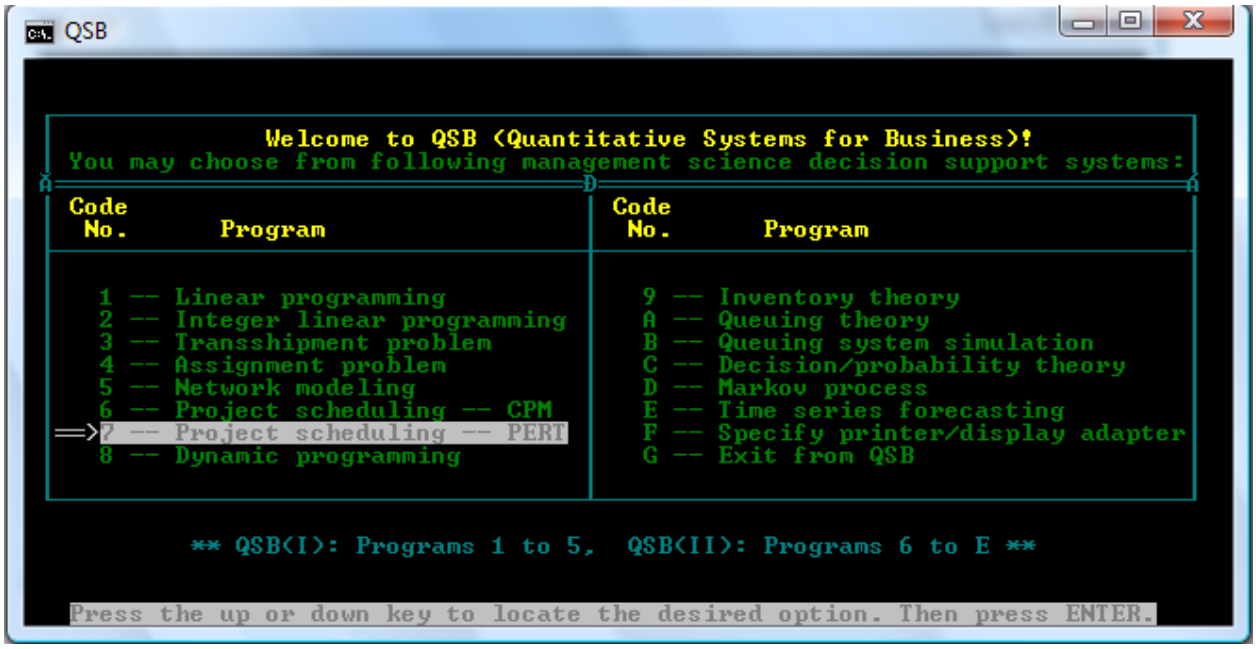


Fig. Nr. 8.7

Din rezolvarea cu programul Qsb rezultă durata minimă a proiectului este 39 unităţi de timp.
Sunt două drumuri critice formate din activitatile:
DC1:A4, B4, A6, O1, E4, F2, H6, I12, J1, K2;
DC2: A4, C2, E4, F2, H6, I12, J1, K2.



3. Metoda CPM/COST

Parametrii analizaţi de metoda CPM/COST sunt timpul şi costul, iar aplicarea acestei metode are ca scop minimizarea costului total al proiectului în baza unei relaţii de dependenţă liniară între costul şi durata unei activităţi.

4. Metoda PERT/COST

Metoda PERT/COST este o dezvoltare a metodei PERT, care, pe lângă parametrul timp, analizează şi parametrul cost.

5. Metoda MPM

Metoda MPM – Metra Potential Method (Metodes des Potentiels Metra) a fost dezvoltată în Franţa de Bernard Roy în 1958 şi utilizează reţele cu activităţile situate pe noduri, fiecare nod reprezentând o activitate, iar evenimentele pe arce.

8.4. Grafuri neorientate

Un graf neorientat este un sistem G = (X , U) , cu X o mulţime de elemente numite vârfurile grafului U şi o mulţime de perechi neordonate de vârfuri.

Un element din mulţimea U se numeşte muchie. O muchie se mai notează $[X_i , X_j]$ sau $\overline{(X_i, X_j)}$ pentru a o deosebi de arcul (X_i , X_j) dintr-un graf orientat. Reprezentarea geometrică a muchiilor unui graf neorientat se deosebeşte de cea a arcelor prin faptul că lipseşte orientarea de la arce.

Un graf neorientat se mai notează $\overline{G}$ = (X, $\overline{U}$) pentru a nu fi confundat cu graful orientat G = (X , U).

Deci, în cazul grafurilor neorientate în comparaţie cu grafurile orientate, se vorbeşte de muchii în loc de arce, de lanţ în loc de drum, de ciclu în loc de circuit.

Oricărui drum într-un graf orientat îi corespunde un lanţ într-un graf neorientat, dar nu oricărui lanţ îi corespunde un drum.

Orice circuit este un ciclu, dar nu şi invers.

Un graf neorientat este conex dacă între oricare două vârfuri distincte ale sale există cel puţin un lanţ. Un graf orientat tare conex este conex, dar reciproca nu este adevărată.

8.5. Drumuri de valoare optimă în grafuri

Pentru graful G = (X , U) se consideră matricea conexiunilor (tranziţiilor), numită şi matrice de adiacenţă:

$$A = (a_{ij}) \text{ , } \quad i, j = 1, 2, ..., n;$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , daca \quad (X_i, X_j) \in U \\ 0 & , daca \quad (X_i, X_j) \notin U \end{cases}$$

Graful G este valorizat dacă există o funcţie l,

$$l: U \rightarrow R^+ \cup \{0\}$$

$$l(u_k) = l((X_i, X_j)) = v_{ij} \quad , \quad (\forall)\,(X_i, X_j) \in U \qquad (8.13)$$

$$v_{ij} \geq 0$$

Valoarea v_{ij} se numeşte valoarea arcului (X_i, X_j), poate avea semnificaţia de cost, durată, distanţă etc.

Drumul d în graful G, $d = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ are valoarea egală cu suma valorilor arcelor care îl compun, deci:

$$L(d) = \sum_{k=1}^{p} l(u_k)$$

Două vârfuri sunt adiacente dacă sunt distincte şi sunt unitate printr-un arc. Două arce sunt adiacente dacă sunt distincte şi au o extremitate comună. Dacă un vârf nu este extremitatea nici unui arc el este numit vârf izolat.

Se consideră: mulţimea $B_2 = \{0, 1\}$, operaţiile $\oplus$ şi $\otimes$ definite în tabelele nr. 8.2 şi nr.8.3, care formează algebra Boole $(B_2, \oplus, \otimes)$.

Tabelul nr. 8. 2

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabelul nr. 8. 3

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

Se notează cu $\overline{A^k}$ puterea k a matricii A în algebra Boole $(B_2, \oplus, \otimes)$, $k \in N$, $k \geq 2$; şi cu A^k puterea k a matricii A în corpul numerelor reale (R, +, .), $k \in N$, $k \geq 2$, adică cu operaţiile + şi . obişnuite.

$$\overline{A}^{(k)} = (\overline{a_{ij}}^{(k)}) \text{ , } k = 2, 3, \ldots; i, j = 1, 2, \ldots, 5;$$

$$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \text{ , } k = 2, 3, \ldots; i, j = 1, 2, \ldots, 5;$$

Pentru k = 2, $\overline{A^2}$ se interpretează astfel:

- în matricea $\overline{A^2}$ linia i arată existenţa drumurilor de lungime 2 (compuse din 2 arce) de la X_i la vârfurile în coloanele cărora apare 1 pe această linie;
- în matricea $\overline{A^2}$ coloana j arată existenţa drumurilor de lungime 2 incidente interior în X_j şi venind de la vârfurile pe a căror linie apare 1 în această coloană.

În mod analog se interpretează în matricile $\overline{A^3}$, $\overline{A^4}$, ..., $\overline{A^k}$ pentru drumurile de lungime 3, 4, ..., k.

În A^k , puterea k a matricii A în corpul numerelor reale (R, +, .), $k \in N$, $k \geq 2$, se dau câteva valori lui k.

Pentru k = 2, $A^2 = (a_{ij}^{(2)})$ se interpretează astfel:

- linia i arată numărul drumurilor distincte (elementare sau nu) de lungime 2 (formate din 2 arce) de la X_i la fiecare din vârfurile grafului, deci $a_{ij}^{(2)}$ reprezintă numărul drumurilor de lungime 2 de la X_i la X_j ;

- coloana j conţine numărul drumurilor distincte (elementare sau nu) de lungime 2 care ajung în X_j venind din vârfurile grafului, deci $a_{ij}^{(2)}$ reprezintă numărul drumurilor din X_i în X_j de lungime 2.

În mod analog se interpretează în matricile A^3 , A^4, …, A^k pentru drumurile de lungime 3, 4, …, k.

Matricile $\overline{A^3}$, $\overline{A^4}$, ..., $\overline{A^k}$ se pot obţine prin calcul direct în algebra Boole (B_2, +, .) sau din matricile A^3 , A^4, …, A^k punând 1 în loc de $a_{ij}^{(k)} > 1$.

Dacă în vârful X_i există o buclă, atunci pe diagonala principală $a_{ii} = 1$.

Teorema 8.1.

Dacă un graf nu are circuite, atunci există λ pentru care $A^\lambda = O$, deci şi $\overline{A^\lambda} = O$.
(O – matricea zero).

Dacă X_i este un vârf care participă la formarea unui circuit de lungime 2 (elementar sau nu) , atunci la intersecţia liniei i cu coloana i pe diagonala principală vom avea 1 în matricea $\overline{A^2}$, deci $a_{ii}^{(2)} = 1$, circuitul respectiv porneşte din X_i şi ajunge tot în X_i.

În mod analog în matricea $\overline{A^3}$ pentru vârfurile X_i care participă la circuite, elementare sau nu, de lungime 3, $a_{ii}^{(3)} = 1$, în matricea $\overline{A^4}$ pentru circuitele de lungime 4 avem $a_{ii}^{(4)} = 1$.

În general în matricea A^k se va găsi pe diagonala principală în dreptul fiecărui vârf X_i, numărul circuitelor de lungime k (elementare sau nu) la care acesta participă.

Exemplul nr. 8.7.

Se consideră graful definit de matricea A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Graful corespunzător este în fig. Nr.8.8.

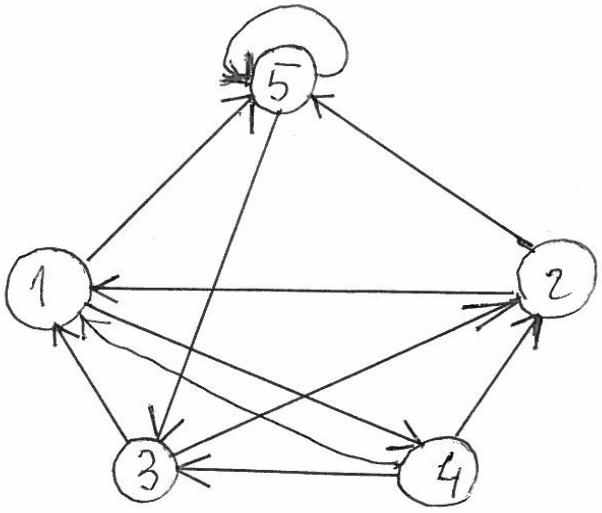


Fig. Nr. 8.8.

În vârful X_5 există o buclă, $a_{55} = 1$.

Se calculează $\overline{A^2}$, $\overline{A^3}$, $\overline{A^4}$ şi A^2 , A^3 , A^4 .

$$\overline{A^2} = A \otimes A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A^3} = A \otimes A \otimes A = \overline{A^2} \otimes A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A^4} = A \otimes A \otimes A \otimes A = \overline{A^3} \otimes A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Coeficienţii care nu aparţin diagonalelor acestor matrici ridicate la diverse puteri ne dau informaţii despre drumuri, iar cei de pe diagonale despre circuite.
Astfel, în exemplul considerat, exemplul nr. 8.7, avem:

- în matricea $\overline{A^2}$ avem: $\overline{a_{11}}^{(2)} = \overline{a_{44}}^{(2)} = \overline{a_{55}}^{(2)} = 1$, deci vârfurile X_1 , X_4 , X_5 participă la câte un circuit de lungime 2, vârful X_1 participă la circuitul elementar: $[X_1 , X_4 , X_1]$, vârful X_4 participă la circuitul elementar: $[X_4 , X_1 , X_4]$, circuitul din X_5 – se parcurge de 2 ori bucla sa ;

- în matricea A^2 , $a_{13}^{(2)} = 2$, deci există 2 drumuri de lungime 2 de la X_1 la X_3 ,
$d_1 = [X_1, X_4 , X_3]$, $d_2 = [X_1 , X_5 , X_3]$;
- în matricea $\overline{A^3}$ avem: $\overline{a_{11}}^{(3)} = \overline{a_{22}}^{(3)} = \overline{a_{33}}^{(3)} = \overline{a_{44}}^{(3)} = \overline{a_{55}}^{(3)} = 1$, deci toate vârfurile grafului considerat participă la circuite de lungime 3;
- în matricea A^3 , $a_{11}^{(3)} = 3$, vârful X_1 participă la 3 circuite de lungime 3:
$[X_1 , X_5 , X_3 , X_1]$, $[X_1 , X_4 , X_3 , X_1]$, $[X_1 , X_4 , X_2 , X_1]$; la fel: $a_{15}^{(3)} = 3$, deci din X_1 în X_5 există 3 drumuri de lungime 3:
$d_1 = [X_1 , X_4 , X_2 , X_5]$,
$d_2 = [X_1 , X_4 , X_1 , X_5]$,
$d_3 = [X_1 , X_5 , X_5 , X_5]$.

Matricile $\overline{A^k}$, $k \geq 4$, sunt pline (toate elementele sunt egale cu 1), ceea ce înseamnă că graful G este tare conex.

Drumuri de valoare minimă

Se consideră graful finit G = (X , U).
Graful G este valorizat, există o funcţie l,

$$l: U \to R^+ \cup \{0\}$$
$$l(u_k) = l((X_i , X_j)) = v_{ij} \quad , \quad (\forall) (X_i , X_j) \in U$$

$$v_{ij} \geq 0$$

Valoarea v_{ij} se numeşte valoarea arcului (X_i , X_j) , poate avea semnificaţia de cost, durată, distanţă etc.

Se notează :

$$E = R_+ \cup \{0\} \cup \{\infty\}$$
$$a \oplus b = \min \{a, b\}$$

$$a \otimes b = a + b \qquad (8.14)$$
$$a \otimes \infty = \infty \otimes a = \infty \ , \ (\forall) a, b \in E , a < \infty .$$

Operaţiile $\otimes$ şi $\oplus$ se extind pentru matrici pătrate cu coeficienţi din E.

Se formează matricea B.

$B = (b_{ij})$, i, j = 1, 2, ..., n;

$$b_{ij} = \begin{cases} v_{ij} & ,dacă \quad (X_i, X_j) \in U \\ \infty & ,dacă \quad (X_i, X_j) \notin U \\ 0 & ,dacă \quad i = j \end{cases} \qquad (8.15)$$

Teorema 8.2.

Dacă se consideră graful G = (X , U) , orientat şi finit, în care se ataşează fiecărui arc $(X_i, X_j) \in U$, valoarea sa $l((X_i, X_j)) = v_{ij}$, se formează matricea $B = (b_{ij})$ conform relaţiei (8.15) care se ridică la puterea k conform relaţiilor (8.14), atunci B^k conţine toate valorile minime ale drumurilor formate din cel mult k arce, aşezate la încrucişarea liniei vârfului din care începe drumul cu coloana celui în care se termină (k<n, n = numărul vârfurilor grafului).

Observaţii

- Drum de valoare minimă ∞ (infinit) înseamnă drum inexistent.
- Matricea

$$B^k = (b_{ij}^{(k)})$$

are semnificaţia :

$b_{ij}^{(k)}$ = valoarea drumului minim de la X_i la X_j format din cel mult k arce.

- Drumurile obţinute prin această metodă sunt elementare (drumul se numeşte elementar dacă nu utilizează de două ori acelaşi vârf).
- Operaţiile (8.14) sunt asociative, deci se poate scurta calculul prin calcularea succesivă a puterilor lui B : B^2, B^4 , B^8 etc.
- Teorema este aplicabilă atât grafurilor cu circuite, cât şi celor fără circuite.
- Dacă există un drum d_{ij} de valoare minimă de la X_i la X_j , atunci principiul optimalităţii ne spune că dacă X_k , $X_l \in d_{ij}$, atunci tronsonul dintre X_k şi X_l al lui d_{ij} are valoare minimă în mulţimea drumurilor dintre X_k şi X_l .
- Teorema este valabilă şi pentru grafuri neorientate, dar avem $v_{ij} = v_{ji}$ şi în enunţ se înlocuiesc arcele cu muchiile şi drumurile cu lanţuri .
- Începând de la un anumit k<n , avem $B^k = B^{k+1} = B^{k+2} = \ldots$, deoarece se epuizează toate posibilităţile de a uni prin drumuri cu valoare minimă vârfurile grafului.
- Matricea B^k dă valorile minime ale tuturor drumurilor posibile în graf între orice perechi de vârfuri, indiferent de lungimile lor (numărul arcelor care le compun).
- Teorema 8.2 oferă numai valorile minime ale drumurilor grafului, nu oferă algoritmul de identificarea drumurilor de valoare minimă. (Se pot utiliza algoritmii Ford, Bellman-Kalaba etc.).
- **Algoritmul pentru identificarea drumurilor de valoare minimă** se poate enunţa astfel:
    1. se formează matricea B utilizând relaţiile (8.15), se calculează B^2 utilizând relaţiile (8.14), iar în matricea B^2 se scot în evidenţă valorile finite apărute în plus sau distincte de cele din matricea B şi se notează indicele de precedenţă (prin ce vârf intermediar trece drumul) , reprezentând drumuri de valoare minimă şi de lungime doi (formate din două arce), care au originea în vârful dat de linia matricii şi cu extremitatea vârful dat de coloana în care se găseşte valoarea determinată;
    2. dacă sunt doi su mai mulţi indici de precedenţă pentru aceeaşi valoare, sunt mai multe drumuri minime distincte prin vârful intermediar corespunzător;
    3. valorile rămase nemarcate sunt ale tranziţiilor între extremităţile cărora nu există drumuri de lungime doi cu valoare mai mică decât a tranziţiei;
    4. se calculează $B^3 = B^2 \otimes B$, $B^4 = B^3 \otimes B$, ..., $B^{k+1} = B^k \otimes B$, $k \in N^*$ etc. până când două puteri consecutive ale lui B coincid. Puterile matricii B se calculează în tabel , într-o căsuţă în partea superioară este trecut drumul sau drumurile, iar în partea inferioară a căsuţelor este trecută valoarea minimă a drumului.

Exemplul nr. 8.8.

Se consideră graful G = (X, U) din figura nr. 8.9. cu valorile arcelor notate pe figură.

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Trebuie determinată matricea drumurilor de valoare minimă ale grafului.

Se scrie matricea B folosind relaţiile (8.15).

Se calculează B^2 utilizând relaţiile (8.14) şi se va scrie tabelar în tabelul nr. 8.4.

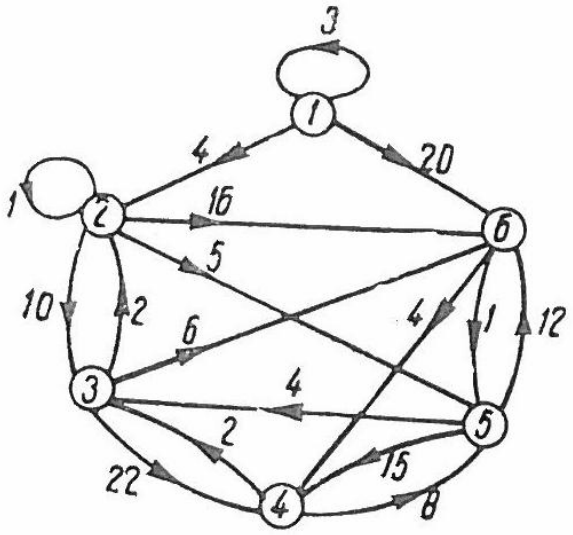


Fig. Nr. 8.9

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & 20 \\ \infty & 0 & 10 & \infty & 5 & 16 \\ \infty & 2 & 0 & 22 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & 15 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tabelul nr. 8.4. Matricea B^2 .

0	4	***2*** <u>14</u>	***6*** <u>24</u>	***2*** <u>9</u>	***2*** 20, <u>20</u>
∞	0	***5*** <u>9</u>	***5, 6*** <u>20</u>	5	***3*** <u>16</u>
∞	2	0	***6*** <u>10</u>	***2, 6*** <u>7</u>	6
∞	***3*** <u>4</u>	2	0	8	***3*** <u>8</u>
∞	***3*** <u>6</u>	4	15	0	***3*** <u>10</u>
∞	∞	***5*** <u>5</u>	4	1	0

În matricea B^2 din tabelul nr.8.4. , $b^{(2)}_{13} = 14$ în loc de $b_{13} = \infty$ din matricea B şi s-a subliniat valoarea 14, iar deasupra s-a scris ***2*** , deoarece:

$b^{(2)}_{13} = 14 = \min (0 + \infty, \underline{4 + 10}, \infty + 0, \infty + 2, \infty + 4, 20 + \infty)$,

$14 = 4 + 10 = b_{12} + b_{23}$,

deci x_2 îl precede pe x_3 în drumul de la x_1 la x_3 , d_{13} ,

$d_{13} = [x_1, x_2, x_3]$

De la x_1 la x_6 sunt două drumuri, unul este arcul (x_1, x_6), iar al doilea drum trece prin x_2 .

Pe linia 1 în matricea B, $b_{16} = 20$, iar în matricea B^2 , $b^{(2)}_{16} = \underline{20}$ şi s-a subliniat valoarea <u>20</u> şi deasupra s-a scris ***2*** , deoarece drumul $d_{16} = [x_1, x_2, x_6]$ trece prin x_2 .

Pe linia 2 în matricea B, $b_{24} = \infty$, deci nu există arc de la x_2 la x_4 , iar în matricea B^2 , $b^{(2)}_{24} = \underline{20}$ şi s-a subliniat valoarea <u>20</u> şi deasupra s-au scris numerele ***5, 6***, deoarece există două drumuri de valoare minimă 20 de la x_2 la x_4, care trec prin x_5 , respectiv x_6.

Drumul $d_{24} = [x_2, x_5, x_4]$ trece prin x_5 , iar al doilea drum $d^{1}_{24} = [x_2, x_6, x_4]$ trece prin x_6 .

Valoarea $b^{(2)}_{24} = \underline{20}$ s-a obţinut cu relaţiile (8.14) prin înmulţirea liniei 2 din B cu coloana 4 a lui B, astfel:

$b^{(2)}_{24} = \underline{20} = \min (\infty + \infty, 0 + \infty, 10 + 22, \infty + 0, \underline{5 + 15}, \underline{16 + 4})$.

$b_{25} = 5$, $b_{54} = 15$, deci primul drum trece prin x_5;

$b_{26} = 16$, $b_{64} = 4$, deci al doilea drum trece prin x_6 .

Se calculează cu relaţiile (8.14) matricea B^3 în tabelul nr.8.5.

$B^3 = B^2 \otimes B$

Tabelul nr. 8.5. Matricea B^3 .

0	4	***2, 5*** 13	***2,5;2, 6; ; 6*** 24	***2*** 9	***2*; 2, 3** 20, 20
∞	0	***5*** 9	***3,6;5; 6*** 20	5	***3*** 16, 16
∞	2	0	***6*** 10	***2, 6*** 7	6
∞	***3*** 4	2	0	8	***3*** 8
∞	***3*** 6	4	***3, 6*** 14	0	***3*** 10
∞	***5, 3*** 7	***5*** 5	4	1	0

Se calculează cu relaţiile (8.14) matricea B^4 în tabelul nr.8.6.

$B^4 = B^3 \otimes B$

Tabelul nr. 8.6. Matricea B^4 .

0	4	***2, 5*** 13	***2,5;2, 6; ; 6*** 24	***2*** 9	***2*; 2, 3** 20, 20
∞	0	***5*** 9	***3,6;5; 6*** 20	5	***3*** 16, 16
∞	2	0	***6*** 10	***2, 6*** 7	6
∞	***3*** 4	2	0	8	***3*** 8
∞	***3*** 6	4	***3, 6*** 14	0	***3*** 10
∞	***5, 3*** 7	***5*** 5	4	1	0

Se calculează cu relaţiile (8.14) matricea B^5 în tabelul nr.8.7.

$B^5 = B^4 \otimes B = B^3 \cdot B^2$

Tabelul nr. 8.7. Matricea B^5 .

0	4	***2, 5*** 13	***2,5, 3, 6*** 23	***2*** 9	**2, 5, 3** 19
∞	0	***5*** 9	***5, 3,6*** 19	5	***5, 3*** 15
∞	2	0	***6*** 10	***2, 6*** 7	6
∞	***3*** 4	2	0	8	***3*** 8
∞	***3*** 6	4	***3, 6*** 14	0	***3*** 10
∞	***5, 3*** 7	***5*** 5	4	1	0

Se calculează cu relaţiile (8.14) matricea B^6 .

$B^6 = B^5 \otimes B = B^4 \cdot B^2 = B^5$

Calculul se încheie, deoarece $B^6 = B^5$

Matricea valorilor minime ale drumurilor elementare existente în graful considerat în figura nr. 8.9 şi traseele drumurilor minime sunt în tabelul nr. 8.7.

Metode matematice de modelare a fluxurilor materiale – C11 - 2018

Drumuri de valoare maximă

Se consideră graful finit G = (X , U).
Graful G este valorizat, există o funcţie l,

$$l: U \rightarrow R^+ \cup \{0\}$$

$$l(u_k) = l((X_i , X_j)) = v_{ij} \quad , \quad (\forall) (X_i , X_j) \in U$$

$$v_{ij} \geq 0$$

Valoarea v_{ij} se numeşte valoarea arcului (X_i , X_j), poate avea semnificaţia de cost, durată, distanţă etc.

Se notează :

$$E = R_+ \cup \{0\} \cup \{-\infty\}$$

$$a \otimes b = a + b \qquad (8.16)$$
$$a \oplus b = \max \{a, b\}$$
$$a \otimes (-\infty) = (-\infty) \otimes a = -\infty \ , \ (\forall) a, b \in E , a > -\infty .$$

Operaţiile $\otimes$ şi $\oplus$ se extind pentru matrici pătrate cu coeficienţi din E.

Se formează matricea B.

$B = (b_{ij})$, i, j = 1, 2, ..., n;

$$b_{ij} = \begin{cases} v_{ij} & , dacă \quad (X_i, X_j) \in U \\ -\infty & , dacă \quad (X_i, X_j) \notin U \\ 0 & , dacă \quad i = j \end{cases} \qquad (8.17)$$

Teorema 8.3

Dacă se consideră graful G = (X , U) , orientat şi finit, în care se ataşează fiecărui arc $(X_i, X_j) \in U$, valoarea sa $l((X_i, X_j)) = v_{ij}$, se formează matricea $B = (b_{ij})$ conform relaţiei (8.17) care se ridică la puterea k conform relaţiilor (8.16), atunci B^k conţine toate valorile maxime ale drumurilor formate din cel mult k arce, aşezate la încrucişarea liniei vârfului din care începe drumul cu coloana celui în care se termină (k<n, n = numărul vârfurilor grafului).

Observaţii

- Drum de valoare maximă $-\infty$ (- infinit) înseamnă drum inexistent.
- Teorema 8.3 este aplicabilă pentru determinarea tuturor valorilor maxime ale drumurilor elementare într-un graf fără circuite.
- Teorema 8.3 oferă numai valorile maxime ale drumurilor grafului, nu oferă algoritmul de identificarea drumurilor de valoare maximă. (Se pot utiliza algoritmii Ford, Bellman-Kalaba etc.).
- **Algoritmul pentru identificarea drumurilor de valoare maximă** se poate enunţa astfel:
    1. se formează matricea B utilizând relaţiile (8.17), se calculează B^2 utilizând relaţiile (8.16), iar în matricea B^2 se scot în evidenţă valorile finite apărute în plus sau distincte de cele din matricea B şi se notează indicele de precedenţă (prin ce vârf intermediar trece drumul) , reprezentând drumuri de valoare maximă şi de lungime doi (formate din două arce), care au originea în vârful dat de linia matricii şi cu extremitatea vârful dat de coloana în care se găseşte valoarea determinată;
    2. dacă sunt doi su mai mulţi indici de precedenţă pentru aceeaşi valoare, sunt mai multe drumuri maxime distincte prin vârful intermediar corespunzător;
    3. valorile rămase nemarcate sunt ale tranziţiilor între extremităţile cărora nu există drumuri de lungime doi cu valoare mai mare decât a tranziţiei;
    4. se calculează $B^3 = B^2 \otimes B$, $B^4 = B^3 \otimes B$, ..., $B^{k+1} = B^k \otimes B$, $k \in N^*$ etc. până când două puteri consecutive ale lui B coincid. Puterile matricii B se calculează în tabel , într-o căsuţă în partea superioară este trecut drumul sau drumurile, iar în partea inferioară a căsuţelor este trecută valoarea maximă a drumului.

Exemplul nr. 8.9.

Se consideră graful G = (X, U) din figura nr. 8.10. cu valorile arcelor notate pe figură.
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$. Trebuie determinată matricea drumurilor de valoare maximă ale grafului.

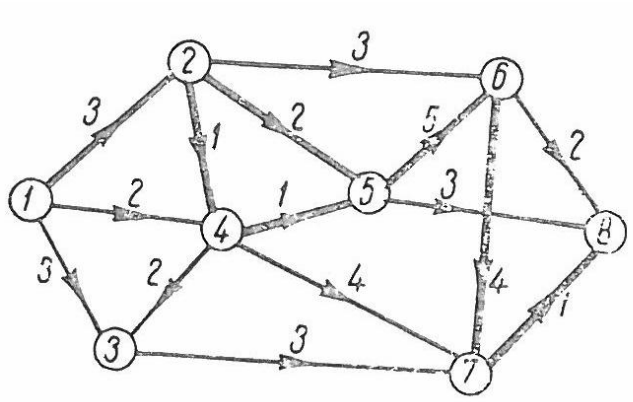


Fig. Nr. 8.10

Se scrie matricea B folosind relaţiile (8.17) .

Se calculează B^2 utilizând relaţiile (8.16) şi se va scrie tabelar în tabelul nr. 8.8.

În matricea B^2 din tabelul nr.8.8. , $b^{(2)}_{13} = 4$ în loc de $b_{13} = 3$ din matricea B şi s-a subliniat valoarea 4, iar deasupra s-a scris ***4*** , s-a obţinut cu relaţiile (8.16) prin înmulţirea liniei 1 din B cu coloana 3 a lui B, deoarece:

$b^{(2)}_{13} = 4 = \max(0 + 3, 3 - \infty, 3 + 0, \underline{2 + 2}, -\infty - \infty, -\infty - \infty, -\infty - \infty, -\infty - \infty)$,

$4 = 2 + 2 = b_{14} + b_{43}$,

deci x_4 îl precede pe x_3 în drumul de la x_1 la x_3 , d_{13} ,
$d_{13} = [x_1, x_4, x_3]$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 1 & 2 & 3 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 3 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 2 & 0 & 1 & -\infty & 4 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 5 & -\infty & 3 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 4 & 2 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix}$$

Tabelul nr. 8.8. Matricea B^2 .

0	3	***4*** <u>4</u>	***2*** <u>4</u>	***2*** <u>5</u>	***2*** <u>6</u>	***5, 6*** <u>11</u>	-∞
-∞	0	***4*** <u>3</u>	1	***4*** 2, <u>2</u>	***5*** <u>7</u>	***6*** <u>7</u>	***6*** <u>5</u>
-∞	-∞	0	-∞	-∞	-∞	3	***7*** <u>4</u>
-∞	-∞	2	0	1	***5*** <u>6</u>	***3*** <u>5</u>	***7*** <u>5</u>
-∞	-∞	-∞	-∞	0	5	-∞	***6*** <u>7</u>
-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	4	***7*** <u>5</u>
-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	0	1
-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	0

Pe linia 2 în matricea B, $b_{23} = -\infty$, deci nu există arc de la x_2 la x_3 , iar în matricea B^2 , $b^{(2)}_{23} = \underline{3}$ şi s-a subliniat valoarea $\underline{3}$ şi deasupra s-a scris numărul ***4***, deoarece drumul de valoare maximă 3 de la x_2 la x_3, trece prin x_4 .
Drumul $d_{23} = [x_2, x_4, x_3]$ trece prin x_4 .
Valoarea $b^{(2)}_{23} = \underline{3}$ s-a obţinut cu relaţiile (8.16) prin înmulţirea liniei 2 din B cu coloana 3 a lui B, astfel:

$b^{(2)}_{23} = \underline{3} = \max(-\infty + 3, 0 - \infty, -\infty + 0, \underline{1+2}, 2 - \infty, 3 - \infty, -\infty - \infty, -\infty - \infty)$.

$b_{24} = 1$, $b_{43} = 2$, deci drumul trece prin x_4.

În matricea B^2 , $b^{(2)}_{32} = -\infty$, deci nu există nici arc, nici drum de lungime doi (format din două arce), de la vârful x_3 la x_2.

Tabelul nr. 8.9. Matricea B^3 .

0	3	***2, 4*** <u>6</u>	***2*** <u>4</u>	***2; 2, 4*** <u>5</u>	***2, 5*** <u>10</u>	***2, 6*** <u>10</u>	***2, 6; 2,5*** 8
-∞	0	***4*** <u>3</u>	1	***4*** 2, <u>2</u>	***5; 4, 5*** <u>7</u>	***6*** <u>7</u>	***5; 6*** <u>9</u>
-∞	-∞	0	-∞	-∞	-∞	3	***7*** <u>4</u>
-∞	-∞	2	0	1	***5*** <u>6</u>	***5, 6*** <u>10</u>	***5, 6*** <u>8</u>
-∞	-∞	-∞	-∞	0	5	***6*** 9	***6, 7*** <u>10</u>
-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	4	***7*** <u>5</u>
-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	-∞	0	1

$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

Analog se calculează cu relaţiile (8.16) matricea B^3 , reprezentând drumuri de valoare maximă şi de lungime trei (formate din trei arce), care au originea în vârful dat de linia matricii şi cu extremitatea vârful dat de coloana în care se găseşte valoarea determinată.

$B^3 = B^2 \otimes B$

Analog se calculează cu relaţiile (8.16) matricea B^4 , reprezentând drumuri de valoare maximă şi de lungime patru (formate din patru arce), care au originea în vârful dat de linia matricii şi cu extremitatea vârful dat de coloana în care se găseşte valoarea determinată.

.

$B^4 = B^2 \otimes B^2$ etc.

PENTRU APROFUNDARE

8. 6. Reţele de transport

O **reţea de transport** este un graf G = (X, U) finit, fără bucle,

$X = \{x_0 , x_1 , x_2 , ..., x_n\}$, cu următoarele proprietăţi :

1. Există un prim vârf $x_0 \in X$, care se numeşte intrarea în reţea (sursa reţelei) şi un vârf ultim $x_n \in X$, numit ieşirea din reţea .

2. Pe mulţimea U a arcelor grafului este definită o funcţie c, numită capacitatea arcului.

$c: U \rightarrow R^+ \cup \{0\}$

$c((x_i , x_j)) = c_{ij}$

În practică de obicei valorile funcţiei c sunt numere întregi nenegative, deci numere naturale şi această valoare determină cantitatea maximă de materie ce poate fi deplasată de-a lungul arcului (x_i , x_j).

Reţelele de transport pot fi:

- reţelele de transport orientate, când se vorbeşte de capacitatea arcelor;
- reţelele de transport neorientate, când se vorbeşte de capacitatea muchiilor.

Flux maxim în reţele

3. Se numeşte **flux pe reţea** o funcţie reală nenegativă φ

$\varphi : U \rightarrow R^+ \cup \{0\}$

care ataşează fiecărui arc $(x_i , x_j) \in U$ valoarea:

$\varphi((x_i , x_j)) = v_{ij}$,

astfel încât sunt îndeplinite condiţiile:

a) Condiţia de mărginire a fluxului: fluxul asociat oricărui arc nu trebuie să depăşească capacitatea arcului respectiv, adică:

$$0 \leq \varphi((x_i , x_j)) \leq c_{ij} , (\forall) (x_i , x_j) \in U \qquad (8.18)$$

b) Condiţia de conservare a fluxului: pentru orice vârf intermediar $x_i \in X$, $x_i \neq x_0$, $x_i \neq x_n$, deci care nu este intrarea sau ieşirea reţelei, suma fluxurilor asociate arcelor care intră în x_i este egală cu suma fluxurilor asociate arcelor care ies din x_i , deci:

$$\sum_{(x_j, x_i) \in \omega_{x_i}^-} \varphi((x_j, x_i)) = \sum_{(x_i, x_j) \in \omega_{x_i}^+} \varphi((x_i, x_j)) \ , (\forall) (x_i , x_j) \in U \qquad (8.19)$$

Dacă se asimilează $\varphi(u)$ cu o cantitate de materie care parcurge arcul $u = (x_i , x_j)$ în sensul orientării sale, de la x_i la x_j , atunci prima condiţie din definiţie (8.18) exprimă cerinţa naturală ca această cantitate să nu depăşească capacitatea arcului.

A doua condiţie din definiţie (8.19) arată că în vârfurile intermediare x_i nu sunt pierderi, adică suma cantităţilor sosite în x_i de-a lungul arcelor incidente spre interior acestuia este egală cu suma cantităţilor care ies din x_i pe arcele incidente spre exterior lui.

c) Dacă se însumează relaţiile (8.19) pentru toate vârfurile intermediare şi reducând termenii care apar în ambii membri, rezultă relaţia (8.20). Relaţia (8.20) arată că într-o reţea fără pierderi cantitatea de materie intrată în reţea prin x_0 este egală cu cantitatea sosită în x_n.

$$\varphi_0 = \sum_{(x_0, x_j) \in U} \varphi((x_0, x_j))$$

$$\varphi_n = \sum_{(x_i, x_n) \in U} \varphi((x_i, x_n))$$

$$\Phi = \varphi_0 = \varphi_n \qquad (8.20)$$

Funcţia Φ se numeşte flux de valoare totală în reţea sau flux total în reţea.

Se mai notează fluxul total în reţea şi altfel: $\Phi = v(\varphi)$.

S-a notat cu $\omega_{x_i}^-$ mulţimea arcelor incidente interior în x_i (mulţimea arcelor care intră în x_i) şi cu $\omega_{x_i}^+$ mulţimea arcelor incidente exterior în x_i (mulţimea arcelor care ies din x_i).

$$\omega_{x_i}^- = \{(x_j , x_i) \in U, j = 0, 1, 2, \dots , n\}$$

$$\omega_{x_i}^+ = \{(x_i , x_j) \in U, j = 0, 1, 2, \dots , n\}$$

Când capacităţile sunt numere întregi pozitive, se iau şi pentru $\varphi((x_i , x_j))$ valori întregi pozitive, deci numere naturale:

$$\varphi : U \to N$$

O problemă ce se pune în legătură cu fluxul definit pe reţea este aceea a determinării unui ***flux căruia să-i corespundă un flux total maxim***. Deci trebuie determinat fluxul φ_{max} , soluţia sistemului a) şi b) din condiţia 3) de mai sus care **maximizează funcţia** Φ din c). Această problemă este o problemă de programare liniară de o formă particulară (problemă de transport) ce se rezolvă prin algoritmi specifici, dar se poate rezolva şi prin algoritm specific teoriei grafurilor, algoritmul Ford – Fulkerson, pentru care se vor defini câteva concepte. Problema fluxului maxim este problema determinării unui flux φ definit pe mulţimea U a arcelor reţelei de transport astfel încât fluxul φ_n care intră în ieşirea reţelei x_n să aibă valoarea cea mai mare posibilă.

Orice arc $u \in U$ pentru care $\varphi(u) = c(u)$ se numeşte **arc saturat**.

Orice drum de la x_0 la x_n care conţine cel puţin un arc saturat este un **drum saturat**.

Fluxul care face ca toate drumurile de la x_0 la x_n să fie saturate este un **flux complet**. Fluxul maximal este un flux complet, dar nu orice flux complet este maximal.

Tăietura reţelei.

Dacă submulţimea $A \subset X$ îndeplineşte condiţiile $x_0 \notin A$ şi $x_n \in A$, atunci submulţimea arcelor (x_i, x_j) cu $x_i \notin A$ şi $x_j \in A$ care se notează cu ω_A^- defineşte o tăietură a reţelei.

$\omega_A^- = \{(x_i, x_j) \in U \mid x_i \notin A, x_j \in A\}$

Capacitatea tăieturii, notată cu $c(\omega_A^-)$, se defineşte prin relaţia (8.21):

$$c(\omega_A^-) = \sum_{u \in \omega_A^-} c(u) \qquad (8.21)$$

Fiind dată o tăietură, orice flux trebuie să o străbată pentru a ajunge de la x_0 la x_n, iar fluxul poate să-i satureze unele arce şi pe altele nu.
Dacă toate arcele tăieturii vor fi saturate, atunci

$v(\varphi) = c(\omega_A^-)$

, iar dacă nu, atunci

$v(\varphi) < c(\omega_A^-)$.

Deci oricare ar fi fluxul φ compatibil cu reţeaua şi pentru orice tăietură a ei, în general avem:

$v(\varphi) \leq c(\omega_A^-)$.

Rezultă că, dacă s-a găsit un flux φ şi o tăietură ω_A^- pentru care

$\varphi(u) = v(\varphi) = c(\omega_A^-)$

înseamnă că s-a găsit fluxul maximal şi în acelaşi timp tăietura cu capacitate minimă. Acest lucru se rezolva cu algoritmul Ford – Fulkerson.

Transformarea unui flux incomplet într-un flux complet

Dacă se pleacă de la un flux incomplet se poate ajunge totdeauna la un flux complet, astfel:

- se caută un drum nesaturat d de la x_0 la x_n şi se notează:
  $a_1 = \min_{u \in d} [c(u) - \varphi(u)] > 0$
  Se calculează

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi(u) + a_1 & daca \quad u \in d \\ \varphi(u) & daca \quad u \notin d \end{cases}$$

şi se obţine un nou flux φ_1 în reţea care saturează cel puţin un arc mai mult decât φ. Se procedează la fel cu un alt drum d_2 de la la x_0 la x_n nesaturat de φ_1, iar procedeul continuă până când dacă s-ar elimina arcele saturate, s-ar ajunge la un graf parţial care nu mai este conex, rezultând că nu mai există drumuri formate numai din arce nesaturate care să unească intrarea în reţea x_0 cu ieşirea dn reţea x_n.

Ameliorarea unui flux complet pentru fluxul maxim

Un flux complet $\varphi(u)$ poate fi ameliorat utilizând marcarea vârfurilor în mod iterativ:

a) se marchează x_0 cu 0;
b) dacă x_i este un vârf marcat şi $(x_i, x_j) \in U$, iar $\varphi((x_i, x_j)) < c((x_i, x_j))$, atunci se marchează cu +i vârful x_j, iar mulţimea acestor arce se notează cu B;
c) dacă x_i este un vârf marcat şi $(x_j, x_i) \in U$ şi $\varphi((x_j, x_i)) > 0$, atunci se marchează x_j cu –i, iar mulţimea acestor arce se notează cu C;
d) dacă x_i este marcat şi arcul (x_i, x_j) e saturat sau $\varphi((x_j, x_i)) = 0$, atunci x_j nu poate fi marcat;

Dacă cu acest procedeu se ajunge să se marcheze x_n, atunci există cel puţin un lanţ L de la x_0 la x_n de-a lungul căruia sunt îndeplinite condiţiile de marcare.
Se notează:

$m = \min_{u \in B} [c(u) - \varphi(u)] > 0$

$r = \min_{u \in C} \varphi(u)$

$s = \min(m, r)$, $s > 0$

Se poate lua:

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi(u) + s & daca \quad u \in B \\ \varphi(u) - s & daca \quad u \in C \\ \varphi(u) & daca \quad u \notin L \end{cases}$$

şi rezultă un nou flux φ_1 , $v(\varphi_1) = v(\varphi) + s$.

Dacă lanţul L are numai arce $u \in B$, atunci el este un drum şi procedeul dă posibilitatea identificării drumurilor nesaturate de la x_0 la x_n şi a obţinerii unui flux complet.

Teorema 8.4. (Ford – Fulkerson pentru fluxul maxim)

Într-o reţea de transport dată, valoarea maximă a fluxului este egală cu capacitatea minimă a tăieturilor:

$$\max_{\varphi} v(\varphi) = \min_{x0 \notin A, xn \in A} c(\omega_A^-) \qquad (8.22)$$

Algoritmul Ford – Fulkerson
pentru determinarea (obţinerea) unui flux maxim

1) Se introduce în reţea un flux oarecare $\varphi(u)$ compatibil cu capacitatea ei:
$\varphi(u) \le c(u)$, $(\forall)\, u \in U$;
2) Se trece de la $\varphi(u)$ la un flux complet $\varphi_1(u)$;
3) Se ameliorează $\varphi_1(u)$ cu procedeul prezentat mai sus şi se repetă până când x_n devine inaccesibil pentru marcaj.

Exemplul nr. 8.10.

Un anumit produs se găseşte într-un depozit din localitatea x_0 în cantitate mare şi trebuie realizat transportul (aprovizionarea) centrului de consum x_5. Pentru transportul din depozitul x_0 în centrul de consum x_5 se pot utiliza rutele ce trec prin x_1, x_2, x_3, x_4 şi fiecare rută are o capacitate maximă ce poate fi transportată şi este trecută pe arcul corespunzător. Să se determine:

a) planul de transport din depozitul x_0 în centrul de consum x_5, astfel încât cantitatea transportată să fie maximă şi să se respecte restricţiile de capacitate ale rutelor;
b) tăieturile ce se pot defini în reţeaua din fig. Nr.8.11 şi să li se calculeze capacităţile;
c) să se compare tăietura de capacitate minimă obţinută cu fluxul maxim obţinut la a).

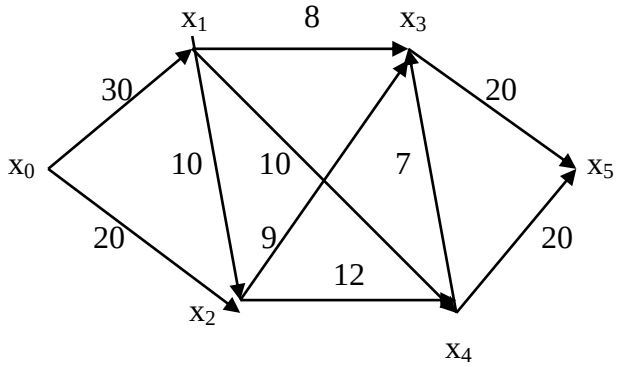


Fig. Nr. 8.11

Pe drumul $d_1 = (x_0, x_2, x_4, x_5)$ se transportă 12 unităţi, iar arcul (x_2, x_4) este saturat;
Pe drumul $d_2 = (x_0, x_1, x_3, x_5)$ se transportă 8 unităţi, iar arcul (x_1, x_3) este saturat;
Pe drumul $d_3 = (x_0, x_1, x_4, x_5)$ se transportă 8 unităţi, iar arcul (x_1, x_4) este saturat;
Pe drumul $d_4 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_5)$ se transportă 9 unităţi, iar arcul (x_2, x_3) este saturat;
Pe drumul $d_5 = (x_0, x_1, x_4, x_3, x_5)$ se transportă 2 unităţi, iar arcul (x_4, x_3) este saturat;
Nu mai sunt alte drumuri de la x_0 la x_5 .
Fluxul maxim este $\Phi_{max} = 12 + 8 + 8 + 9 + 2 =$ **39**

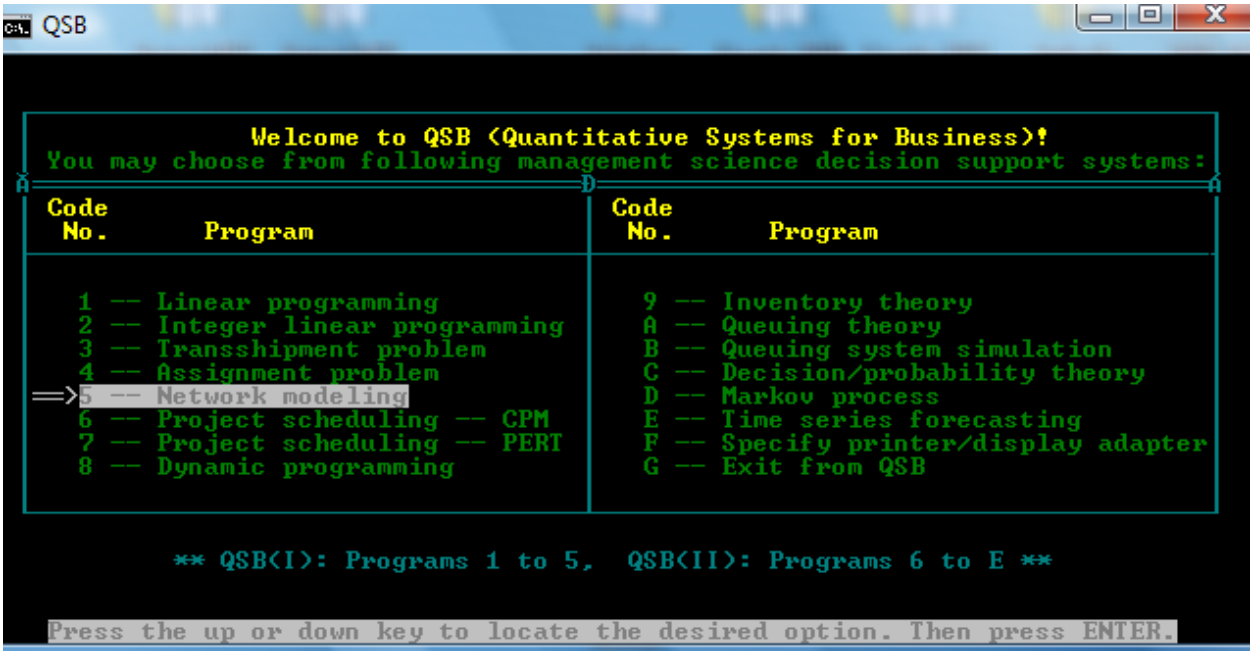
b) În tabelul nr. . 8.10. sunt explicitate cele 16 partiţii ale mulţimii nodurilor reţelei, iar aceste partiţii îndeplinesc condiţia: nodul x_0 care este sursa aparţine mulţimii U, iar nodul x_5 care este ieşirea aparţine mulţimii V. Coloana (U, V) din tabelul nr. 8.10. cuprinde pentru fiecare partiţie toate arcele existente în reţea care au extremitatea iniţială în U şi extremitatea finală în V. Pentru fiecare partiţie este calculată suma capacităţilor arcelor ce formează tăietura corespunzătoare şi este trecută în coloana C(U, V).

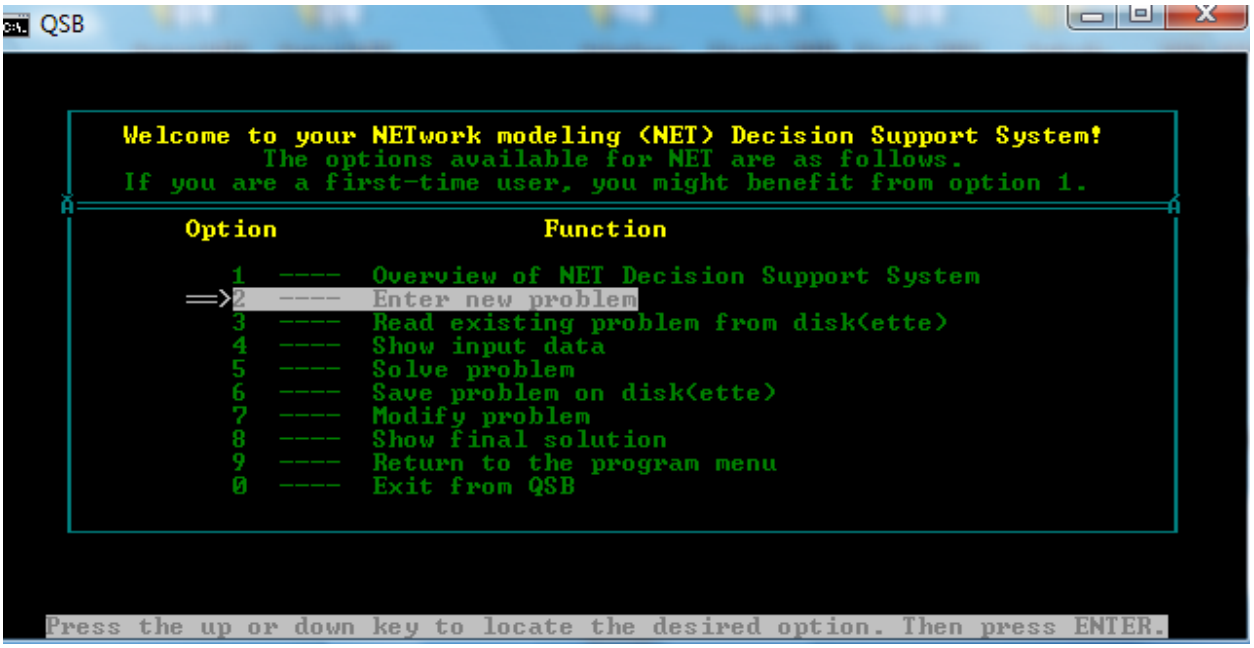
Tabelul nr. 8.10.

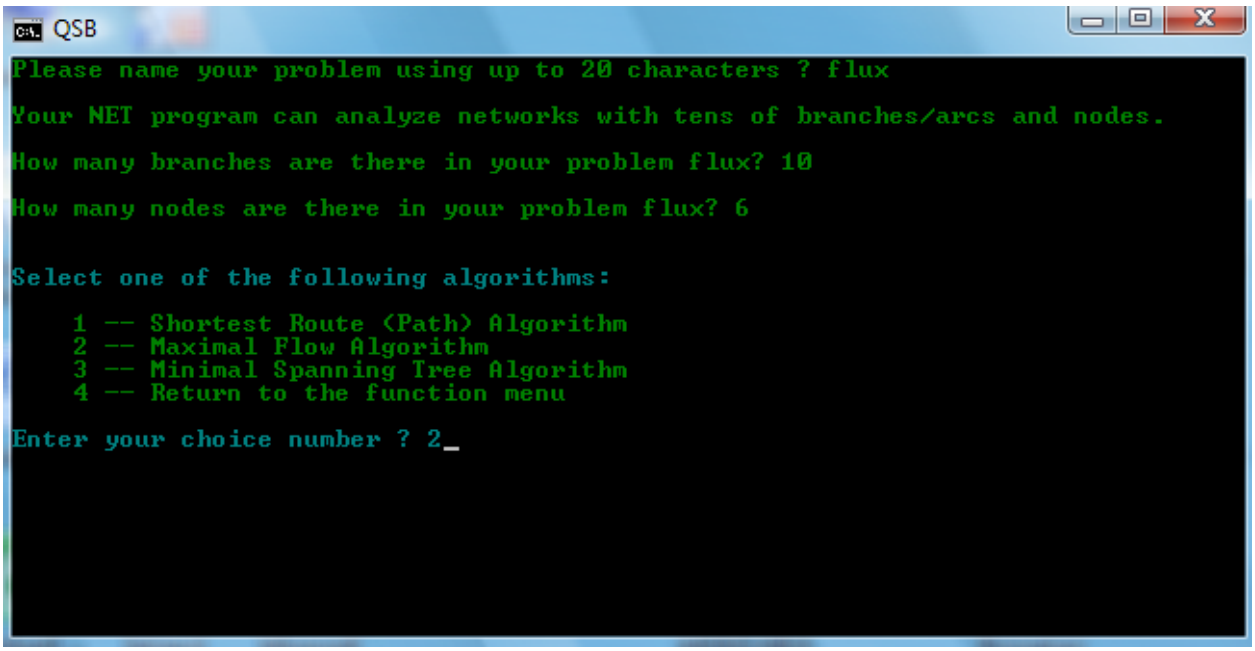
Nr.crt.	U	V	(U, V)	C(U, V)
1	x_0	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5	$(x_0, x_1), (x_0, x_2)$	50
2.	x_0, x_1	x_2, x_3, x_4, x_5	$(x_0, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4)$	48
3	x_0, x_2	x_1, x_3, x_4, x_5	$(x_0, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4)$	51
4	x_0, x_3	x_1, x_2, x_4, x_5	$(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_3, x_5)$	70
5	x_0, x_4	x_1, x_2, x_3, x_5	$(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_5)$	77
6	**x_0, x_1, x_2**	**x_3, x_4, x_5**	**$(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4)$**	**39***
7	x_0, x_1, x_3	x_2, x_4, x_5	$(x_0, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_3, x_5)$	60
8	x_0, x_1, x_4	x_2, x_3, x_5	$(x_0, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_4, x_3), (x_4, x_5)$	65
9	x_0, x_2, x_3	x_1, x_4, x_5	$(x_0, x_1), (x_2, x_4), (x_3, x_5)$	62
10	x_0, x_2, x_4	x_1, x_3, x_5	$(x_0, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_3), (x_4, x_5)$	66
11	x_0, x_3, x_4	x_1, x_2, x_5	$(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_3, x_5), (x_4, x_5)$	90
12	x_0, x_1, x_2, x_3	x_4, x_5	$(x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_5)$	42
13	x_0, x_1, x_2, x_4	x_3, x_5	$(x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_4, x_3), (x_4, x_5)$	44
14	x_0, x_1, x_3, x_4	x_2, x_5	$(x_0, x_2), (x_1, x_2), (x_3, x_5), (x_4, x_5)$	70
15	x_0, x_2, x_3, x_4	x_1, x_5	$(x_0, x_1), (x_3, x_5), (x_4, x_5)$	70
16	x_0, x_1, x_2, x_3, x_4	x_5	$(x_3, x_5), (x_4, x_5)$	40

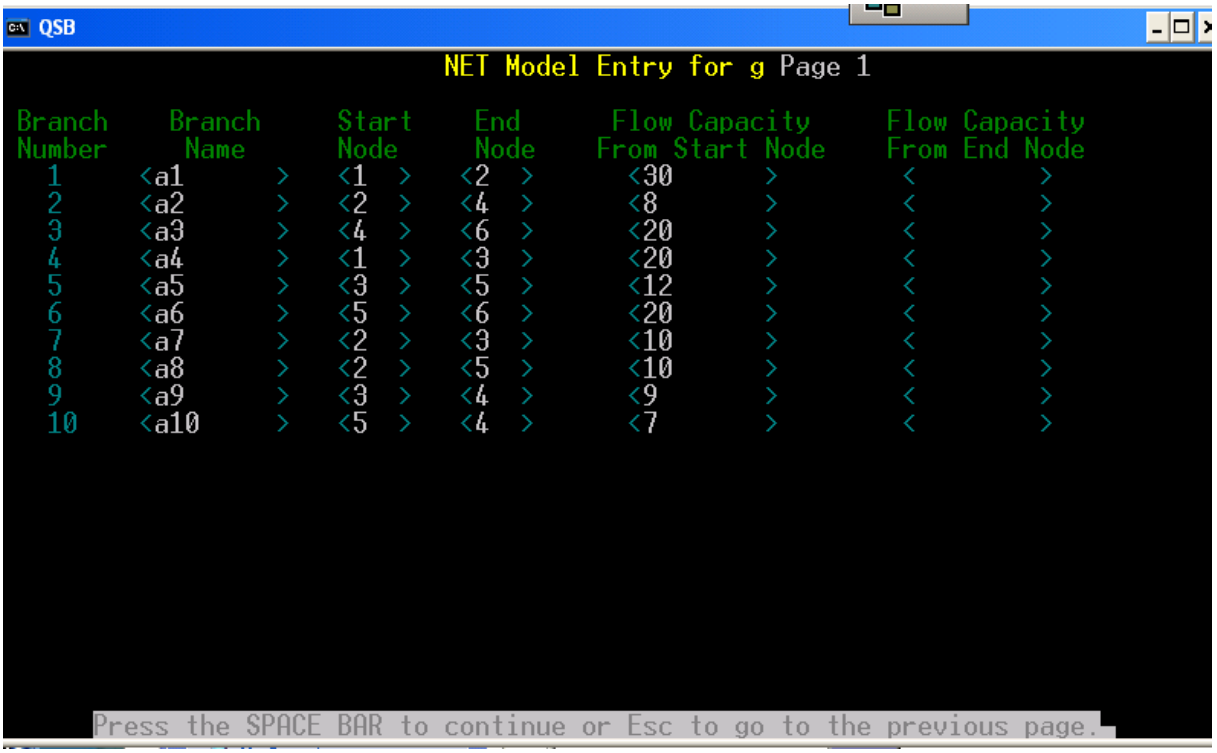
c) Din tabelul nr. 8.10, coloana C(U, V) rezultă că este verificată teorema Ford – Fulkerson, deci valoarea maximă a fluxului este egală cu capacitatea minimă a tăieturilor:
$\Phi_{max} =$ **39 =** min C(U, V) .

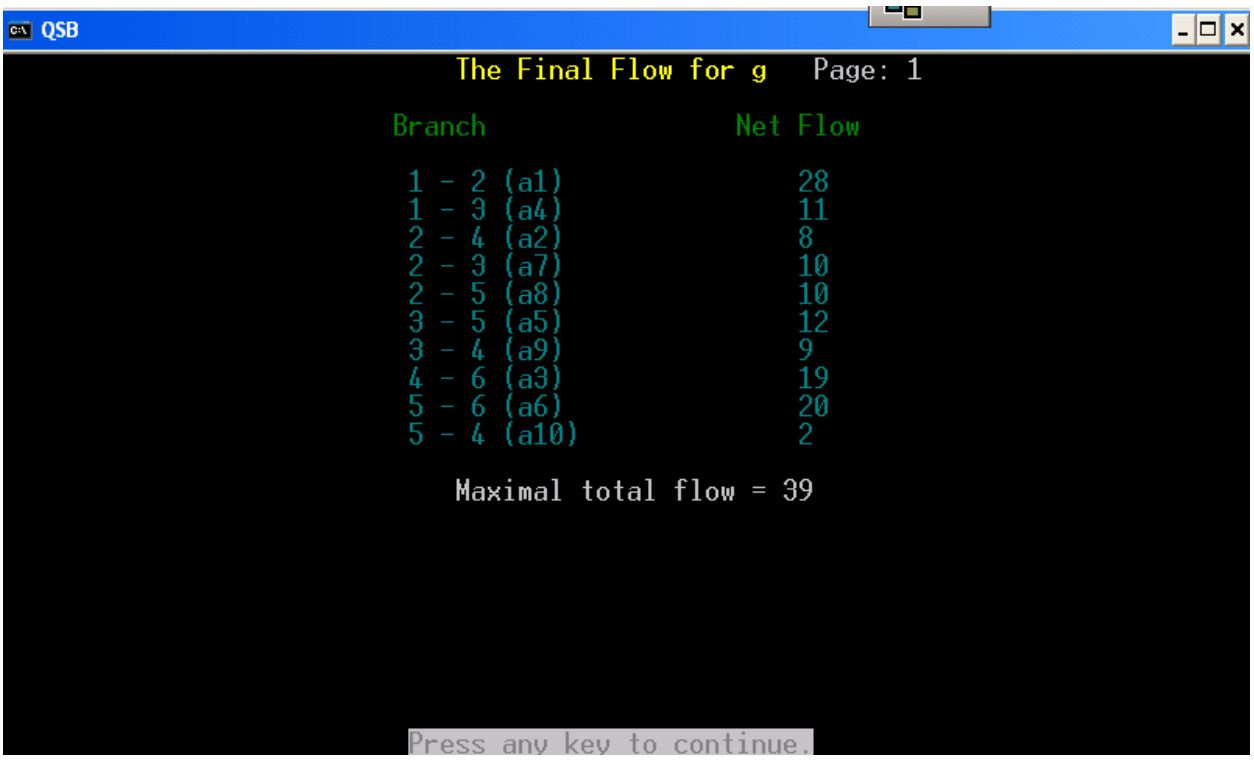
Rezolvarea cu programul Qsb.


QSB
Welcome to QSB (Quantitative Systems for Business)!
You may choose from following management science decision support systems:
Code No. Program
Code No. Program
1 -- Linear programming
2 -- Integer linear programming
3 -- Transshipment problem
4 -- Assignment problem
==>5 -- Network modeling
6 -- Project scheduling -- CPM
7 -- Project scheduling -- PERT
8 -- Dynamic programming
9 -- Inventory theory
A -- Queuing theory
B -- Queuing system simulation
C -- Decision/probability theory
D -- Markov process
E -- Time series forecasting
F -- Specify printer/display adapter
G -- Exit from QSB
** QSB(I): Programs 1 to 5, QSB(II): Programs 6 to E **
Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.


QSB
Welcome to your NETwork modeling (NET) Decision Support System!
The options available for NET are as follows.
If you are a first-time user, you might benefit from option 1.
Option Function
1 ---- Overview of NET Decision Support System
==>2 ---- Enter new problem
3 ---- Read existing problem from disk(ette)
4 ---- Show input data
5 ---- Solve problem
6 ---- Save problem on disk(ette)
7 ---- Modify problem
8 ---- Show final solution
9 ---- Return to the program menu
0 ---- Exit from QSB
Press the up or down key to locate the desired option. Then press ENTER.


QSB
Please name your problem using up to 20 characters ? flux
Your NET program can analyze networks with tens of branches/arcs and nodes.
How many branches are there in your problem flux? 10
How many nodes are there in your problem flux? 6
Select one of the following algorithms:
1 -- Shortest Route (Path) Algorithm
2 -- Maximal Flow Algorithm
3 -- Minimal Spanning Tree Algorithm
4 -- Return to the function menu
Enter your choice number ? 2


QSB
NET Model Entry for g Page 1
Branch Number
Branch Name
Start Node
End Node
Flow Capacity From Start Node
Flow Capacity From End Node
1 <a1 > <1 > <2 > <30 > < >
2 <a2 > <2 > <4 > <8 > < >
3 <a3 > <4 > <6 > <20 > < >
4 <a4 > <1 > <3 > <20 > < >
5 <a5 > <3 > <5 > <12 > < >
6 <a6 > <5 > <6 > <20 > < >
7 <a7 > <2 > <3 > <10 > < >
8 <a8 > <2 > <5 > <10 > < >
9 <a9 > <3 > <4 > <9 > < >
10 <a10 > <5 > <4 > <7 > < >
Press the SPACE BAR to continue or Esc to go to the previous page.



Fluxul multiterminal

Nu se vor prezenta algoritmii de rezolvare, care există în literatură, se vor analiza doar problemele fluxului multiterminal.

Într-o reţea de flux este posibil ca cele două noduri particulare, sursa (intrarea în reţea) şi ieşirea din reţea să fie reprezentate de oricare două noduri ale reţelei considerate. Problema determinării valorilor maxime ale fluxului într-o reţea, considerând ca sursă şi ieşire oricare două noduri ale reţelei se pune pentru reţele orientate şi pentru reţele neorientate. Rezolvarea acestei probleme conduce la obţinerea unei matrice Φ,

$\Phi = (\Phi_{ij})$, i, j = 0, 1, 2, …, n, n +1;

în care Φ_{ij} , i $\neq$ j, este egal cu valoarea maximă a fluxului în reţea când sursă este x_i şi ieşire este x_j , iar pentru i = j se consideră $\Phi_{ij} = \infty$. Dacă reţeaua este neorientată matricea Φ este o matrice simetrică, deci valoarea maximă a fluxului ce poate străbate reţeaua de la x_i la la x_j , i $\neq$ j, este egală cu valoarea maximă a fluxului ce poate străbate reţeaua de la x_j la x_i.

Fluxul multiterminal cuprinde două probleme importante:

- *analiza fluxului multiterminal*: fiind dată o reţea oarecare să se determine matricea $\Phi = (\Phi_{ij})$, i, j = 0, 1, 2, …, n, n +1; ale cărei elemente sunt egale cu valorile maxime ale fluxurilor în reţea, când sursa şi ieşirea sunt considerate două noduri oarecare ale reţelei;
- *sinteza fluxului multiterminal*: fiind dată o matrice pătrată simetrică (reţea neorientată) de ordinul n,

  F = (f_{ij}) , i, j = 1, 2, …, n;

  să se cerceteze dacă există cel puţin o reţea neorientată a cărei matrice Φ , definită mai sus, să fie egală cu matricea F.

Teorema 8.5.

Condiţia necesară şi suficientă ca o matrice F să fie realizabilă , este să avem:
$f_{ij} \geq \min \{f_{ik}, f_{kj}\}$, oricare ar fi indicii i, j, k, diferiţi între ei, i, j, k = 1, 2, …, n;

Flux minim în reţele

Problema fluxului minim într-o reţea de transport este analogă cu aceea a fluxului maxim, dar se modifică, se inversează, condiţia de mărginire a fluxului, devenind:

$\varphi(u)) \geq c_{ij}$, $(\forall)\, u \in U$.

Pentru definirea fluxului minimal se modifică condiţia a) din definiţia fluxului maximal, deci (8.18) devine (8.23).

3. Se numeşte **flux pe reţea** o funcţie reală nenegativă φ

$\varphi : U \rightarrow R^{+} \cup \{0\}$

care ataşează fiecărui arc $(x_i , x_j) \in U$ valoarea:

$\varphi((x_i , x_j)) = v_{ij}$,

astfel încât sunt îndeplinite condiţiile:

a) $\varphi((x_i , x_j)) \geq c_{ij}$, $(\forall)\, (x_i , x_j) \in U$ (8.23)

b) pentru orice vârf intermediar $x_i \in X$, $x_i \neq x_0$, $x_i \neq x_n$

$$\sum_{(x_i , x_j) \in \omega^{-}_{x_i}} \varphi((x_i, x_j)) = \sum_{(x_i , x_j) \in \omega^{+}_{x_i}} \varphi((x_i, x_j)) \text{ , } (\forall)\, (x_i , x_j) \in U \qquad (8.24)$$

Definiţiile de la fluxul maximal se păstrează, cu excepţia definiţiei unei tăieturi şi a transformării unui flux incomplet într-un flux complet. Trecerea de la un flux incomplet la unul complet se va face prin diminuarea valorilor fluxului pe arcele oricărui drum nesaturat d de la x_0 la x_n cu m,

$$m = \min_{u \in d} \; [\varphi(u) - c(u)] > 0 \qquad (8.25)$$

Pentru fluxul minim, o ***tăietură*** este o mulţime de arce de forma

$\omega^{-}(A) = \{(x_j , x_i) \in U, x_i \in A, x_j \in X - A\}$

, unde mulţimea de vârfuri A are proprietatea că $x_n \in A$ şi $\omega^{+}(A) = \Phi$.

Se pune problema determinării ***fluxului minim*** compatibil cu capacităţile arcelor din reţea, iar noţiunea de flux maximal nu mai are sens în acest caz. Se caută un flux φ astfel încât fluxul φ_n la ieşirea reţelei să aibă cea mai mică valoare posibilă.

Diminuarea unui flux complet pentru fluxul minim

Un flux complet $\varphi(u)$ poate fi diminuat prin străbaterea lanţurilor de la x_n la x_0 şi marcarea vârfurilor în mod iterativ:

a) se marchează x_n ;
b) dacă x_i este un vârf marcat şi $(x_i , x_j) \in U$, iar $\varphi((x_i , x_j)) > c((x_i , x_j))$, atunci se marchează vârful x_i cu -j, iar mulţimea acestor arce se notează cu B;
c) dacă x_i este un vârf marcat şi $(x_j , x_i) \in U$, atunci se marchează x_j cu +i, iar mulţimea acestor arce se notează cu C;

Când reuşim să marcăm pe x_0 , am găsit cel puţin un lanţ L de la x_n la x_0 de-a lungul căruia fluxul poate fi diminuat.

Se notează:

$$m = \min_{u \in B} \; [\varphi(u) - c(u)] > 0$$

Se poate lua:

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi(u) - m \quad daca \quad u \in B \\ \varphi(u) + m \quad daca \quad u \in L \quad u \notin B \\ \varphi(u) \quad daca \quad u \notin L \end{cases}$$

şi rezultă un nou flux φ_1 a cărui valoare este:

$$v(\varphi_1) = v(\varphi) - m .$$

Teorema 8.6. (Ford – Fulkerson pentru fluxul minim)

Într-o reţea de transport dată, valoarea minimă a fluxului este egală cu capacitatea maximă a tăieturilor:

$$\min_{\varphi} \quad v(\varphi) = \max_{x0 \notin A, xn \in A} \quad c\left(\omega_A^-\right) \tag{8.26}$$

Algoritmul Ford – Fulkerson
pentru determinarea unui flux minimal

1) Se introduce în reţea un flux oarecare $\varphi(u)$ compatibil cu capacitatea ei:
$\varphi(u) \geq c(u)$, $(\forall)\, u \in U$;
cu respectarea condiţiei de conservare a fluxului în fiecare nod al reţelei. Pentru aceasta se pot considera diferite drumuri de la intrare la ieşire, pe care se defineşte un flux superior capacităţilor tuturor arcelor.
2) Se trece de la $\varphi(u)$ la un flux complet $\varphi_1(u)$ prin diminuarea valorilor fluxului pe arcele oricărui drum d de la x_0 la x_n cu m,
$m = \min_{u \in d} \quad [\varphi(u) - c(u)] > 0$;
3) Se diminuează fluxul complet $\varphi_1(u)$ cu procedeul prezentat mai sus şi se repetă până când x_0 devine inaccesibil pentru marcaj.

Exemplul nr. 8.11.
Pentru reţeaua de transport din fig. nr.8.12 se va determina fluxul minim cu algoritmul Ford - Fulkerson.

În reţeaua din fig. nr. 8.12. este reprezentat un flux complet. Arcele saturate sunt îngroşate. Se eticheteză şi se va marca ieşirea x_6 de-a lungul lanţului $[x_1, x_2, x_3, x_5, x_6]$, fluxul nu este minim,

m = min (9 – 4 , 8 – 6 , 9 – 8) = 1, fluxul va fi micşorat cu o unitate, m = 1, pe arcele (x_1, x_2), (x_3, x_5), (x_5, x_6) şi se va mări cu o unitate, m = 1, pe arcul (x_3, x_2) care devine nesaturat., rezultând un nou flux î fig. nr. 8.13.

Pentru fluxul din fig. nr. 8. 13. ieşirea x_6 poate fi marcată pe lanţul $[x_1, x_2, x_3, x_5, x_4, x_6]$, cu m = min(8 – 4, 7 – 6, 6 – 5) = 1, deci fluxul va fi diminuat cu m = 1 pe arcele (x_1, x_2), (x_3, x_5), (x_4, x_6) şi va fi mărit pe cu m = 1 pe arcele (x_3, x_2) şi (x_4, x_5), rezultând fluxul din fig. nr. 8.14. care este minim pentru că nu se mai poate marca ieşirea x_6.

Mulţimea vârfurilor nemarcate este $A = \{x_4, x_5, x_6\}$, deci tăietura de capacitate maximă va fi:

$\omega^-(A) = \{(x_2, x_4), (x_3, x_5)\}$

Se poate verifica că $\omega^+(A) = \Phi$, $c(\omega^-(A)) = 13 = \varphi_6$

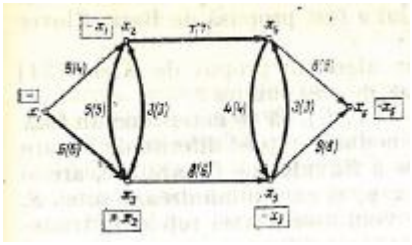


Fig. Nr. 8.12

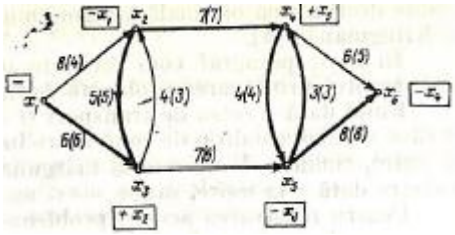


Fig. Nr.8.13

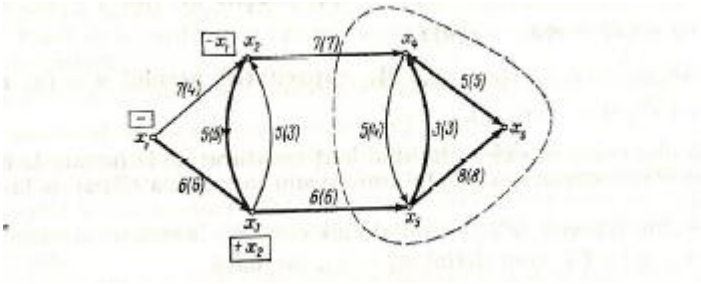


Fig. Nr.8.14

Modelarea şi rezolvarea problemei de transport prin teoria grafurilor

Un produs omogen este stocat (disponibil) în localităţile (depozitele, sursele) A_1 , A_2 , …, A_m respectiv în cantităţile a_1 , a_2 , …, a_m şi trebuie transportat în centrele de consum (destinaţii, magazine, firme, localităţi) B_1 , B_2 , …, B_n unde este cerut (necesar) respectiv în cantităţile b_1 , b_2 , …, b_n . Costul transportului unei unităţi de produs din depozitul A_i la centrul de consum B_j este egal cu c_{ij} unităţi monetare. Se pune problema determinării cantităţilor de produs ce urmează să fie transportate de la depozite la centrele de consum, astfel încât să nu depăşească disponibilul (oferta), cererea să fie satisfăcută şi costul total al transportului să fie minim. Se presupune:

Problema s-a rezolvat prin programare liniară, dar se va analiza şi rezolvarea sa prin teoria grafurilor.

Se utilizează reţele de transport. Se reprezintă în plan prin puncte distincte depozitele A_1 , A_2 , ..., A_m şi centrele de consum B_1 , B_2 , ..., B_n între care există arcele (A_i, B_j) cărora li se ataşează capacitatea c_{ij}. Se adaugă grafului obţinut astfel o intrare A , intrarea în reţea, legată prin arce (A, A_i) de capacitate a_i, i = 1, 2, …, m; cu punctele (depozitele) A_1, A_2, …, A_m . De asemenea se adaugă o ieşire B, ieşirea din reţea, în care soseşte câte un arc din fiecare punct (centru de consum) B_j , j = 1, 2, …, n; între care există arcele (B_j, B) de capacitate b_j , Pentru problema de transport se consideră graful G = (X, U) din fig. nr.8.15. care formează o reţea de transport cu mulţimea vârfurilor X = {A , A_1 , A_2 , ..., A_m , B_1 , B_2 , ..., B_n , B}, vârful A este intrarea în reţea şi are arce cu vârfurile A_i , deci arcele (A , A_i) de valoare a_i , i = 1, 2, …, m. Vârful B este ieşirea din reţea, având arcele (B_j , B) de capacitate b_j , j = 1, 2, ..., n. Mulţimea arcelor U mai conţine arce de forma (A_i , B_j), i = 1, 2, …, m; j = 1, 2, ..., n.

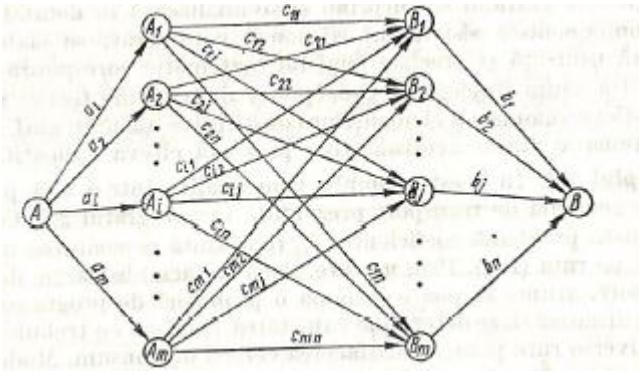


Fig. nr.8.15.

Se poate determina fluxul maxim în reţea cu algoritmul Ford – Fulkerson care are semnificaţia cantităţii maxime de produs care pleacă din A şi ajunge în B.

Flux cu valoare totală dată şi cu cost total minim în reţea

Se consideră graful G = (X, U) din fig. nr.8.15. care formează o reţea de transport şi se defineşte pe mulţimea arcelor funcţia cost q, având semnificaţia practică de cost unitar de transport.

$$q: U \rightarrow R_+$$

$$q((x_i, x_j)) = q_{ij}$$

Trebuie determinat un flux de valoare totală Φ dată, deci cantitatea totală transportată de la intrarea în reţea la ieşire dată, iar costul total să fie minim. Costul total se calculează ca şi sumă a produselor dintre fluxurile ce străbat arcele reţelei de transport şi costurile unitare ale arcelor. Fluxul total Φ nu trebuie să depăşească fluxul total maxim ce poate străbate reţeaua. Problema se rezolvă prin programare liniară sau prin determinarea fluxului de cost minim dintre toate fluxurile posibile în reţea pentru valoarea totală a fluxului Φ.

9. ELEMENTE DE TEORIA AŞTEPTĂRII.

9.1. Sisteme de aşteptare

În cele mai diverse domenii apar fenomene de aşteptare. Oamenii şi firmele se confruntă zilnic cu procese de aşteptare. Se va considera un sistem de producţie, de servire sau comercializare în care se execută o anumită activitate sau se efectuează un anumit serviciu. Obiectele asupra cărora se execută activitatea sau serviciul respectiv se numesc clienţi, iar sistemul respectiv este numit sistem de servire. O coadă de aşteptare este formată din oameni, maşini, piese, produse etc. care aşteaptă un serviciu. Cozile de aşteptare pot să apară fie când serviciile pe care le oferă o firmă sunt supuse unei cereri stocastice sau când comportarea firmei însăşi este de natură probabilistică. Cozile de aşteptare se întâlnesc în cele mai diverse domenii: cozi la cumpărarea ziarului, cozi la bilete de tren sau tramvai, cozi la intrarea sau ieşirea din supermarket, cozi de automobile la o staţie de benzină sau pe şosea, cozi de piese la o maşină unealtă, cozi de produse nevândute în stocul unui magazin sau al unei firme etc.

Serviciul este o activitate ce se prestează pentru un client. Această activitate are o utilitate pentru client, îi satisface o nevoie, în schimbul serviciului plătindu-se un preţ.

În orice firmă există cozi sub forma de: comenzi, stocuri de materii prime, semifabricate sau produse finite, iar dacă firma foloseşte conceptul "just in time" dimensiunea cozii este minimă.

Într-o firmă problema care se pune nu este de a elimina cozile de aşteptare, ci de a le controla şi comanda pentru a îndeplini anumite obiective economice. Cozile de aşteptare se studiază pentru a optimiza comportarea firmei, a sistemului de servire în ansamblu.

Un sistem de aşteptare este complet descris prin specificarea elementelor de bază : *fluxul de intrare, mecanismul de servire, disciplina de servire şi numărul staţiilor de servire*.

Într-un sistem de aşteptare, *fluxul de intrare* este format din obiecte sau persoane numite clienţi care vor solicita efectuarea unui serviciu. Sosirile clienţilor pot fi programate sau aleatoare. Se va considera că intrările în sistemul de aşteptare sunt aleatoare, definite de densitatea de probabilitate f(x). Cel mai studiat sistem de aşteptare este cel cu intrările de tip Poisson cu densitatea de probabilitate (1).

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0,1,2,... \qquad (1)$$

Notaţile în (1) sunt:

x – este numărul de intrări în unitatea de timp;

λ - este numărul mediu de intrări în unitatea de timp, $\lambda>0$, iar media şi dispersia sunt egale cu λ.

Probabilitatea de a avea x sosiri în unitatea de timp este egală cu f(x).

Un client va fi servit de către o *staţie de servire*. Timpul necesar pentru servirea unui client se numeşte *timp de servire*. Suma dintre timpul de aşteptare al clientului şi timpul de servire reprezintă timpul total de aşteptare. În general, se consideră că timpul de servire este o variabilă aleatoare cu o densitate de probabilitate g(t). În multe sisteme de aşteptare se utilizează pentru timpul de servire repartiţia exponenţială care are media $1/\mu$, dispersia $1/\mu^2$ şi densitatea de probabilitate (2).

$$g(t) = \mu \cdot e^{-\mu t} \qquad (2)$$

$t > 0$, $\mu > 0$

Se pot utiliza şi alte legi de repartiţie pentru sosiri şi serviri.

Pentru sosiri şi serviri, trebuie să fie îndeplinită condiţia din relaţia (3) când este o singură staţie de servire, $s = 1$, factorul de serviciu (intensitatea de trafic) ρ să fie subunitar deoarece, în caz contrar, s-ar ajunge la fenomenul de aglomerare.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \qquad (3)$$

Când sunt mai multe staţii de servire, $s > 1$, trebuie să fie îndeplinită condiţia din relaţia (3a) pentru a nu se ajunge la fenomenul de aglomerare.

$$\rho^* = \frac{\rho}{s} = \frac{\lambda}{s.\mu} < 1 \qquad (3a)$$

Ordinea în care clienţii sunt selectaţi pentru a fi serviţi constituie disciplina firului de aşteptare.

Disciplina de servire poate fi :

- FIFO (First In, First Out), adică "primul sosit, primul servit";
- LIFO (Last In, First Out), adică "ultimul sosit, primul servit"
- servirea în ordinea aleatoare ;
- servirea după priorităţi.

Pentru servirea clienţilor sistemului de aşteptare poate avea o staţie de servire sau mai multe staţii.

Lungimea unei cozi de aşteptare poate fi finită sau infinită.

Dacă clienţii sosesc prea des ei vor trebui să aştepte până devine liberă o staţie de servire sau să renunţe la serviciul respectiv. Dacă clienţii sosesc prea rar, staţiile de servire vor fi nefolosite şi vor aştepta. Un sistem de aşteptare se va nota sub forma dată de relaţia (4).

$$S/m/\sigma/s : (N,d) \qquad (4)$$

În (4) notaţiile sunt :

S - este legea de repartiţie a numărului de sosiri în unitatea de timp ;

m - este numărul de elemente ale sursei care poate fi finit dacă clienţii sosesc dintr-o sursă limitată sau este infinit dacă clienţii provin dintr-o populaţie, foarte mare, infinită ;

σ - este legea de repartiţie a timpului de servire a unui client de către o staţie de servire ;

s - este numărul staţiilor de servire ;

N - este numărul de locuri din firul de aşteptare, care poate fi finit sau infinit ;

d - este disciplina de servire .

Sistemele de aşteptare se pot clasifica astfel:

- *sisteme de aşteptare cu cereri refuzate* în care dacă apare o cerere când toate staţiile (canalele) sunt ocupate, este imediat refuzată, ea părăseşte sistemul şi nu mai este socotită în calcul;

- *sisteme de aşteptare cu cozi de aşteptare.*

Aplicarea teoriei aşteptării în proiectarea sistemelor de producţie, de servire sau comercializare duce la dimensionarea raţională a spaţiilor de aşteptare şi de servire, precum şi la stabilirea numărului de staţii de servire, astfel încât să se minimizeze costurile generate de aşteptarea clienţilor şi de existenţa staţiilor de servire neocupate.

Costurile de aşteptare cuprind pierderi directe generate de aşteptare (cheltuieli de staţionare ale maşinilor, ale vagoanelor, vapoarelor etc., deprecierea mărfurilor nedescărcate, salariile personalului care aşteaptă etc.) şi pierderi indirecte (scăderea cifrei de afaceri, deoarece clienţii vor prefera să meargă la alte firme concurente unde aşteaptă mai puţin). Pierderile indirecte sunt dificil de calculat sau de estimat.

Se vor analiza câteva modele de aşteptare utilizabile în proiectarea şi managementul sistemelor de producţie, servire şi comercializare.

9.2. Modelul de aşteptare cu cereri refuzate.

Acest sistem de aşteptare este dat în relaţia (5), iar notaţiile sunt:

S - este legea de repartiţie a numărului de sosiri în unitatea de timp ;

m - este numărul de elemente ale sursei care poate fi finit dacă clienţii sosesc dintr-o sursă limitată sau este infinit dacă clienţii provin dintr-o populaţie infinită ;

σ - este legea de repartiţie a timpului de servire a unui client de către o staţie de servire;

s - este numărul staţiilor de servire ;

N = 0 - este numărul de locuri din firul de aşteptare, care este zero ;

d - este disciplina de servire .

Dacă apare o cerere la un moment când toate staţiile de servire (canalele) sunt ocupate, aceasta este refuzată, ea va părăsi sistemul de aşteptare şi nu va mai fi luată în calcul. Acest sistem de aşteptare este utilizat în telefonie.

Se va considera că intrările în sistemul de aşteptare cu cereri refuzate din relaţia (6) sunt Poisson de parametru λ, servirile sunt exponenţiale de parametru μ şi sunt n staţii (canale) de servire. Se poate determina probabilitatea p_n a unui refuz, deci probabilitatea ca o cerere sosită să găsească toate staţiile (canalele) ocupate, fiind dată de relaţia (7). Formulele din relaţiile (7) şi (8) sunt numite formulele lui Erlang.

Probabilitatea ca toate staţiile (canalele) să fie libere este dată în relaţia (8).
Dacă sistemul de aşteptare are o singură staţie (canal) de servire, probabilitatea ca singura staţie de servire să fie ocupată, deci probabilitatea de refuz este (9).

S/m/σ/s : (0,d) (5)

POISS (λ)/∞/EXP (μ)/n: (0,FIFO) (6)

$$p_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} \quad (7)$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} \quad (8)$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1+\rho} \quad (9)$$

$\mu = 1/m_{\text{timp servire}}$ = invers proporţională cu timpul mediu de servirea unei cereri = m_{tserv}

Exemplul nr. 9.1.

O staţie telefonică automată are 4 linii de comunicaţie. Apelurile formează un flux simplu de densitate $\lambda = 3$ apeluri pe minut. Orice apel sosit când toate liniile sunt ocupate este refuzat. Durata medie de conversaţie este de 2 minute.
Să se determine:
a) probabilitatea unui refuz p_{refuz}
b) probabilitatea p_0 pentru ca staţia telefonică să fie liberă

a) m_{tserv} = 2 minute
$\mu = 1/m_{\text{timp servire}} = ½ = 0.5$ convorbiri/ minut
Se utilizează relaţia (7)
n = 4 staţii de servire

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{0.5} = 6$$

$$p_{refuz} = p_4 = \frac{\frac{\rho^4}{4!}}{1 + \frac{\rho}{1} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!}} = \approx 0.47$$

b) Se utilizează relaţia (8)

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{4} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!}} = \approx 0.0087$$

9.3. Sisteme de aşteptare cu cozi de aşteptare

9.3.1. Modelul de aşteptare POISS (λ)/∞/EXP (μ)/1: (∞, FIFO)

Acest model de aşteptare are sursa nelimitată, foarte mare, teoretic ∞, şi o capacitate suficient de mare a firului de aşteptare, teoretic ∞, disciplina de servire este FIFO – primul sosit, primul servit, dar o singură staţie de servire, sosirile sunt Poisson cu media λ şi servirile sunt exponenţiale de parametru μ.

Factorul de serviciu (intensitatea de trafic) ρ trebuie să fie subunitar.

Probabilitatea ca în sistemul de aşteptare să existe n unităţi (clienţi), n = 0, 1, 2, 3, …, este p_n din (10).

Numărul mediu de unităţi (clienţi) ce se găsesc la un moment dat în sistemul de aşteptare este $\bar{n}$ din (11).

Numărul mediu de unităţi (clienţi) ce se găsesc la un moment dat în firul (coada) de aşteptare este $\overline{n_f}$ din (12).

Numărul mediu de unităţi (clienţi) ce se găsesc la un moment dat în curs de servire este $\overline{n_S}$ din (13).

Între $\bar{n}$, $\overline{n_f}$ şi $\overline{n_S}$ există relaţia (14).

Timpul mediu de aşteptare al unei unităţi (client) în coadă t_f se determină cu relaţia (15).

Timpul mediu de aşteptare al unei unităţi (client) în sistemul de aşteptare t_S se determină cu relaţia (16).

Probabilitatea ca numărul unităţilor (clienţilor) din sistemul de aşteptare, la un moment dat, să depăşească numărul natural k se calculează cu relaţia (17).

Probabilitatea ca numărul unităţilor (clienţilor) din sistemul de aşteptare, la un moment dat, să nu depăşească numărul natural k este (18).

$$p_n = \rho^n.(1-\rho) \qquad (10)$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad (11)$$

$$\overline{n_f} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (12)$$

$$\overline{n_S} = \rho \qquad (13)$$

$$\bar{n} = \overline{n_f} + \overline{n_S} \qquad (14)$$

$$t_f = \frac{\lambda}{\mu.(\mu-\lambda)} \qquad (15)$$

$$t_S = t_f + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (16)$$

$$P(n > k) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} = \rho^{k+1} \qquad (17)$$

$$P(n \le k) = 1 - \rho^{k+1} \qquad (18)$$

$$P(t_f > t) = \frac{\lambda}{\mu}.e^{-(\mu-\lambda).t} \qquad (19)$$

Exemplul nr. 9.2.

La un ghişeu public sosirile solicitanţilor sunt aleatoare, iar legea de repartiţie a sosirilor este Poisson, cu media de 12 persoane pe oră. Timpul de servire a unei persoane de către persoana de la ghişeu este o variabilă aleatoare ce urmează o lege de repartiţie exponenţială cu media de 4 minute.
Să se determine:

a) Probabilitatea ca o persoană care soseşte la un moment dat la ghişeu să intre imediat la servire.
b) Probabilitatea ca, la un moment dat, să existe 3 persoane în sistemul de aşteptare format.
c) Probabilitatea ca, la un moment dat, să existe cel mult 2 persoane care să aştepte să intre la servire.
d) Numărul mediu de persoane aflate la un moment dat în sistem, respectiv în curs de servire şi în firul de aşteptare, precum şi timpul mediu de aşteptare în fir şi în sistem, al unei persoane.
e) Probabilitatea ca timpul de aşteptare a unei persoane, în faţa ghişeului, pentru a intra la servire, să depăşească 20 minute.

a) Numărul de persoane ce sosesc la ghişeu este o variabilă aleatoare cu legea Poisson şi $\lambda = 12$ persoane /oră.
Timpul de servire a unei persoane are o repartiţie exponenţială de parametru $\mu = ¼$ personae /minut = 15 persoane / oră.
Se va considera ca unitate de măsură pentru timp ora, factorul de serviciu este

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Evenimentul ca o persoană care soseşte la un moment dat la ghişeu să intre imediat la servire este echivalent cu evenimentul că la acel moment nu există nici o persoană în sistemul de aşteptare respectiv , deci nici la rând, nici la servire şi probabilitatea este p_0 .

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

b) $p_3 = (1 - \rho).\rho^3 = (1 - \frac{4}{5}).(\frac{4}{5})^3 = \frac{64}{625} = 0.1024$

c) Evenimentul, ce constă în faptul că în firul de aşteptare există cel mult 2 persoane este echivalent cu evenimentul că în sistemul de aşteptare există cel mult 3 = 2 + 1 persoane. Se va utilize relaţia (18).

$$P(n \le 3) = 1 - P(n > 3) = 1 - \rho^4 = 1 - (\frac{4}{5})^4 = \frac{369}{625} \approx 0.59$$

d) Se utilizează relaţiile (11), (13), (14), (15), (16).

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{12}{15-12} = \frac{12}{3} = 4 \text{ persoane}$$

$$\overline{n_S} = \rho = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\overline{n_f} = \bar{n} - \overline{n_S} = 4 - 0.8 = 3.2 \text{ persoane}$$

$$t_f = \frac{\lambda}{\mu.(\mu - \lambda)} = \frac{12}{15(15-12)} = \frac{4}{15} \text{ ore} = 16 \text{ minute}$$

$$t_S = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{15-12} = \frac{1}{3} \text{ ore} = 20 \text{ minute}$$

e) t = 20 minute = $\frac{1}{3}$ ore

$$P(t_f > \frac{1}{3}) = \frac{\lambda}{\mu}.e^{-(\mu-\lambda).t} = \frac{4}{5}.e^{-3.\ 1/3} = \frac{4}{5}.e^{-1} \approx 0.294$$

9.3.4.. Modelul de aşteptare POISS (λ)/∞/EXP (μ)/1: (N,FIFO)

Acest model de aşteptare are sursa nelimitată, foarte mare, teoretic ∞, şi o capacitate a firului de aşteptare de N unităţi, disciplina de servire este FIFO – primul sosit, primul servit, dar o singură staţie de servire, sosirile sunt Poisson cu media λ şi servirile sunt exponenţiale de parametru μ (cu media $\frac{1}{\mu}$). Unităţile care vor să intre în sistem când coada (firul) de aşteptare conţine N unităţi, părăsesc sistemul, fiind refuzate. În sistemul de aşteptare pot intra cel mult N + 1 unităţi, N în firul de aşteptare şi una în staţia de servire. Probabilitatea p_n ca în sistemul de aşteptare să existe n unităţi este dată de relaţia (20).

$$p_n = \begin{cases} \rho^n.\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} & , pentru \quad n = 0,1,2,...N, N+1 \\ 0 \quad , pentru & n = N+2,, N+3, \quad ... \end{cases} \qquad (20)$$

Probabilitatea p_0 ca în sistemul de aşteptare să existe zero unităţi, deci nici un client, este dată de relaţia (21).

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} \qquad (21)$$

Numărul mediu de unităţi (clienţi) ce se găsesc la un moment dat în sistemul de aşteptare este $\bar{n}$ din (22).

$$\bar{n} = \rho.\frac{(N+1)\rho^{N+2} - (N+2).\rho^{N+1} + 1}{(1-\rho).(1-\rho^{N+2})} \qquad (22)$$

Numărul mediu de unităţi (clienţi) ce se găsesc la un moment dat în curs de servire este $\overline{n_S}$ din (23).

$$\overline{n_S} = 1 - p_0 = \frac{\rho(1-\rho^{N+1})}{1-\rho^{N+2}} \qquad (23)$$

Numărul mediu de unităţi (clienţi) ce se găsesc la un moment dat în firul (coada) de aşteptare este $\overline{n_f}$ din (24).

$$\overline{n_f} = \bar{n} - \overline{n_S} \qquad (24)$$

Timpul mediu de aşteptare al unei unităţi (client) în coadă t_f se determină cu relaţia (25).

$$t_f = \frac{\overline{n_f}}{\mu.\ \overline{n_S}} = \frac{\rho}{\mu.(1-\rho).(1-\rho^{N+1})}.\left[1-(N+1)\rho^N + N.\rho^{N+1}\right] \qquad (25)$$

Timpul mediu de aşteptare al unei unităţi (client) în sistemul de aşteptare t_S se determină cu relaţia (26).

$$t_S = t_f + \frac{1}{\mu} \qquad (26)$$

Probabilitatea să fie refuzate unităţile ce vor să intre în sistemul de aşteptare deoarece nu mai există locuri în coada de aşteptare este dată de relaţia (27).

$$p_{N+1} = \rho^{N+1} \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} \qquad (27)$$

Probabilitatea ca timpul de aşteptare a unei unităţi în coada de aşteptare să depăşească o valoare dată t este dată de relaţia (28).

$$P\ (t_f > t) = e^{-\mu.t} \cdot \frac{\rho}{1-\rho^{N+2}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\mu.t)^k}{k!} \cdot (\rho^k - \rho^N) \qquad (28)$$

Exemplul nr. 9.3.

La o benzinărie există 5 locuri de aşteptare a maşinilor, sosirile sunt aleatoare, de natură poissoniană, cu media de 0.753 maşini pe minut. Există o singură pompă de servire cu un angajat, timpul de servire este aleatoriu, de natură exponenţială , cu timpul mediu de servire egal cu 67.5 secunde. Maşinile care sosesc la benzinărie şi găsesc toate locurile de aşteptare ocupate, pleacă la altă benzinărie concurentă. Să se determine:

a) probabilitatea ca o maşină sosită la benzinărie la un moment dat, să nu aştepte, ci să intre imediat la alimentare;
b) probabilitatea ca o maşină, sosită la un moment dat, să nu găsească loc de aşteptare, deci să plece fără a fi servită;
c) probabilitatea ca timpul de aşteptare a unei maşini, până să intre la servire, să depăşească 5 minute;

Sosirile la benzinărie sunt aleatoare de tip Poisson cu parametrul λ = 0.753 maşini/minut , unitatea de timp este minutul.

Timpul mediu de servire a unei maşini este

$t_{servire}$ = 67.5 secunde = 1.125 minute = 9/8 minute

$\mu = 1/t_{servire} = 1/1.125 = 8/9 \approx 0.888$ maşini/minut

Factorul de serviciu: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \approx 0.753 / 0.888 \approx 0.848$

N = 5 locuri de aşteptare

a) O maşină sosită la benzinărie nu aşteaptă, dacă în sistemul de aşteptare nu se găseşte nici o maşină la acel moment, se va utiliza (21) pentru calculul probabilităţii p_0 .

$P_0 = (1 - 0.848)/(1 - 0.848^7) \approx 0.152/0.684 \approx 0.222$

b) O maşină pleacă fără a fi servită, dacă la sosire nu are loc în coada de aşteptare, deci în sistemul de aşteptare sunt 6 = 5 + 1 maşini, 5 aşteaptă şi una este la servire. Se va utilize (27).

$P_6 = 0.848^6 .(1 - 0.848)/(1 - 0.848^7) \approx 0.372 . 0.222 \approx 0.083$

c) Probabilitatea ca timpul de aşteptare al unei maşini în coada de aşteptare să depăşească valoarea dată de t = 5 minute este dată de relaţia (28).

$\mu . t = 0.888 . 5 \approx 4.44$

$P(t_f > 5) = e^{-0.888 \cdot 5} (0.848/(1 - 0.848^7)) . [1/0! (1 - 0.848^5) + 4.44^1/1! . (0.848^1 - 0.848^5) + +4.44^2/2! . (0.848^2 - 0.848^5) + 4.44^3/3! . (0.848^3 - 0.848^5) + 4.44^4/4! .(0.848^4 - 0.848^5)] \approx \approx 0.124$

10. ELEMENTE DE TEORIA JOCURILOR

Teoria jocurilor este modelarea matematică a situaţilor de conflict.

O *situaţie de conflict* se caracterizează prin :

- interesele jucătorilor (adversarilor) , deci a părţilor aflate în conflict nu coincid, fiind chiar opuse;
- fiecare jucător poate să influenţeze într-o anumită măsură mersul evenimentelor;
- nici un participant nu are controlul absolut asupra rezultatului jocului;
- rezultatul final al jocului depinde de strategiile jucătorilor, dar şi de şansă.

Prin situaţii de *conflict* se înţeleg situaţiile în care se întâlnesc două sau mai multe părţi (firme, indivizi etc.) a căror activitate urmăreşte un scop bine determinat şi în care interesele părţilor sunt contrarii.

Situaţiile conflictuale cuprind următoarele tipuri de conflict:

- lupte, în care obiectivul este distrugerea inamicului;
- jocuri, în care obiectivul constă în depăşirea partenerilor;
- controverse, în care obiectivul este convingerea oponentului.

Competiţia poate implica atât conflictul, cât şi cooperarea. Situaţiile competitive sunt acele situaţii în care mai multe persoane, (n persoane, $n \geq 2$, $n \in N$) folosesc astfel de strategii în atingerea obiectivelor lor încât, cu cât cresc şansele unei persoane de a-şi realiza obiectivul propus, cu atât scad şansele celorlalte persoane de a-şi atinge obiectivele lor.

Prin *joc* se înţelege situaţii în care două sau mai multe persoane, numite jucători, aleg fiecare o decizie şi în care rezultatul este determinat de întreg ansamblul deciziilor alese.

Un joc este caracterizat de următoarele elemente:

- există n persoane care iau decizii, $n \geq 2$, $n \in N$; dacă n = 2, se spune că este un joc de două personae, iar dacă n > 2, este un joc de n persoane;
- există un ansamblu de reguli care sunt cunoscute de jucători şi care precizează ce moduri de acţiune pot fi alese, deci ce partide pot fi realizate;
- este precizată o mulţime de stări finale în care jocul se termină (de exemplu: câştig, egalitate sau pierdere);
- înainte de începerea jocului sunt specificate şi sunt cunoscute de către fiecare jucător câştigurile asociate fiecărei stări finale posibile.

Se spune că a avut loc o *partidă* atunci când fiecare jucător s-a fixat asupra deciziei sale. O *strategie* a unui jucător este un ansamblu de reguli care precizează alegerea sa în fiecare partidă dată.

Un *joc* comportă două elemente fundamentale:

a) un proces constituit dintr-o succesiune de acţiuni (mutări) executate, rând pe rând, de un număr finit de persoane, numite jucători, după anumite reguli care constituie caracteristicile jocului. Un asemenea proces efectiv realizat se numeşte partidă. Sistemul de reguli care determină în mod unic comportamentul jucătorului la fiecare acţiune în funcţie de situaţia definită de mersul jocului, se numeşte strategia jocului. Fiecare din strategiile determinate pe care le poate alege un jucător la un moment din desfăşurarea jocului se numeşte strategie pură. Alegerea de către un jucător la un moment din desfăşurarea jocului a unei strategii în concordanţă cu o anumită distribuţie de probabilitate a căilor de acţiune se numeşte stategie mixtă.

b) o regulă de repartiţie de valori între jucători, care permite fiecărui jucător să îşi fixeze ca scop realizarea unei valori cât mai mari.

Teoria jocurilor utilizează trei ipoteze fundamentale:

- jucătorii se comportă *raţional* (o persoană este considerată " raţională", dacă aceasta are, printre alte capacităţi, capacitatea de a analiza variantele, de a evalua riscurile şi a încerca să le reducă) ;

- fiecare jucător ştie că *ceilalţi sunt raţionali*;

- toţi jucătorii *cunosc regulile jocului*.

Există jocuri în care unul dintre jucători nu este raţional , acest jucător este numit *natură* şi influenţează strategiile, dar şi câştigurile celorlalţi jucători (de exemplu: inundaţii, secetă, cutremure, război etc.).

Un joc de n jucători este definit de mulţimea $(X_1, X_2, \ldots, Xn; f_1, f_2, \ldots, f_n)$, în care X_i reprezintă mulţimea strategiilor (acţiunilor) jucătorului i , iar f_i este funcţia câştigurilor jucătorului i,

$$f_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \rightarrow R , \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

O strategie a jocului este definită de vectorul $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Într-un joc se pune problema cum să aleagă jucătorul i strategia x_i astfel încât să obţină un câştig $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cât mai mare, funcţie de ceilalţi jucători care au acelaşi obiectiv.

Punctul de echilibru al unui joc de n persoane este o strategie $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$,

pentru care:

$$f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \geq f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) , i = 1, 2, \ldots , n, (\forall) x_i \in X_i .$$

Punctul de echilibru este o strategie de la care nici un jucător nu se poate abate fără a pierde.

Clasificări ale jocurilor

1. După *numărul partenerilor de joc* (*jucătorilor*) jocurile se clasifică în :

- jocuri cu doi jucători;
- jocuri cu n jucători, n > 2;
- jocuri cu un jucător sau contra naturii;
- jocuri cu o infinitate numărabilă de jucători;
- jocuri cu o infinitate continuă de jucători (jucătorii sunt toate punctele intervalului [0, 1]).

2. După *valoarea sumei câştigurilor* jocurile se clasifică în :

- jocuri cu sumă nulă, în care câştigul unui jucător reprezintă pierderea celorlalţi jucători;
- jocuri cu sumă constantă;
- jocuri cu sumă neconstantă.

3. După posibilităţile de cooperare.

Trebuie stabilit dacă regulile jocului permit sau nu următoarele cooperări:

(C1) încheierea de acorduri ferme (acestea devin obligatorii) între jucători pentru alegerea în comun a strategiilor; comunicarea între jucători poate fi interzisă prin regulile jocului;

(C2) plăţile laterale, deci transferul de câştiguri (utilităţi) între jucători, în scopul cointeresării lor la o anumită acţiune comună. Dacă regulile jocului permit sau nu cele două cooperări (C1), (C2), jocurile se clasifică astfel:

- *jocul cooperativ* este jocul ale cărui reguli permit cele două tipuri de cooperări (C1) şi (C2);
- *jocul fără plăţi laterale* este jocul ale cărui reguli permit încheierea de acorduri ferme (C1), dar exclud transferul câştigurilor (plăţile laterale (C2));
- *jocul necooperativ* este jocul ale cărui reguli interzic acordurile ferme şi plăţile laterale, deci sunt interzise (C1) şi (C2)).

4. După numărul strategiilor:

- jocuri finite, sunt jocuri în care fiecare dintre jucători are la dispoziţie o mulţime finită de strategii;

- jocuri infinite, sunt jocuri în care fiecare dintre jucători are la dispoziţie o mulţime infinită (numărabilă, deci 1, 2, …, n, …) de strategii;

- jocuri continue, sunt jocuri în care fiecare jucător are la dispoziţie un infinit continuu de strategii pure, reprezentate în general ca puncte din intervalul [0, 1].

5. După desfăşurarea în timp a jocurilor:

- jocuri statice
- jocuri dinamice

Jocul static este acel joc în care deciziile jucătorilor se iau simultan, după care jocul ia sfârşit.

Jocul dinamic este acel joc în care deciziile jucătorilor sunt secvenţiale, adică sunt succesive în timp.

6. După natura informaţiei:

- jocuri cu informaţie completă;
- jocuri cu informaţie incompletă.

Jocul cu informaţie completă este acel joc în care toţi jucători cunosc numărul celorlalţi jucători, strategiile şi funcţiile de câştig ale fiecăruia.

Jocul cu informaţie incompletă este jocul în care cel puţin unul dintre jucători nu cunoaşte una sau mai multe funcţii de câştig ale celorlalţi jucători, restul elementelor (numărul celorlalţi jucători şi strategiile fiecăruia) fiind cunoscute.

7. Jocurile dinamice, în raport cu tipul informaţiei:

- jocuri cu informaţie perfectă;
- jocuri cu informaţie imperfectă.

Jocul dinamic cu informaţie perfectă este jocul dinamic în care fiecare dintre jucători cunoaşte regulile, numărul jucătorilor, strategiile acestora, precum şi evoluţia în timp a jocului (istoria jocului).

Jocul dinamic cu informaţie imperfectă este jocul dinamic în care măcar unul dintre jucători nu cunoaşte istoria jocului, cunoscând celelalte elemente.

*8. După certitudinea informaţiilor jocurilor***:**

- jocuri deterministe, toate elementele care caracterizează jocul sunt certe;
- jocuri stocastice, sunt jocuri în care toate sau anumite elemente ale jocului sunt cunoscute cu anumite probabilităţi;
- jocuri fuzzy.

Jocuri de două persoane cu sumă nulă

Jocul de două persoane cu sumă nulă este un sistem închis, în care câştigul unui jucător reprezintă o pierdere egală pentru celălalt jucător.

Un joc de două persoane finit şi cu sumă nulă se numeşte joc matriceal.

Fie jocul matriceal $\Gamma = (X, Y, f)$.

Se notează cu:

- X mulţimea strategiilor pure ale primului jucător, notat cu I;

$$X = \{1, 2, \ldots, m\}$$

Se spune că jucătorul I foloseşte *o strategie pură* i, dacă în vectorul x al strategiilor ale primului jucător:

$$x_i = 1 \text{ şi } x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_m = 0$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Se spune că jucătorul I foloseşte *o strategie mixtă*, dacă jucătorul I foloseşte cel puţin două strategii pure, fiecare cu o probabilitate mai mică decât 1.

Deci, vectorul x al strategiilor mixte ale primului jucător, I ,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

x_i este probabilitatea ca primul jucător I să aleagă strategia pură i , $x_i \in [0, 1)$, i = 1, 2, ..., m;

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

- în mod analog, Y este mulţimea strategiilor pure ale celui de al doilea jucător, notat cu II;

$$Y = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Se spune că jucătorul II foloseşte *o strategie mixtă*, dacă jucătorul II foloseşte cel puţin două strategii pure, fiecare cu o probabilitate mai mică decât 1.

Deci, vectorul y al strategiilor mixte ale celui de al doilea jucător, II;

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

y_j este probabilitatea ca al doilea jucător II să aleagă strategia pură j , $y_j \in [0, 1)$, j = 1, 2, ... ,n;

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

- f funcţia de câştig a jocului, A matricea jocului.

$$A = (a_{ij}) \ , i = 1, 2, ...,m; j = 1, 2, ..., n;$$

a_{ij} = f(i, j) = câştigul jucătorului I, dacă jucătorul I a ales strategia $i \in X$ şi jucătorul II a ales strategia $j \in Y$, iar jucătorul II câştigă $-a_{ij}$, nici unul dintre cei doi jucători nu cunoaşte alegerea făcută de celălalt.

Se consideră un joc de două persoane cu suma nulă, *primul jucător* este jucătorul maximizant.

Al *doilea jucător* este jucătorul minimizant. Se rezolvă jocul considerat, trebuie determinată strategia optimă, fie determinând *un punct şa* sau *punct de echilibru*, adică un punct care verifică relaţia (10.1):

$$V_I = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} = V_{II} = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij} \qquad (10.1)$$

dacă există punct şa, fie se determină strategiile mixte cu programare liniară.

Punctul şa are proprietatea că strategiile corespunzătoare lui sunt cele mai bune pentru ambii jucători, în sensul că fiecare dintre ei ştie că, în cel mai rău caz, strategia aleasă îi oferă cea mai bună posibilitate. Dacă unul dintre parteneri renunţă la strategia optimă, celălalt este avantajat.

În general, $V_I \le V_{II}$.

Pentru determinarea strategiilor mixte prin programare liniară, se notează cu x vectorul strategiilor mixte ale primului jucător, jucătorul I, dat de relaţia (10.2), respectiv cu y vectorul strategiilor mixte ale celui de al doilea jucător, II, dat de relaţia (10.3):

$$x = (x_1 , x_2 , \ldots , x_m) , \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 , x_i \in [o , 1] ; \qquad (10.2)$$

$$y = (y_1 , y_2 , \ldots , y_n) , \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 , y_j \in [0 , 1]. \qquad (10.3)$$

Se notează cu v valoarea jocului pentru jucatorul I, care este jucătorul maximizant şi doreşte să câştige cât mai mult, deci acesta urmăreşte max v. Se notează cu u valoarea jocului pentru jucătorul II, jucătorul minimizant, acesta urmăreşte să piardă cât mai puţin, urmăreşte min u.

Exemplul nr. 10.1.

Se va determina punctul şa pentru jocul matricial cu matricea câştigurilor A .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & \underline{2} & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru primul jucător:

$v_I = \max\limits_{1 \le i \le 3} \min\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$ = max[min(5, 1, 3), min(3, 2, 4), min(-4, 0, 1)] = max(1, 2, - 4) = 2 = a_{22}

Pentru al doilea jucător:

$v_{II} = \min\limits_{1 \le j \le 3} \max\limits_{1 \le i \le 3} a_{ij}$ = min[max(5, 3, -4), max(1, 2, 0), max(3, 4, 1)] = min(5, 2, 4) = 2 = a_{22}

deci, $v_I = v_{II} = a_{22} = 2$ este punct şa (punct de echilibru).

Exemplul nr. 10.2.

Pentru jocul matricial cu matricea câştigurilor A, nu există punct şa.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Pentru primul jucător:

$v_I = \max\limits_{1 \le i \le 2} \min\limits_{1 \le j \le 2} a_{ij}$ = max[min(- 3, 3), min(3, - 3)] = max(- 3, - 3) = - 3

Pentru al doilea jucător:

$v_{II} = \min\limits_{1 \le j \le 2} \max\limits_{1 \le i \le 2} a_{ij}$ = min[max(- 3, 3), max(3, - 3)] = min (3, 3) = 3

$v_I = - 3 < v_{II} = 3$

Deci, nu există punct şa (punct de echilibru).

Determinarea strategiilor mixte prin programare liniară

Se notează:

$$\frac{x_i}{v} = X_i \quad , i = 1, 2, \ldots, m; \qquad (10.4)$$

$$\frac{y_j}{u} = Y_j \quad , j = 1, 2, \ldots, n;$$

Pentru jucătorul I, primul, valoarea jocului este v, pentru determinarea strategiilor optime mixte, trebuie rezolvată problema de programare liniară (10.5).

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot X_i \ge 1 \quad , j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$X_i \ge 0 \quad , i = 1, 2, \ldots, m; \qquad (10.5)$$

$$\min (X_1 + X_2 + \ldots + X_m) = \min 1/ v$$

Pentru al doilea jucător, jucătorul II, valoarea jocului este u, determinarea strategiilor optime mixte se reduce la rezolvarea problemei de programare liniară (10.6), duala problemei (10.5).

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot Y_j \le 1$$

$$Y_j \ge 0 \quad , j = 1, 2, \ldots, n; \qquad (10.6)$$

$$\max(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n) = \max 1/u$$

unde:

- a_{ij} este câştigul jucătorului I (primul jucător, jucatorul maximizant), dacă jucătorul I a ales strategia i şi jucătorul II (al doilea jucător, jucătorul minimizant) a ales strategia j , i = 1, 2, ... , m; j = 1, 2, .. . , n;
- v este câştigul jucătorului I, iar u este câştigul jucătorului II , u = v .

Strategiile mixte optime se determină rezolvând problemele de programare liniară (10.5) şi (10.6) cu algoritmul simplex primal sau dual, respectiv utilizând programul Qsb, Dsspom, Lindo sau altul, obţinându-se u, v, X_i , Y_j , apoi relaţiile (10.4) dau componentele x_i şi y_j , i = 1, 2,..., n; j = 1, 2, ..., n; ale strategiilor mixte x, respectiv y ale celor doi jucători.

Exemplul nr. 10.3.

Se va demonstra că nu există punct şa pentru jocul matricial cu matricea câştigurilor A. Se vor determina strategiile optime mixte prin programare liniară.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_I = \max\limits_{1 \le i \le 3} \min\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$ = max[min(5, 2, 4), min(6, 7, 3), min(4, 5, 1)] = max(2, 3, 1) = 3

$v_{II} = \min\limits_{1 \le j \le 3} \max\limits_{1 \le i \le 3} a_{ij}$ = min[max(5, 6, 4), max(2, 7, 5), max(4, 3, 1)] = min(6, 7, 4) = 4

Deci : $v_I = 3 < v_{II} = 4$

Nu există punct şa.

Strategiile optime mixte ale jucătorului I se determină rezolvând problema de programare liniară (se iau coloanele matricii A):

$5 . X_1 + 6 . X_2 + 4 . X_3 \ge 1$

$2 . X_1 + 7 . X_2 + 5 . X_3 \ge 1$

$4 . X_1 + 3 . X_2 + 1 . X_3 \ge 1$

$X_i \ge 0$, i = 1, 2, 3;

$Min(X_1 + X_2 + X_3) = min\ 1/v$

Se rezolvă cu programul Qsb, modulul Linear Programming.

$X_1 = 2/11$, $X_2 = 1/11$, $X_3 = 0$

$1/v = X_1 + X_2 + X_3 = 2/11 + 1/11 + 0 = 3/11$

$v = 11/3$

$\frac{x_i}{v} = X_i$, deci: $x_i = v . X_i$, i = 1, 2, 3;

$x_1 = 2/11 . 11/3 = 2/3$

$x_2 = 1/11. 11/3 = 1/3$

$x_3 = 0$

Strategia mixtă optimă a jucătorului I este x:

x = (2/3 , 1/3, 0)

$x_1 + x_2 + x_3 = 2/3 + 1/3 + 0 = 1$

Strategiile mixte ale jucătorului II se determină rezolvând problema de programare liniară duală celei a jucătorului I:

$5 . Y_1 + 2 . Y_2 + 4 . Y_3 \le 1$

$6 . Y_1 + 7 . Y_2 + 3 . Y_3 \le 1$

$4 . Y_1 + 5 . Y_2 + 1 . Y_3 \le 1$

$Y_j \ge 0$, j = 1, 2, 3

$Max(Y_1 + Y_2 + Y_3) = max\ 1/u$

Se rezolvă cu programul Qsb, modulul Linear Programming.

$Y_1 = 0$, $Y_2 = 1/22$, $Y_3 = 5/22$

$1/u = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0 + 1/22 + 5/22 = 6/22 = 3/11 = 1/v$

$u = 11/3 = v$

$\frac{y_j}{u} = Y_j$, deci $y_j = u . Y_j$, j = 1, 2, 3;

$y_1 = 0$

$y_2 = 1/22 . 11/3 = 1/6$

$y_3 = 5/22 \cdot 11/3 = 5/6$
Strategia mixtă optimă a jucătorului II este y
$y = (0, 1/6, 5/6)$
$y_1 + y_2 + y_3 = 0 + 1/6 + 5/6 = 1$

Jocuri de două persoane cu sumă arbitrară

Un joc finit de două persoane cu sumă arbitrară (generală, constantă), numit joc bimatriceal, este definit de mulţimea $\Gamma = (X, Y, A, B)$,
unde:

$X = \{1, 2, ..., m);$
$Y = (1, 2, ..., n);$

reprezintă mulţimile strategiilor pure ale celor doi jucători;

$A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n;$

este matricea câştigului jucătorului I;

$B = (b_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n;$

este matricea câştigului jucătorului II;

a_{ij} – câştigul jucătorului I când jucătorul I foloseşte strategia pură i şi jucătorul II foloseşte strategia pură j;

b_{ij} - câştigul jucătorului II când jucătorul I foloseşte strategia pură i şi jucătorul II foloseşte strategia pură j;

$a_{ij} + b_{ij} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n;$

Un *joc bimatriceal* mai poate fi reprezentat printr-o matrice de perechi (a_{ij}, b_{ij}),

$(A, B) = ((a_{ij} , b_{ij}))$, $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n;$

O altă definire a unui *joc bimatriceal* este $\Gamma = (X, Y, f, g)$,
unde:

$X = \{1, 2, ..., m);$
$Y = (1, 2, ..., n);$

reprezintă mulţimile strategiilor pure ale celor doi jucători;
f, g sunt funcţiile de câştig a celor doi jucători.

$f: X \times Y \rightarrow R$
$g: X \times Y \rightarrow R$
$f(i, j) = a_{ij}$
$g(i, j) = b_{ij}$, $i \in X, j \in Y$ sunt strategiile pure ale celor doi jucători
$A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n;$
$B = (b_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n;$
A, B sunt matricile câştigurilor (plăţilor) celor doi jucători;

Jocurile bimatriciale cuprind două clase: jocuri necooperative şi jocuri cooperative.

Jocurile bimatriciale necooperative interzic orice înţelegere (colaborare, acord) între cei doi jucători.

Jocurile bimatriciale cooperative permit diverse înţelegeri (cooperări, acorduri) între cei doi jucători.

10. 5.1. JOCURI BIMATRICIALE NECOOPERATIVE

Definiţiile strategiilor mixte ale celor doi jucători sunt aceleaşi cu cele de la jocurile matriciale.

Jucătorul I foloseşte *o strategie mixtă* sau *strategie aleatoare*, dacă foloseşte cel puţin două strategii pure, fiecare cu o probabilitate mai mică decât 1.

Se notează cu x vectorul strategiilor mixte ale primului jucător, I ,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

x_i este probabilitatea ca primul jucător I să aleagă strategia pură i , $x_i \in [0, 1)$, i = 1, 2, ..., m;

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

Jucătorul II foloseşte *o strategie mixtă* sau *strategie aleatoare*, dacă foloseşte cel puţin două strategii pure, fiecare cu o probabilitate mai mică decât 1.

Se notează cu y vectorul strategiilor mixte ale celui de al doilea jucător, II;

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

y_j este probabilitatea ca al doilea jucător II să aleagă strategia pură j , $y_j \in [0, 1)$, j = 1, 2, ... ,n;

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

Dacă jucătorul I foloseşte strategia i cu probabilitatea x_i şi jucătorul II strategia j cu probabilitatea y_j , x şi y fiind vectorii strategiilor mixte, *câştigul mediu al jucătorului I* este: E_1 (x, y), iar *al jucătorului II* este E_2 (x, y).

$$E_1 (x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} .x_i .y_j .a_{ij}$$

$$E_2 (x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} .x_i .y_j .b_{ij}$$

Sau în scriere matricială:

$$E_1 (x, y) = x.A.y^t$$

$$E_2 (x, y) = x.B.y^t$$

Punctul de echilibru al unui joc bimatricial se defineşte prin perechea de strategii mixte (x^* , y^*) care verifică relaţiile (10.7):

$$x.A.y^{*t} \le x^*.A.y^{*t}$$

$$x^*.B.y^t \le x^*.B.y^{*t} \qquad (10.7)$$

pentru orice strategii mixte x, y.

Strategiile mixte (x^* , y^*) se numesc punct de echilibru.

Teorema 10. 3.

Orice joc bimatricial posedă cel puţin un punct de echilibru.

Exemplul nr. 10.6.

Se consideră un joc celebru, numit bătălia sexelor. Acest joc constă în următoarele: într-o familie, soţul şi soţia trebuie să decidă unde vor merge într-o seară pentru a se distra, având de ales între a merge la un meci de fotbal şi a merge la teatru. Dintre aceste variante, soţul preferă să meargă la fotbal, iar soţia la teatru. Dacă unul dintre ei cedează, atunci cel care cedează va avea câştigul 1, iar cel care nu cedează, va câştiga 4. În cazul în care nici unul nu cedează, atunci vor ramâne acasă, iar câştigul fiecăruia va fi 0.
Să se determine punctele de echilibru ale jocului bimatricial definit de matricial (A, B).

Tabelul nr. 10.1.

Soţie / Soţ	F = Fotbal	T = Teatru
F = Fotbal	(4, 1)	(0, 0)
T = Teatru	(0, 0)	(1, 4)

Se consideră că soţul este jucătorul I şi soţia jucătorul II. Matricea câştigurilor este (A, B).

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{pmatrix}$$

Strategiile pure $x^* = (1, 0)$ şi $y^* = (1, 0)$ formează un punct de echilibru, dar şi strategiile pure: $x^{*1} = (0, 1)$ şi $y^{*1} = (0, 1)$ formează un punct de echilibru. Se verifică că strategiile (x, y^{*1}) şi (x^{*1}, y) nu sunt puncte de echilibru.
Matricile de câştig ale celor doi jucători sunt:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Fie strategiile mixte x şi y ale celor doi jucători:

$x = (x_1, x_2), x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ x_1 + x_2 = 1$
$y = (y_1, y_2), y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ y_1 + y_2 = 1$

Se înlocuiesc aceste valori în relaţiile (10.7), deci :

$$x.A.y^{*t} \leq x^*.A.y^{*t}$$

Deci :

$$(x_1, x_2) . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq (1, 0) . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4.x_1, x_2). \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq (4, 0) . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4.x_1 \leq 4 ,$$

$$x_1 \leq 1 ,$$

adevărat , $x_1 \in [0, 1)$, fiind o probabilitate

$$x^*.B.y^t \leq x^*.B.y^{*t}$$

$$(1, 0) . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq (1, 0) . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1, 0) . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq (1, 0) . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 \leq 1 ,$$

adevărat , $y_1 \in [0, 1)$, fiind o probabilitate
În mod analog se face verificarea că strategiile :
$x^{*1} = (0, 1)$ şi $y^{*1} = (0, 1)$ formează un punct de echilibru.
Se verifică în mod analog că strategiile (x, y^{*1}) şi (x^{*1}, y) nu sunt puncte de echilibru.

Punctul de echilibru (x^*, y^*) aduce primului jucător câştigul $a_{11} = 4$ şi celui de al doilea jucător câştigul $b_{11} = 1$, iar al doilea punct de echilibru (x^{*1}, y^{*1}) aduce primului jucător câştigul $a_{22} = 1$ şi celui de al doilea jucător câştigul $b_{22} = 4$, deci câştigurile corespunzătoare celor două puncte de echilibru sunt diferite, fiecare jucător va prefera un anumit punct de echilibru, rezultând că cele două puncte de echilibru nu sunt stabile. Jucătorul I va dori folosirea strategiilor pure $x^* = (1, 0)$ şi $y^* = (1, 0)$, iar jucătorul II va dori folosirea strategiile pure $x^{*1} = (0, 1)$ şi $y^{*1} = (0, 1)$. Rezultă că jucătorul I va folosi strategia pură i = 1, iar jucătorul II j = 2, jocul fiind necooperativ, nu sunt posibile negocieri, rezultă câştigurile celor doi jucători vor fi minime, $a_{12} = 0$, $b_{12} = 0$, deci pierd amândoi. Dacă jucătorii sunt raţionali vor trece de la lipsa cooperării la cooperare, la negociere pentru a câştiga amândoi mai mult. Dacă jocul este cooperativ, deci sunt permise negocieri, unul dintre jucători va ceda propunerilor celuilalt, amândoi vor câştiga mai mult de zero, adică un jucător câştigă 4 şi celălalt 1.

10. 5.2. JOCURI BIMATRICIALE COOPERATIVE

Jocurile bimatriciale cooperative permit diverse acorduri (înţelegeri, cooperări, plăţi) între cei doi jucători. Un jucător câştigă cu atât mai mult, cu cât celălalt jucător câştigă mai puţin, dar acest lucru nu este o regulă. Pentru jocurile bimatriciale trebuie analizate în cadrul cooperării *problemele negocierilor* şi *ale ameninţărilor*. Se pune problema cât de mult va accepta un jucător să dea celuilalt şi cât de puţin va accepta să-i fie câştigul ca preţ al cooperării (negocierii) sale. Există un câştig minim pe care un jucător îl va accepta care este egal cu câştigul pe care îl poate obţine dacă acţionează în mod independent, indiferent de acţiunea celuilalt jucător. Acest câştig este pentru cei doi jucători egal cu valorile maxmin u^*, respectiv v^* :

$$u^* = \max_x \min_y x.A.y^t \qquad (10.8)$$

$$v^* = \max_y \min_x x.B.y^t$$

când x şi y parcurg toate strategiile mixte ale jocului bimatricial (A, B).
Rezultatul negocierii va depinde de abilitatatea de negociere şi personalitatea fiecărui jucător.
Raţionalitatea problemelor de negociere pentru jocurile bimatriciale cooperative a fost susţinută de un sistem de axiome enunţate de John Nash.

Dacă cei doi jucători nu pot realiza un acord, atunci sunt obligaţi să folosească *strategiile de ameninţare* x şi y pe care le consideră fiecare, rezultând câştigul corespunzător.
O ameninţare este efectivă numai dacă este demnă de crezut, deci verosimilă, şi dacă aplicată ar duce la îmbunătăţirea poziţiei amenţinătorului faţă de persoana ameninţată.
Nash propune negocierea în trei paşi pentru abordarea ameninţărilor:

- jucătorul I îşi alege o strategie de ameninţare x;
- jucătorul II nu cunoaşte strategia x, dar îşi alege o strategie de ameninţare y;
- cei doi jucători negociază şi iau ca bază de pornire a negocierilor strategiile de ameninţare alese. Dacă se poate ajunge la un acord, acest acord este aplicat şi rezultă câştigurile corespunzătoare. Dacă cei doi jucători nu pot realiza un acord, atunci vor fi obligaţi să folosească strategiile de ameninţare x şi y alese, rezultând câştigul corespunzător.

Dacă negocierile eşuează, cei doi jucători vor folosi ameninţările şi valorile maxmin u^* şi v^* vor fi înlocuite cu valorile de ameninţare $x.A.y^t$ şi $x.B.y^t$. Există puncte de echilibru formate din strategii de ameninţare.

Teorema 10. 4.

Orice joc bimatricial posedă cel puţin un punct de echilibru, format din strategiile de ameninţare (x, y).

Determinarea strategiilor de ameninţare optime este o problemă complicată când utilitatea nu este liniar transferabilă. Dacă utilitatea este liniar transferabilă, adică utilitatea poate fi transferată la rata 1 : 1, o unitate din utilitatea jucătorului I când este transferată jucătorului II îi măreşte acestuia utilitatea cu o unitate, determinarea strategiilor de ameninţare optime este relativ simplă.
Valorile negociate corespunzătoare strategiilor de ameninţare x şi y sunt:

$$u_0 = \frac{x.A.y^t - x.B.y^t + k}{2} \qquad (10.9)$$

$$v_0 = \frac{x.B.y^t - x.A.y^t + k}{2}$$

iar k reprezintă utilitatea maximă care poate fi obţinută de jucătorii I şi II dacă acţionează împreună.
Jucătorul I va dori să maximizeze expresia:

$$x.(A - B).y^t$$

iar jucătorul II vrea să minimizeze această expresie. Strategiile de ameninţare optime pentru jocul bimatricial (A, B) coincid cu strategiile optime pentru jocul matricial A – B a căror rezolvare a fost deja analizată.

11. ELEMENTE DE TEORIA DECIZIEI

11.1. PROCESUL DECIZIONAL

Managementul firmei este în strânsă legătură cu procesul de luare a deciziilor, decizia fiind una din funcţiile managementului. Managementul se exercită prin decizii. Toţi autorii care abordează problematica optimizării deciziilor urmăresc asigurarea raţionalităţii procesului decizional.

Decizia este hotărârea de a alege o anumită variantă de acţiune, din mai multe posibile, ataşate unui anumit proces sau fenomen. Decizia se adoptă pentru ca procesul sau fenomenul studiat să evolueze în sensul stabilit dinainte de o persoană denumită decident (sau mai multe persoane denumite decidenţi). Decizia reprezintă momentul esenţial al conducerii, finalitatea oricărui proces de management.

Procesul de luare a deciziilor (procesul decizional) este mulţimea acţiunilor întreprinse de decident (decidenti) în vederea stabilirii deciziei.

Progresul unei firmei este determinat de calitatea deciziilor luate. Funcţionalitatea şi viabilitatea oricărei organizaţii, firme se asigură prin deciziile luate.

Decizia managerială este acea decizie care are urmări nemijlocite asupra acţiunilor şi deciziilor a cel puţin unei alte persoane. Luarea unei decizii manageriale implică o responsabilitate mare datorită consecinţelor de natură economică, socială şi umană.

În practică decizia managerială are două forme: actul decizional şi procesul decizional.

O decizie are forma unui **act decizional**, în sensul desfăşurării sale, într-o perioadă relativ scurtă de timp, care poate fi de câteva secunde sau minute, se referă la situaţii decizionale de complexitate relativ redusă, repetitive, bazându-se pe intuiţia şi experienţa managerilor.

Factorii primari ai deciziei manageriale sunt decidentul şi mediul ambiant decizional.

Decidentul este reprezentat de un manager sau un organism managerial care, în virtutea obiectivelor, sarcinilor, componentelor şi responsabilităţilor circumscrise, adoptă decizia în situaţia respectivă.

Mediul ambiant decizional constă în mulţimea elementelor endogene şi exogene firmei, care alcătuiesc situaţia decizională, caracterizate prin manifestarea unor influenţe directe şi indirecte semnificative asupra conţinutului şi rezultatelor deciziei manageriale. Mediul ambiant decizional are tendinţa să devină din ce în ce mai complex şi cu un ritm de schimbare foarte rapid.

O situaţie de decizie, care generează un **proces decizional**, este caracterizată de următoarele elemente:

- *decidentul* este persoana care evaluează, analizează, conduce şi aplică procesul care a generat situaţia de decizie;
- *mulţimea variantelor* sau alternativelor (V) este mulţimea posibilităţilor de acţiune la un moment dat, iar fiecare variantă este descrisă prin intermediul unor parametri ataşaţi procesului (aceiaşi pentru toate variantele);
- *mulţimea criteriilor* (C) este mulţimea acelor parametri care caracterizează procesul şi în funcţie de care se urmăreşte compararea variantelor;
- *mulţimea obiectivelor* este mulţimea caracteristicilor (numerice sau nenumerice) ataşate fiecărui criteriu în parte şi care trebuie îndeplinite în urma aplicării deciziei;
- *mulţimea stărilor naturii* (condiţiilor date, favorabile, nefavorabile etc.).

Prin **atribut** se înţelege un mijloc de evaluare a unei variante. Caracteristicile, factorii, proprietăţile sunt sinonime cu atributele. Noţiunea de criteriu este echivalentă cu cea de atribut. Importanţa deciziilor determină nivelul de conducere la care acestea sunt luate.

Necesitatea adoptării unei decizii rezultă din apariţia unor "probleme" în mersul normal al activităţilor firmei sau a unui aspect strategic important pentru viitorul său. Apariţia unei probleme este determinată de factori interni firmei (cunoştinţele, capacitatea , abilitatea salariaţilor şi managerilor, condiţiile de muncă, resurse insuficiente sau inadecvate, resursele umane, motivaţia personalului etc.) şi factori externi (restricţii legislative, informaţiile referitoare la mediul ambiant şi la acţiunea unor factori care pot duce la perturbaţii etc).

Se poate vedea **cum se ia o decizie** atunci când a apărut o "problemă", utilizând secvenţa de întrebări ce urmează mai jos.

1. A apărut o "problemă" ?

   1.1 De când a apărut "problema" ?

   1.2 Unde, când şi cât de frecventă este "problema"?

   1.3 Când s-ar putea soluţiona şi în cât timp ?

2. Care este "problema"?

   2.1. Cine sunt cei în cauză ?
   2.2. Care este performanţa dorită ?
   2.3. Care sunt aspectele specifice ale rezultatelor nedorite?

3. Cât de importantă este problema ? Care este impactul asupra producţiei, firmei, compartimentelor, salariaţilor ?

4. Ce factori au determinat / influenţat apariţia acestei probleme ?

5. Ce soluţii / variante / linii de acţiune ar duce la redresarea situaţiei ?

6. Ce avantaje prezintă soluţiile posibile ?

   6.1. Soluţiile vor duce la creşterea performanţelor ?
   6.2. Ce influenţe au soluţiile / variantele / liniile de acţiune asupra obiectivelor pe termen lung ?
   6.3. Sunt condiţii pentru implementarea cu succes a soluţiilor preconizate ?

6.4. Soluţiile sunt avantajoase din punct de vedere al costurilor şi profitabilităţii ?

6.5. Rezultatele preconizate să fie obţinute sunt compatibile între firmă în ansamblul ei şi fiecare salariat, între nivelul strategic şi nivelul operativ etc. ?

7. Ce soluţie / variantă / linie de acţiune este mai avantajoasă ? Care este decizia optimă ?

Etape ale procesului decizional

Procesul de luare a deciziilor este de o mare complexitate şi responsabilitate, deci este necesar să fie precedat de măsuri de clarificare a problemei, cum ar fi verificarea realităţii problemei respective, stabilirea gradului de prioritate pe care îl prezintă problema în cauză.

O structurare a procesului de luare a deciziilor este următoarea:

1. Precizarea şi definitivarea obiectivului;
2. Adunarea, selectarea şi ordonarea datelor;
3. Analiza informaţiilor;
4. Construirea variantelor şi stabilirea criteriilor;
5. Adoptarea deciziei;
6. Comunicarea deciziei;
7. Aplicarea deciziei;
8. Controlul şi urmărirea aplicării deciziei.

Aceste etape pot fi structurate şi altfel, în alt număr de etape şi conţinut, dar important este ca în finalul rezolvării problemei să se adopte decizia optimă / raţională.

Conceptul de proces decizional este abordat, în general, în două accepţiuni principale: conceptul de proces decizional în sens restrâns, care ia în considerare toate etapele premergătoare actului decizional, şi conceptul de proces decizional în sens larg, care mai cuprinde în plus transmiterea deciziei la locul de aplicare şi controlul modului de aplicare (cele opt etape prezentate mai sus).

Mintzberg a propus o structurare a procesului decizional în şapte faze: recunoaşterea şi diagnosticarea problemei, căutarea, proiectarea, selectarea alternativelor, alegerea deciziei, autorizarea deciziei.

H. Simon a propus un model al procesului decizional iniţial cu trei faze (informarea, proiectarea, alegerea-implementarea), care a evoluat şi a devenit structurat în patru faze în următoarea succesiune: informarea, proiectarea, alegerea, implementarea şi evaluarea rezultatelor. Fiecare fază în sine poate fi un proces decizional complex, se poate descompune în subprobleme , care la rândul lor pot avea etape de informare, proiectare, alegere, implementare şi evaluare a rezultatelor.

Informarea constă în culegerea de date referitoare la sistemul condus.

Faza de informare cuprinde activităţile:

- stabilirea obiectivelor: stabilirea listei de subiecte de interes dintre care unele vor fi criterii de evaluare a alternativelor, gruparea obiectivelor, realizarea diferenţierii dintre obiectivele fundamentale şi cele ajutătoare;
- culegerea datelor şi sesizarea situaţiei decizionale;
- stabilirea frontierelor problemelor (frontierele fizice, temporale şi cele legate de unghiul din care este privită problema) şi evaluarea calităţii datelor, informaţiilor şi cunoştinţelor, rezultând clasa de decizii unde se încadrează: decizii deterministe, decizii în condiţii de risc sau decizii condiţii de incertitudine;

- descompunerea problemei decizionale, dacă problema decizională este complexă.

Proiectarea modelelor şi alternativelor (variantelor) constă în inventarierea alternativelor sau generarea de noi alternative şi evaluarea consecinţelor acestora.
Faza de proiectare cuprinde activităţile:

- construirea unui model, dacă sistemul condus este complex, funcţie de certitudinea informaţiei, utilizând modelul deciziilor în condiţii de certitudine, risc sau incertitudine;

- adoptarea demersului de modelare şi rezolvare a problemei, alegerea criteriilor de apreciere a variantelor;

- stabilirea alternativelor.

Alegerea are ca scop selectarea unei variante decizionale (alternative). Alegerea unei alternative se poate face în mai multe moduri:

- la întâmplare;

- pe bază de rutină, de experienţă;

- pe analogia cu deciziile de succes luate în condiţii asemănătoare;

- decizia prin metode sistematice, prin formule matematice (de exemplu, pentru deciziile multiatribut se pot utiliza algoritmii: maxmin, Leader, Topsis, Onicescu, Electre etc.).

Implementarea şi **evaluarea** rezultatelor se face după aplicarea efectivă a deciziei.
Implementarea unei decizii înseamnă o schimbare a stării sistemului asupra căruia decidentul are autoritate, deşi păstrarea stării actuale este o decizie posibilă, care nu poate fi ignorată.
Implementatrea depinde de decizia optimă sau raţională luată, dar şi de persoanele care trebuie să execute cele stabilite de decizie. *Evaluarea* calităţii unei decizii se apreciază după rezultatul obţinut în urma aplicării deciziei, dar şi în funcţie de informaţiile disponibile, metodele matematice utilizate şi abundenţa variantelor decizionale identificate sau proiectate, oportunitatea deciziei în sensul elaborării şi adoptării ei la timp.

11.2. CLASIFICĂRI ALE PROCESELOR DECIZIONALE

Se pot face diverse clasificări ale proceselor decizionale după diverse criterii, cum ar fi: numărul criteriilor, numărul variantelor, stările naturii, numărul decidenţilor, logica matematică utilizată, orizontul de timp şi implicaţiile asupra organizaţiei etc.

1. După numărul criteriilor luate în considerare:

- decizii cu un singur criteriu;
- decizii cu mai multe criterii, numite decizii multicriteriale sau decizii multidimensionale;

2. După numărul variantelor decizionale posibile:

- decizii cu un numar finit de variante;
- decizii cu număr infinit de variante;
- dacă modelele de decizie (deciziile) sunt multicriteriale şi sunt un numar finit de variante, se vor numi decizii multiatribut;

- dacă modelele de decizii (deciziile) sunt multicriteriale şi mulţimea variantelor este infinită se vor numi decizii multiobiectiv . (modelul cuprinde o mulţime de restricţii şi o funcţie vectorială de mai multe variabile ale cărei componente trebuie maximizate sau minimizate);

3. După numărul de stări ale naturii şi probabilităţile de realizare a acestora:

- decizii în condiţii de certitudine, o singură stare a naturii, iar probabilitatea de realizare este p = 1 (evenimentul sigur);
- decizii în condiţii de risc (incertitudine de gradul I), sunt mai multe stări ale naturii cu probabilităţi de realizare p_k , k = 1, 2, . . ., r cunoscute,

$$\sum_{k=1}^{r} p_k = 1$$

- decizii în condiţii de incertitudine (incertitudine de gradul II, incertitudine propriu-zisă) , sunt mai multe stări ale naturii, fără a se cunoaşte probabilităţile corespunzătoare;
- decizii în condiţii de ignoranţă (incertitudine de gradul III), când nu se cunosc nici rezultatele (consecinţele) posibile pentru diferite variante, nici probabilităţile de apariţie a stărilor naturii. După unii autori această categorie de decizii nu există.

4. După numărul decidenţilor:

- procese decizionale (decizii) cu un singur decident, deci decizii cu decident individual;
- procese decizionale (decizii) cu mai mulţi decidenţi, numite decizii cu decident multiparticipant (de grup). În prezent, deciziile importante sunt luate de decidenţi de grup. În funcţie de gradul de autoritate şi de răspundere a participanţilor la procesul decizional, decidentul multiparticipant poate fi:
- decident de grup de omologi, când participanţii au poziţii de autoritate egale sau apropiate;
- echipa decizională ierarhică, în care răspunderea deciziei o are conducătorul echipei;
- decident de tip multiparticipant organizaţional, dacă membrii echipei decizionale ocupă poziţii şi au puteri inegale în organizaţie;
- echipe sau grupuri decizionale virtuale, compuse din persoane aflate în locuri diferite care sunt conectate prin internet.

5. După gradul de structurare (de programabilitate)

- decizii nestructurate, numite şi decizii neprogramate, aparţin clasei de probleme nestructurate pentru care nu există o metodă pregătită de rezolvare deoarece fie că nu a apărut până atunci, fie că structura sa este deosebit de complexă sau este atât de importantă încât trebuie o rezolvare specială, pe măsură ;
- decizii structurate, numite şi decizii programate, sunt deciziile care pot fi descrise sau programate sub forma unui algoritm sau sub forma unor proceduri bine definite care pot fi realizate automate; deciziile structurate aparţin clasei de probleme structurate;
- decizii semiprogramate au elemente din deciziile nestructurate şi deciziile structurate.

6. După numărul de procese decizionale considerate în succesiune (frecvenţa lor):

- proces decizional unic, desfăşurat la momentul t;
- succesiuni de procese decizionale desfăşurate la momente de timp diferite.
- periodice, se adoptă la anumite intervale de timp, reflectând caracterul ciclic al proceselor manageriale şi de producţie;
- aleatorii, se adoptă la intervale de timp neregulate şi sunt dificil de anticipat.

7. După logica matematică utilizată:

- decizii pe baza logicii discrete (clasice), care cuprind două subclase:

- decizii care au la bază logica bivalentă, există două valori de adevăr ale variabilelor logice: adevăr şi fals, notate cu 1 şi 0, este valabil principiul terţiului exclus;

- decizii care au la bază logica n-valentă, n > 2 , de tip Lukasiewicz, există n valori de adevăr ale variabilelor logice, intre fals notat cu 0 şi adevăr notat cu 1, fiind posibile n-2 trepte de adevăr, notate cu 0, 1/(n-1), 2/(n-1), …, (n-2)/(n-1), 1;

- decizii pe baza logicii continue: decizii fuzzy (vagi), există mai multe grade de apartenenţă a unui element la o mulţime şi variabilele logice fuzzy iau valori în intervalul [0, 1].

8. După nivelul decizional şi orizontul decizional de timp:

- decizii strategice;

- decizii tactice;

- decizii curente (operaţionale).

Deciziile strategice sunt deciziile care vizează orizonturi de timp mari, în general 3 - 5 ani, se referă la problemele de ansamblu ale organizaţiei şi pentru rezolvarea lor sunt necesare soluţii originale.Deciziile strategice se adoptă în legătură cu strategia firmei, respectiv cu stabilirea obiectivelor strategice, a modalităţilor de realizare, cu stabilirea dimensiunii resurselor ce urmează să fie angajate pentru îndeplinirea obiectivelor şi cu precizarea modalităţilor concrete de obţinere de avantaj competitiv pe piaţa pe care este în competiţie firma. Deciziile strategice se adoptă, în general, de managerii de grup, constituiţi în Consiliul de administraţie, Comitetul de direcţie, adunarea generală a acţionarilor.

Deciziile tactice urmăresc perioade cuprinse între 6 luni şi 2 ani şi activităţi , respectiv compartimente, ce influenţează decisiv funcţionalitatea şi eficacitatea celorlalte componente procesuale şi structurale sau ale firmei. Deciziile tactice sunt pregătite prin procedee reglementate sau logice şi se iau pentru acţiuni concrete care au un oarecare caracter de repetitivitate, iar informaţiile care condiţionează alegerea unor astfel de decizii sunt în cea mai mare parte cunoscute. Deciziile tactice se adoptă fie de organismele participative de management, fie de managerii amplasaţi la nivelul superior al structurii organizatorice (director general, directori executivi).

Deciziile curente (operaţionale) se referă la orizonturi mai mici de timp, de până la câteva luni, şi se adoptă de managerii de nivel mediu şi inferior.

9. După modul de efectuare a calculelor necesare pentru luarea deciziei:

- decizii bazate pe calcule efectuate manual;

- decizii mixte, cu folosirea parţială a calculatorului şi a calculelor manuale, a intuiţiei, a experienţei;

- decizii asistate de calculator. Există sisteme informatice, numite Sisteme Suport pentru Decizie , (*Decision Support Systems – DSS*), pentru ajutarea procesului decizional. O variantă a acestor sisteme informatice o reprezintă Sistemele Suport al Deciziilor de Grup (*Group Decision Support Systems – GDSS*).

10. După eşalonul managerial care le adoptă:

- decizii superioare, se adoptă de eşalonul superior al managementului participativ (adunarea generală a acţionarilor, consiliul de administraţie), manager general şi directorii pe domenii (o parte sunt decizii strategice şi tactice);

- decizii medii, se adoptă de eşalonul mediu al managementului, alcătuit din şefii de secţii şi ateliere (majoritatea sunt decizii curente şi tactice);

- decizii inferioare, se adoptă de către eşalonul inferior al managementului, alcătuit din şefi de birou şi de echipe (sunt numai decizii curente).

11. După posibilitatea anticipării:

- decizii anticipate, se cunosc cu mult timp inainte perioada adoptării şi elementele implicate;

- decizii imprevizibile, perioada adoptării şi principalele elemente implicate se cunosc cu puţin timp inainte de adoptare, depind de intuiţia şi capacitatea decizională a managerilor.

12.) După amploarea sferei decizionale a decidentului:

- decizii integrale, se adoptă din iniţiativa decidentului, fără a fi necesar avizul eşalonului ierarhic superior;
- decizii avizate, aplicarea lor este condiţionată de avizarea la nivelul eşalonului ierarhic superior.

13. După sfera de cuprindere a decidentului:

- decizii participative, se adoptă de organismele de management participativ (consiliul de administraţie, adunarea generală a acţionarilor etc.)
- decizii individuale, se adoptă de către un cadru de conducere al firmei.

14) După modul de elaborare:

14.1. Decizii analitice (sistematice), utilizează analiza şi metode logice, soluţia se obţine printr-un proces raţional de selecţie, alegere raţională, pas cu pas, a celei mai bune variante ;

14.2. Decizii intuitive, utilizează intuiţia, imaginaţia, experienţa, flerul, se bazează pe concepţia că decizia este artă şi nu ştiinţă.

Metode matematice de modelare a fluxurilor materiale – C13 - 2018

11. 3. DECIZII DETERMINISTE

11. 3. 1. DECIZII MONOCRITERIALE

Deciziile monocriteriale sunt apreciate după un singur criteriu C şi cuprind următoarele elemente :

- o mulţime de variante: $\mathbf{V = \{ V_1, V_2, \ldots, V_m \}}$;
- un singur criteriu **C**;
- fiecare variantă V_i este caracterizată în raport cu criteriul C , iar rezultatul evaluării este egal cu a_i , i = 1, 2, . . . , m;
- rezultatele evaluării celor m variante în raport cu criteriul C este un vector al consecinţelor A:

$$A = \mathbf{(a_1 , a_2 , ..., a_m)}$$

Trebuie determinată varianta optimă (cea mai bună) din punctul de vedere al criteriului C sau clasamentul descrescător al variantelor, pe primul loc fiind varianta optimă. Criteriul C poate fi criteriu de maxim sau criteriu de minim.

Dacă criteriul C este **criteriu de maxim,** varianta optimă se obţine din condiţia:

$$a_k = \max \{a_i , i = 1, 2, ..., m\}$$

$$V_{optimă} = V_k$$

Clasamentul variantelor decizionale este dat de ordonarea descrescătoare a componentelor vectorului A, pe primul loc fiind varianta optimă.

Dacă criteriul C este **criteriu de minim**, varianta optimă se obţine din condiţia:

$$a_k = \min \{a_i , i = 1, 2, ..., m\}$$

$$V_{optimă} = V_k$$

Clasamentul variantelor decizionale este dat de ordonarea crescătoare a componentelor vectorului A, pe primul loc fiind varianta optimă.

11. 3. 2. DECIZII MULTIATRIBUT

Deciziile multicriteriale cu un număr finit de variante se numesc **decizii multiatribut.**

Deciziile multiatribut cuprind următoarele elemente :

- o mulţime de variante: $\mathbf{V = \{ V_1, V_2, \ldots, V_m \}}$;
- o mulţime de criterii: $\mathbf{C = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}}$;
- fiecare variantă V_i este caracterizată în raport cu criteriul C_j , iar rezultatul evaluării este egal cu a_{ij} , i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n ;
- rezultatele evaluării celor m variante în raport cu cele n criterii este matricea consecinţelor A:

$$\mathbf{A = (a_{ij})} \text{ , } i = 1, 2, \ldots, m \text{ ; } j = 1, 2, \ldots, n \text{ ;}$$

- sunt situaţii în care nu toate criteriile avute în vedere sunt la fel de importante şi în acest sens importanţa criteriilor este evaluată prin coeficienţi de importanţă p_j, $p_j > 0$, dar intervine în acest caz un anumit grad de subiectivitate,

Aceste elemente sunt sintetizate în tabelul nr.11.2.

Tabelul nr.11.2.

C_j / V_i	C_1	C_2	. . .	C_n
V_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}
V_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
V_m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}
p_j	p_1	p_2	. . .	p_n

Trebuie determinată varianta optimă (cea mai bună) din punctul de vedere al celor n criterii de apreciere a variantelor sau clasamentul descrescător al variantelor, pe primul loc fiind varianta optimă.

Un criteriu, de exemplu profitul, ale cărui valori sunt cu atât mai bune cu cât sunt mai mari, se numeşte criteriu de maxim. Un criteriu, de exemplu costurile, ale cărui valori sunt cu atât mai bune cu cât sunt mai mici, se numeşte criteriu de minim. În problema de decizie multiatribut se urmăreşte ordonarea variantelor mulţimii V de la cea mai bună , la cea mai slabă, ţinând cont de toate criteriile mulţimii C sau determinarea celei mai bune variante din punctul de vedere al ansamblului criteriilor din mulţimea C.

Matricea consecinţelor A conţine, în general, date neomogene, numerice sau nenumerice şi aceste date trebuie omogenizate. Omogenizarea datelor se realizează prin găsirea unei corespondenţe între mulţimea valorilor criteriilor şi o anumită mulţime, iar această corespondenţă se numeşte **scalare**. Scalarea în intervalul [0, 1] este numită normalizare, deci reprezintă transformarea matricei consecinţelor A într-o matrice R cu elementele din intervalul [0, 1].

Dacă:

$\mathbf{A = (a_{ij})}$ este matricea consecinţelor ,

$\mathbf{R = (r_{ij})}$ este matricea normalizată, i = 1, 2, . . . , m; j= 1, 2,. . . , n;

există mai multe posibilităţi de normalizare.

1.) Normalizare vectorială.

Se utilizează relaţiile (11.1) sau (11.2).

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2}} \qquad (11.\ 1)$$

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}} \qquad (11.\ 2)$$

i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n.

2.) Normalizare prin transformări liniare.

2.1.) pentru criterii C_j care se maximizează se utilizează relaţia (11.3).

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}} \qquad (11.\ 3)$$

2.2.) pentru criterii C_j care urmăresc minimul se utilizează relaţia (11. 4).

$$r_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}} \qquad (11.\ 4)$$

1. <u>Metoda MAXIMIN</u>

Decizia optimă este dată de relaţiile (11. 5).

$$r_{sk} = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} r_{ij} \qquad (11.\ 5)$$

$$V_{i\ \ optima} = V_s$$

2. **<u>Metoda MAXIMAX</u>**

Condiţia de optim este (11. 6).

$$r_{sk} = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le j\le n} r_{ij} \qquad (11.\ 6)$$

$$V_{i\ \ optima} = V_s$$

3. <u>Metoda ponderării simple aditive</u>

Se consideră problema de decizie multiatribut cu m variante V_i, n criterii de apreciere a variantelor C_j cu coeficienţii de importanţă p_j , iar matricea consecinţelor este A.

$A = (a_{ij})$, $\quad i = 1, 2,\ldots, m; j = 1, 2,\ldots, n.$

Se normalizează matricea A, rezultând matricea normalizată R.

$R = (r_{ij})$, i = 1, 2,…, m; j = 1, 2,…, n.

Se calculează (11.7).

$$\mathbf{f : V \rightarrow R_+}$$

$$f(V_i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j . r_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} p_j} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (11.7)$$

Varianta optimă este dată de relaţia (11.8).

$$f(V_s) = \max_{1 \le i \le m} f(V_i) \qquad (11.8)$$

$$V_{i\ optima} = V_s$$

4. <u>Metoda ONICESCU</u> - Versiunea 1.

Din matricea consecinţelor A se obţine matricea B, iar din matricea B rezultă matricea C.

$$A = (a_{ij})$$

$$B = (L_{ij})$$

$$C = (\alpha_{ij})$$

unde:

L_{ij} - este varianta care ocupă locul i după de criteriul C_j ;

α_{ij} - reprezintă de câte ori varianta V_i ocupă locul j , i = 1, 2,..., m ;

j = 1, 2, . . . ,n .

Se defineşte funcţia f în (11.9).

$$\mathbf{f : V \rightarrow R_+}$$

$$f(V_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_{ij}}{2^j} \qquad (11.9)$$

i = 1, 2, ..., m

unde:

$$\mathbf{V = \{ V_1, V_2, \ldots, V_m \}} .$$

Ierarhia celor m variante ale mulţimii variantelor V este dată de valorile descrescătoare ale lui $f(V_i)$, i = 1,2,…, m, în (11.10).

$$f(V_s) = \max_{1 \le i \le m} f(V_i)$$

$$V_{i\ optima} = V_s \qquad (11.10)$$

5**. <u>Metoda ONICESCU -</u> Versiunea 2.**

Pentru fiecare criteriu C_j se consideră coeficientul de importanţă p_j , $p_j(0, 1)$ de forma $p_j = 1/2^k$, j = 1, 2, .., n; kN^* .

Se definesc funcţiile loc şi f în (11.11) şi (11.12).

$$\text{loc: } V \times C \rightarrow \{1, 2, \ldots, m\} \qquad (11.11)$$

$$\text{f: } V \rightarrow R^* ,$$

astfel: $loc(V_i , C_j)$ = locul variantei V_i în raport cu criteriul C_j ;

$$f(V_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot 2^{-loc(V_i, C_j)} \quad , \; i = 1, 2, \ldots, m; \qquad (11.12)$$

Ordinea descrescătoare a variantelor este dată de ordonarea descrescătoare a valorilor $f(V_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

6. Metoda TOPSIS

Metoda **TOPSIS** (**T**echnique for **O**rder **P**reference by **S**imilarity to **I**deal **S**olution) are la bază ideea că varianta optimă trebuie să aibă distanţa minimă la soluţia ideală.

Se consideră o problemă de decizie multiatribut, deci se se cunosc:

- mulţimea variantelor :

  $V = \{ V_1 , V_2 , ..., V_m \} ;$

- mulţimea criteriilor de apreciere a variantelor:

  $C = \{ C_1 , C_2 , ..., C_n \} ;$

- matricea consecinţelor A :

  $A = (a_{ij}) ,$

  unde:

  a_{ij} - reprezintă aprecierea variantei V_i prin criteriul C_j , $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$;

- vectorul preferinţelor cardinale ale criteriilor :

  $(p_1 , p_2 , ..., p_n)$, $p_j \in [0 ; 1]$

  unde p_j reprezintă coeficientul de importanţă al criteriului C_j , $j = 1, 2, ..., n$.

Algoritmul TOPSIS

Etapa 1.

Se transformă matricea consecinţelor A în matricea normalizată R prin normalizare vectorială, cu relaţiile (11.16) sau (11.17).

unde: $A = (a_{ij})$

$R = (r_{ij})$

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2}} \qquad (11.16)$$

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}} \qquad (11.17)$$

$i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Etapa 2.

Se construieşte matricea normalizată ponderată **V** ,

$$\mathbf{V = (V_{ij}) ,\ V_{ij} = p_j \,.\, r_{ij}\ ;}\ i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n.$$

Etapa 3.

Se determină soluţia ideală $\mathbf{V^+}$ şi soluţia ideală negativă $\mathbf{V^-}$, definite în relaţiile (11.18) şi (11.19).

$$\mathbf{V^+ = (V^+_1 , V^+_2 , ... , V^+_n)}$$

$$\mathbf{V^- = (V^-_1 , V^-_2 , ... , V^-_n) ,}$$

unde :

$$V_j^+ = \begin{cases} \max\limits_{1\le i\le m} V_{ij} & daca\ criteriul\ C_j\ este\ criteriu\ de\ \max im \\ \min\limits_{1\le i\le m} V_{ij} & daca\ criteriul\ C_j\ este\ criteriu\ de\ \min im \end{cases} \qquad (11.\ 18)$$

$$V_j^- = \begin{cases} \min\limits_{1\le i\le m} V_{ij} & daca\ criteriul\ C_j\ este\ criteriu\ de\ \max im \\ \max\limits_{1\le i\le m} V_{ij} & daca\ criteriul\ C_j\ este\ criteriu\ de\ \min im \end{cases} \qquad (11.\ 19)$$

Etapa 4.

Se calculează distanţele (distanţa euclidiană) între soluţii cu (11.20).

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (V_{ij} - V_j^+)^2} \qquad (11.\ 20)$$

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (V_{ij} - V_j^-)^2}\ \ \mathbf{,}\ i = 1, 2 ..., m.$$

Etapa 5.

Se calculează apropierea relativă a fiecărei variante de soluţia ideală cu (11.21).

$$C_i^+ = \frac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-}\ ,\quad i = 1, 2, ..., m. \qquad (11.\ 21)$$

Etapa 6.

Se face clasificarea descrescătoare pentru C_i^+ , i = 1, 2, ..., m, rezultând clasificarea descrescătoare a variantelor, deci varianta optimă este dată de (11.22).

$$C_k = \max_{1\le i\le m} C_i^+ \qquad (11.\ 22)$$

$$V_{i\ \ optima} = V_k$$

Exemplul nr. 11.1.

O firmă are m = 4 variante de produse noi, care implică investiţii diferite, iar criteriile de apreciere a variantelor sunt: C_1 = suma investită (criteriu de minim), C_2 = rata profitului (criteriu de maxim), C_3 = calitatea (criteriu de maxim). Elementele problemei sunt sintetizate în Tabelul nr. 11. 3.

Tabelul nr. 11. 3.

C_j / V_i	C_1 [lei]	C_2 [%]	C_3 [Note]
V_1	$200 . 10^6$	20	8
V_2	$250 . 10^6$	30	7
V_3	$300 . 10^6$	25	9
V_4	$350 . 10^6$	32	8
Tip criteriu [max/min]	min	max	max

Trebuie determinată varianta decizională optimă astfel:

a) monocriterial;

b) multiciterial, din punctul de vedere al celor n = 3 criterii.

Matricea consecinţeloe este A.

$$A = \begin{pmatrix} 200.10^6 & 20 & 8 \\ 250.10^6 & 30 & 7 \\ 300.10^6 & 25 & 9 \\ 350.10^6 & 32 & 8 \end{pmatrix}$$

a) monociterial

a1) după criteriul C_1 :

$$\min(200 . 10^6 ; 250 . 10^6 ; 300 . 10^6 ; 350 . 10^6) = 200 . 10^6 = a_{11}$$

deci varianta optimă după criteriul C_1 este V_1 , iar clasamentul descrescător al variantelor este: V_1, V_2 , V_3 , V_4 .

a2) după criteriul C_2:

$$\max(20, 30, 25, 32) = 32 = a_{42}$$

deci varianta optimă după criteriul C_2 este V_4 , iar clasamentul descrescător al variantelor este: V_4, V_2 , V_3 , V_1 .

a3) după criteriul C_3:

$$\max(8, 7, 9, 8) = 9 = a_{33}$$

deci varianta optimă după criteriul C_3 este V_3 , iar clasamentul descrescător al variantelor este: V_3, V_1 , V_4 , V_2 sau V_3, V_4 , V_1 , V_2 .

b) multicriterial

Se va rezolva prin câteva metode de decizie multiatribut.

b1) Metoda maximin

Se va normaliza matricea A prin utilizarea relaţiilor (11.3) şi (11.4).

$r_{11} = 1 – 200 . 10^6 / 350 . 10^6 = 3 /7$, $r_{21} = 1 – 250 . 10^6 /350. 10^6 = 2/7$,

$r_{31} = 1 – 300 . 10^6 / 350 = 1/7$, $r_{41} = 1 - 350 . 10^6 /350 . 10^6 = 0$, $r_{12} = 20 / 32 = 5/8$,

$r_{22} = 30/32 = 15/16$, $r_{32} = 25/32$, $r_{42} = 32/32 = 1$, $r_{13} = 8/9$, $r_{23} = 7/9$, $r_{33} = 9/9 = 1$,

$r_{43} = 8/9$.

$$R = \begin{pmatrix} 3/7 & 5/8 & 8/9 \\ 2/7 & 15/16 & 7/9 \\ 1/7 & 25/32 & 1 \\ 0 & 1 & 8/9 \end{pmatrix}$$

max min r_{ij} = **max**{min (3/7, 5/8, 8/9), min(2/7, 15/16, 7/9), min(1/7, 25/32, 1), min(0, 1, 8/9)}=
$1 \le i \le 4 \quad 1 \le j \le 3$

= max(3/7 , 2/7 , 1/7 , 0) = 3/7 = r_{11} , deci varianta V_1 este optimă din punctul de vedere al celor n = 3 criterii de apreciere a variantelor (relativ optimă, conform metodelor prezentate).

b2) Metoda maximax

Se va utiliza matricea normalizată R.

maxmax r_{ij} =max{max(3/7, 5/8, 8/9), max(2/7, 15/16, 7/9), max(1/7, 25/32, 1), max(0, 1, 8/9)}=
$1 \le i \le 4 \quad 1 \le j \le 3$

= max (8/9 , 15/16 , 1, 1) = 1 = r_{33} = r_{42} , deci variantele V_3 şi V_4 sunt optime.

b3) Metoda ponderării simple aditive

Se utilizează matricea normalizată R.

Se aleg coeficienţii de importanţă p_j ai criteriilor C_j , de exemplu: p_1 = ½, p_2 = ¼, p_3 = ¼, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$f(V_1)$ = ½ . 3/7 + ¼ . 5/8 + ¼ . 8/9 ≈ 0.214 + 0.156 + 0.222 ≈ 0.592

$f(V_2)$ = ½ . 2/7 + ¼ . 15/16 + ¼ . 7/9 ≈ 0.142 + 0.234 + 0.194 ≈ 0.570

$f(V_3)$ = ½ . 1/7 + ¼ . 25/32 + ¼ . 1 ≈ 0.072 + 0.195 + 0.250 ≈0.517

$f(V_4)$ = ½ . 0 + ¼ . 1 + ¼ . 8/9 ≈ 0.250 + 0.222 ≈ 0.472

max {$f(V_i)$, i = 1, 4} = 0.592

Varianta optimă este V_1.

Clasamentul variantelor : V_1 , V_2 , V_3 , V_4 .

Pentru alte valori ale coeficienţilor de importanţă p_j ai criteriilor C_j se obţine alt clasament şi altă variantă optimă.

b4) Metoda Onicescu, versiunea 1.

Se determină matricile B şi C.

$$B = \begin{pmatrix} V_1 & V_4 & V_3 \\ V_2 & V_2 & V_1, V_4 \\ V_3 & V_3 & V_2 \\ V_4 & V_1 & - \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(V_1) = 1/2^1 + 1/2^2 + 0/2^3 + 1/2^4 = 13/16$

$f(V_2) = 0/2^1 + 2/2^2 + 1/2^3 + 0/2^4 = 10/16$

$f(V_3) = 1/2^1 + 0/2^2 + 2/2^3 + 0/2^4 = 12/16$

$f(V_4) = 1/2^1 + 1/2^2 + 0/2^3 + 1/2^4 = 13/16$

max {$f(V_i)$, i = 1, 4} = 13/16 = $f(V_1)$ = $f(V_4)$, deci variantele V_1 , V_4 sunt optime din punctul de vedere al celor n = 3 criterii de apreciere a variantelor (relativ optimă, conform metodelor prezentate).

b5). Metoda Onicescu, versiunea 2.

Coeficienţii de importanţă sunt puteri negative ale lui doi, de exemplu:

$p_1 = 1 / 2^1$, $p_2 = 1 / 2^2$, $p_3 = 1 /2^2$,

$loc(V_1, C_1) = 1$, $loc(V_1, C_2) = 4$, $loc(V_1, C_3) = 2$,

$loc(V_2, C_1) = 2$, $loc(V_2, C_2) = 2$, $loc(V_2, C_3) = 3$,

$loc(V_3, C_1) = 3$, $loc(V_3, C_2) = 3$, $loc(V_3, C_3) = 1$,

$loc(V_4, C_1) = 4$, $loc(V_4, C_2) = 1$, $loc(V_4, C_3) = 2$.

$f(V_1) = 1 /2^1 . 2^{-1} + 1 /2^2 . 2^{-4} + 1 /2^2 . 2^{-2} = 21 /64$

$f(V_2) = 1 / 2^1 . 2^{-2} + 1 /2^2 . 2^{-2} + 1 /2^2 . 2^{-3} = 14/64$

$f(V_3) = 1 / 2^1 . 2^{-3} + 1 / 2^2 . 2^{-3} + 1 /2^2 . 2^{-1} = 14/64$

$f(V_4) = 1 / 2^1 . 2^{-4} + 1 / 2^2 . 2^{-1} + 1 / 2^2 . 2^{-2} = 14/64$

$\max f(V_I) = 21 /64 = f(V_1)$, deci varianta V_1 este optimă.

Se observă că prin metode diferite se obţin variante optime diferite, iar acestea sunt V_1, V_3, V_4 , deci varianta V_2 se poate elimina din competiţie, iar pentru cele trei rămase se poate aplica alt algoritm de decizie multiobiectiv (metoda combinată). Există un anumit grad de relativitate şi subiectivism în alegerea variantei optime (relativ optime) din punctul de vedere al celor n criterii de apreciere a variantelor.

Metodele prezentate sunt programabile pe calculator.

Pentru rezolvarea problemelor de decizii multiatribut pe calculator se pot folosi următoarele programe de firmă: ELECTRE III, PROMETHEE II, SMRT (Simple Multiattribute Rating Technique), dacă firma le cumpără.

Aplicaţii practice se pot realiza în :

- proiectarea optimă a amplasării unui sistem de producţie, când există mai multe variante de amplasare, iar criterii pot fi: costul amplasării, recuperarea investiţiei, forţa de muncă disponibilă, apropierea de sursele de materii prime, de piaţa de desfacere a produselor care se vor fabrica, şosea, linie ferată, aspecte ale poluării etc. ;
- proiectarea optimală a unui produs, fiind posibile o mulţime de variante ale produsului dintre care trebuie selectată varianta optimă din punctul de vedere a mai multor criterii: costuri, utilaje disponibile, concurenţa, posibilităţi tehnologice , service etc. ;
- proiectarea politicii de marketing a firmei;
- proiectarea variantei optime de amplasare a utilajelor într-o secţie de producţie;
- proiectarea variantei optime de sistem logistic;
- etc.

11. 3.3. DECIZII DE GRUP

Într-o firmă sunt unele decizii manageriale care se iau de către un singur decident şi altele care se iau de un grup de decidenţi. Decizia de grup (multiparticipant, colectivă) antrenează un grup de decidenţi şi afectează, în general, acţiunile şi interesele unei anumite colectivităţi. Deciziile importante se iau, în general, de un grup de decidenţi (adunarea generală a acţionarilor, consiliul de administraţie al firmei etc.). Raţiunile organizării unui grup de decidenţi care vor adopta decizii de grup într-o firmă ţin de: tradiţia activităţii manageriale din cadrul firmei, structura organizatorică şi de delegare a competenţelor la nivelul firmei, facilitarea comunicării între persoanele implicate în rezolvarea unei situaţii decizionale. Crearea unui grup de lucru nu reprezintă garanţia absolută a adoptării celei mai bune decizii, aceasta depinde de nivelul cunoştinţelor membrilor grupului, de posibilitatea de a acoperi un spectru cât mai larg de probleme care pot apărea, de comportamentul lor flexibil, de experienţa decidenţilor din grup. Pentru ca grupul de decidenţi să poată acţiona într-o manieră raţională care presupune

maximizarea utilităţii obţinute în urma aplicării deciziei de grup, decidenţii trebuie să dispună de toate alternativele decizionale posibile şi de consecinţele aplicării acestora. Gradul în care decidenţii dispun de aceste informaţii depinde de caracterul informaţiilor de a fi informaţii perfecte sau imperfecte, iar decidenţii se pot afla în condiţii de *raţionalitate perfectă* sau *raţionalitate limitată*. În practica firmelor, decidenţii trebuie să ia decizii fără să cunoască toate variantele pentru rezolvarea problemelor şi a consecinţelor lor posibile, deci trebuie să acţioneze în cadrul unei raţionalităţi limitate, iar consecinţa este că nu se va lua decizia optimă, ci o decizie satisfăcătoare sau suboptimală. Prin luarea unor decizii de grup şi funcţie de "arta" de constituire a grupului de decidenţi, se pot minimiza efectele raţionalităţii limitate. Pentru luarea deciziilor de grup trebuie să existe persoane competente, suficient timp pentru analiză şi să se asigure un climat favorabil în timpul dezbaterilor. Oportunitatea adoptării deciziilor de grup trebuie pusă în corelaţie directă cu complexitatea problemei de rezolvat, cu volumul informaţiilor necesare şi cu urgenţa adoptării deciziei. Alegerea celei mai bune metode pentru rezolvarea unei probleme decizionale într-o întreprindere prin decizii individuale (V_1) sau decizii de grup (V_2) poate fi privită ca o problemă de decizie multiatribut, cu cele două variante V_1 şi V_2 prezentate, iar criteriile pot fi: gradul de urgenţă, costul participării la adoptarea deciziilor (nu trebuie să fie mai mare decât avantajele care decurg din aceasta) , echilibrul intern concretizat în securitatea subordonaţilor şi menţinerea autorităţii managerilor, existenţa comunicaţiilor suficient de dezvoltate pentru a permite participarea efectivă la adoptarea deciziilor (sau participarea fizică a decidenţilor la locul unde se va adopta decizia de grup), pregătirea personalului pentru ca participarea sa să fie eficace, reglementări legislative. Soluţionarea eficientă a problemelor decizionale de grup presupune stabilirea decidenţilor, a momentului adoptării deciziei şi a persoanelor care urmează să le înfăptuiască sau să le controleze.

Deciziile de grup în managementul firmei au câteva **avantaje**:

- se utilizează cunoştinţele şi experienţa mai multor specialişti;
- se realizează o mai bună informare asupra firmei;
- apar idei noi prin confruntarea diferitelor concepţii;
- acceptarea deciziei este mai mare atunci când oamenii participă la luarea ei;
- oamenii cunosc mai bine deciziile şi raţionamentele care au stat la baza adoptării lor.

Dezavantaje ale deciziilor de grup sunt: responsabilitatea deciziilor este mai diluată, consumul de timp este mai mare decât în cazul deciziilor individuale, deci sunt mai costisitoare, riscul apariţiei unui sugrup al grupului de decidenţi care să exercite o anumită presiune.

La nivelul unui grup de decizie, cerinţele de raţionalitate sunt mai complexe şi în acest sens J. K. Arrow a definit un sistem de cinci condiţii (ipoteze, axiome).

Condiţia 1. Universalitatea.

Metoda de decizie de grup trebuie să fie aplicabilă mulţimii tuturor variantelor posibile.

Condiţia 2. Izotonia.

Dacă o anumită variantă urcă pe scara preferinţelor fiecărui individ, atunci ea trebuie să urce pe scara preferinţelor grupului.

Condiţia 3. Independenţa.

Dacă decizia se referă la n alternative posibile, clasamentul făcut de un grup nu trebuie modificat prin luarea în considerare a unei noi variante.

Condiţia 4. Suveranitatea.

Regula după care se extrage decizia de grup nu trebuie să fie independentă de opiniile individuale, ci trebuie să depindă direct de acesta.

Condiţia 5.

Decizia de grup nu trebuie să fie identică cu opinia unui anumit membru al grupului, fără a ţine seama de opiniile celorlalţi. Deci, alegerea globală nu este dictatorială.

Se observă că axioma 4 elimină posibilitatea existenţei unui dictator extern, iar axioma 5 elimină posibilitatea existenţei unui dictator intern. Utilizând aceste cinci condiţii, Arrow

demonstrează că nu există nici o metodă de decizie de grup care să satisfacă cele cinci condiţii de raţionalitate enunţate şi care să ducă întotdeauna la o soluţie corectă când numărul decidenţilor este mai mare sau egal cu 2, iar numărul alternativelor este mai mare decât 2. Acest rezultat este numit **paradoxul lui Arrow**. O metodă de ieşire din impas constă în renunţarea la condiţia a 3-a a lui Arrow, rezultând posibilitatea introducerii de utilităţi aditive interpersonale. O altă metodă constă în determinarea unui leader al alternativelor (variantelor) , fără a mai căuta ordonarea completă a tuturor alternativelor.

Diferenţa între decizia luată de un singur decident şi decizia luată de mai mulţi decidenţi cuprinde aspectele:

- valoarea atribuită de fiecare decident fiecărei variante variază de la decident la decident;
- informaţia cu ajutorul căreia fiecare decident ia decizia, poate diferi de la decident la decident;
- există mai multe criterii pe baza cărora decidenţii apreciază variantele.

Problema deciziilor multicriteriale de grup are structura:

- mulţime de h decidenţi: $D = \{ D_1 , D_2 , ..., D_h \}$;
- o mulţime de m variante: $V = \{ V_1 , V_2 , ..., V_m \}$;
- o mulţime de n criterii : $C = \{ C_1 , C_2 , ..., C_n \}$;
- fiecare variantă V_i este apreciată de fiecare decident D_k în funcţie de criteriul C_j prin valorile a_{ijk} ,

$i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., h;$

- Matricea consecinţelor $A = (a_{ijk})$, $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., h;$
- fiecărui criteriu din C, i se dă un coeficient de importanţă, prin mulţimea:

$$P = \{ p_1 , p_2 ,..., p_n \}$$

care pot fi numere reale sau din intervalul [0 , 1] , $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., h;$

Trebuie detrminată varianta cea mai bună în funcţie de toţi decidenţii şi toate criteriile. Rezolvarea problemei de decizii multicriteriale de grup se face prin adaptarea metodelor multiatribut cu un singur decident.

Rezolvarea problemei de **decizii multicriteriale** de **grup** prin **minimizarea distanţei Hamming**

O posibilitate de rezolvare a problemei deciziilor multiatribut de grup constă în minimizarea distanţei Hamming de la fiecare variantă $\mathbf{V_i}$ la o variantă ideală $\mathbf{V_{ideal}}$ care are utilitatea 1 după fiecare criteriu, cu relaţiile (12), (13).

Se va considera utilitatea von Neumann – Morgestern.

Matricea consecinţelor A se transformă în matricea utilitate U prin interpolare liniară.

$$\mathbf{A = (a_{ijk})} \qquad \mathbf{(6)}$$

$$\mathbf{i = 1,2, ..., m;\ j = 1,2, ..., n;\ k = 1,2, ..., h\ ;}$$

$$\mathbf{U = (u_{ijk})} \qquad \mathbf{(7)}$$

$$\mathbf{i = 1,2, ..., m;\ j = 1,2, ..., n;\ k = 1,2, ..., h;}$$

Se determină utilitatea u_{ijk} a variantei V_i, după criteriul C_j pentru decidentul D_k prin relaţia liniară (8).

$$\mathbf{u_{ijk} = U(\ a_{ijk}\ ) = P\ .\ a_{ijk} + Q} \qquad \mathbf{(8)}$$

P şi Q se determină prin interpolare liniară, ştiind că pentru decidentul D_k şi după criteriul C_j utilitatea maximă este egală cu 1 pentru cea mai avantajoasă variantă, respectiv utilitatea minimă este egală cu 0 pentru cea mai dezavantajoasă variantă, k = 1,2, ..., h;.
j = 1,2, ..., n .
Se notează:

$$\mathbf{a_{ijkmax} = \max_{1 \le i \le m} a_{ijk}} \qquad \mathbf{(9)}$$

$$\mathbf{a_{ijkmin} = \min_{1 \le i \le m} a_{ijk}}$$

Sunt două situaţii posibile.
1. Dacă criteriul C_j se optimizează prin maxim, atunci rezultă (10).

$$\mathbf{u_{ijk} = \frac{a_{ijk} - a_{ijkmin}}{a_{ijkmax} - a_{ijkmin}}} \qquad \mathbf{(10)}$$

2. Dacă criteriul C_j se optimizează prin minim, atunci rezultă relaţia (11).

$$\mathbf{u_{ijk} = \frac{a_{ijk} - a_{ijkmax}}{a_{ijkmin} - a_{ijkmax}}} \qquad \mathbf{(11)}$$

$$\mathbf{d(V_i , V_{ideal}) = f(V_i) , \ i = 1,2,\ldots, m} \qquad \mathbf{(12)}$$

$$f(V_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{h} \left| 1 - u_{ijk} \right| \quad , \qquad \mathbf{(13)}$$

Se calculează cu relaţia (13) valorile din relaţia (14):

$$\mathbf{f(V_i), \ i = 1,2,\ldots, m;} \qquad \mathbf{(14)}$$

Varianta optimă se determină cu relaţiile (15).

$$\mathbf{f(V_s)} = \min_{1 \le i \le m} f(V_i) \qquad \mathbf{(15)}$$

$$\mathbf{V_{optima} = V_s}$$

Exemplul nr. 11.2.

Problemă de decizii multiatribut de grup.

Pentru lansarea unui produs pe piaţă sunt m = 4 variante decizionale V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , n = 3 criterii de apreciere a variantelor C_1 , C_2 , C_3 , sunt criterii de maxim (s-au dat note) şi h = 3 decidenţi (egali) D_1, D_2 , D_3 .

Matricea consecinţelor este $A = (a_{ijk})$, i = 1,4 ; j = 1,3; k = 1,3;

a_{ijk} - reprezintă aprecierea variantei V_i prin criteriul C_j de către decidentul D_k , i = 1,4 ; j = 1,3; k =1, 3;

Pentru k = 1 matricea consecinţelor A este dată de matricea bidimensională A_1 , pentru k = 2 de matricea bidimensională A_2 şi pentru k = 3 de matricea bidimensională A_3.

$$A_1 = (b_{ij}) = (a_{ij1}), \quad A_2 = (c_{ij}) = (a_{ij2}) , \ A_3 = (d_{ij}) = (a_{ij3}) \ i = 1,4 ; \ j = 1,3;$$

Matricea A_k este a decidentului D_k , k = 1, 2, 3.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 7 \\ 3 & 9 & 5 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 10 \\ 1 & 9 & 6 \\ 9 & 8 & 5 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 7 & 2 & 9 \\ 8 & 1 & 8 \\ 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Trebuie determinată varianta optimă a problemei de decizie multiatribut de grup, deci din punctul de vedere al celor h = 3 decidenţi şi n = 3 criterii de apreciere a variantelor. Se va rezolva prin două metode.

a) *Rezolvare prin minimizarea distanţei Hamming*

Matricea consecinţelor $A = (a_{ijk})$ se transformă în matricea utilitate $U = (u_{ijk})$, i = 1,4 ; j = 1,3; k = 1,3.

Pentru k = 1 matricea utilitate U este dată de matricea bidimensională U^1, pentru k = 2 de matricea bidimensională U^2 şi pentru k = 3 de matricea bidimensională U^3 ; pentru criteriile C_1 , C_2 şi C_3 care sunt de maxim , i = 1,4 ; j = 1, 3; se utilizează relaţiile (10), deci:

$$u_{ij1} = \frac{a_{ij1} - a_{ij1\min}}{a_{ij1\max} - a_{ij1\min}}$$

$$u_{ij2} = \frac{a_{ij2} - a_{ij2\min}}{a_{ij2\max} - a_{ij2\min}}$$

$$u_{ij3} = \frac{a_{ij3} - a_{ij3\min}}{a_{ij3\max} - a_{ij3\min}}$$

, i = 1,4 ; j = 3. Se calculează coloanele matricilor U^1, U^2 şi U^3 .

$U^1 = (t_{ij}) = (u_{ij1})$, $U^2 = (v_{ij}) = (u_{ij2})$, $U^3 = (w_{ij}) = (u_{ij3})$, i = 1,4 ; j = 3.

Se calculează pe coloane pentru fiecare decident.

De exemplu,

$$t_{11} = u_{111} = \frac{a_{111} - a_{i11\min}}{a_{i11\max} - a_{i11\min}} = \frac{10-3}{10-3} = 1$$

$$t_{21} = u_{211} = \frac{a_{211} - a_{i11\min}}{a_{i11\max} - a_{i11\min}} = \frac{5-3}{10-3} = \frac{2}{7}$$

$$U^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2/7 & 5/7 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/7 & 2/7 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad U^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 2/3 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}, \quad U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(17)}$$

$$f(V_i) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left|1 - u_{ijk}\right| \quad , \ i = 1, 4;$$

$f(V_1) = (|1-1| + |1-0| + |1-1|) + (|1-1/3| + |1-0| + |1-1|) + (|1-0| + |1-2/3| + |1-1|) = 4$ $f(V_2) =$
$(|1-2/7| + |1-5/7| + |1-2/3|) + (|1-0| + |1-1| + |1-1/5|) + (|1-1/2| + |1-1/3| + |1-4/5|) = = 4.5$

$f(V_3) = (|1-0| + |1-1| + |1-0|) + (|1-2/3| + |1-1/2| + |1-0|) + (|1-3/4| + |1-0| + |1-3/5|) =$
$=5.68$

$f(V_4) = (|1-5/7| + |1-2/7| + |1-1/3|) + (|1-1| + |1-0| + |1-3/5|) + (|1-1| + |1-1| + |1-0|) =$
$=4.04$

$\min \{f(V_i) , i = 1, 4\} = \min \{4; 4.5 ; 5.68 ; 4.04\} = 4 = f(V_1)$

Varianta optimă este V_1 .

b) Rezolvare prin *metoda maximizării utilităţii totale*

Matricea consecinţelor $A = (a_{ijk})$ se transformă în matricea utilitate $U = (u_{ijk})$, i = 1,4 ; j = 1,3; k = 1,3; fiind dată de matricile U^1 , U^2 , U^3 din relaţia (17).

Se calculează:

$$f(V_i) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_{ijk} \quad , i = 1, 4;$$

$$f(V_s) = \max \{ f(V_i) , i = 1, 4\}$$

$$V_{optima} = V_s$$

Deci:

$$f(V_1) = (1 + 0 + 1) + (1/3 + 0 + 1) + (0 + 2/3 +1) = 5$$

$$f(V_2) = (2/7 + 5/7 + 2/3) + (0 + 1 + 1/5) + (1/2 + 1/3 + 4/5) = 4.5$$

$$f(V_3) = (0 + 1 + 0) + (3/4 + 0 + 3/5) + (2/3 + ½ + 0) = 3.51$$

$$f(V_4) = (5/7 + 2/7 + 1/3) + (1 + 0 + 3/5) + (1 + 1 + 0) = 4.7$$

$$\max \{f(V_i) , i = 1, 4\} = \max \{5; 4.5 ; 3.51 ; 4.7\} = 5 = f(V_1)$$

$$V_{optima} = V_1$$

Varianta optimă este V_1 .

11. 4. DECIZII ÎN CONDIŢII DE RISC

11. 4.1. TEORIA UTILITĂŢII ÎN PROCESUL DECIZIONAL

Dacă două rezultate ale unui experiment aleator, realizabile cu anumite probabilităţi, furnizează cantităţi de informaţie egale, se pune întrebarea dacă sunt la fel de importante sau de utile, iar răspunsul este dat de posibilitatea de măsurare a utilităţii informaţiei. Problema se pune la fel dacă sunt n rezultate posibile ale unui experiment, iar cuantificarea se poate realiza utilizând conceptul de utilitate. Utilitatea este o unitate de măsură care realizează numitorul comun al consecinţelor multidimensionale în optimizarea deciziilor.

Noţiunea de utilitate se utilizează în teoria jocurilor strategice şi în optimizarea deciziilor.

John von Neumann şi Oskar Morgestern au formulat un sistem de axiome referitor la utilitate. Utilitatea a fost concepută ca o masură a preferinţei faţă de un rezultat sau altul al unui experiment oarecare, sau faţă de un experiment.

Se consideră un câmp de probabilitate finit { Ω, K, P } care poate descrie un experiment aleator cu un număr finit de rezultate. Pe K se defineşte o relaţie de preferinţă, notată f, astfel:
$A_1 \; A_2$ care se citeşte A_1 este preferat lui A_2 .

Dacă $A_1 \; A_2$ şi $A_2 \; A_1$, atunci se scrie $A_1 \; A_2$ şi se citeşte A_1 şi A_2 sunt egal preferabile sau egal nepreferabile (indiferente).

Se numeşte **utilitate** (funcţie utilitate) în sensul axiomelor von Neumann-Morgestern orice funcţie

$$u : K \; R$$

care are proprietăţile:

* $A \; B$ dacă şi numai dacă $u(A) > u(B)$;

* $u(p, A ; 1 - p , B]) = p \cdot u(A) + (1 - p) \cdot u(B)$ (11. 23)

O *proprietate* a utilităţii este următoarea:
dacă **u** este o utilitate, atunci

$$\mathbf{u_1 = a \cdot u + b} \; , \qquad (11. 25)$$

a > 0, b > 0 , este de asemenea o utilitate. (criteriile trebuie să fie independente)

În practică utilităţile se determină pornind de la două utilităţi cunoscute, apoi celelalte se determină prin interpolare. Se atribuie valoarea utilităţii u = 1 variantei optime şi valoarea u = 0 variantei pesime (nonoptime, cea mai slabă) pentru acelaşi criteriu C_j , eliminându-se astfel inconsecvenţa metodei utilităţii datorate proprietăţii de aditivitate, care a fost criticată de unii autori.

Utilitatea este într-un anumit grad subiectivă, deoarece preferinţele variază de la un individ la altul şi chiar pentru un acelaşi individ pot fi variaţii de la un moment la altul.

11. 4. 2. DECIZII ÎN CONDIŢII DE RISC

11. 4. 2. DECIZII ÎN CONDIŢII DE RISC

Deciziile în condiţii de risc pot fi monocriteriale şi multicriteriale (multiatrbut).

Se vor prezenta deciziile în condiţii de risc multicriteriale (multiatrbut).

Deciziile în condiţii de risc multicriteriale (multiatrbut)pentru un proces decizional au structura :

- sunt mai multe stări ale naturii (de condiţii obiective): $N_1, N_2, \ldots, N_r$ şi se cunosc probabilităţile de realizare a fiecăreia: $p_1, p_2, \ldots, p_r$:

$$\sum_{k=1}^{r} \mathbf{p_k = 1} \quad , \quad r \in N,\ r \geq 2,\ p_k \in [0,1],\ k = 1, 2, ..., r;$$

- mulţimea variantelor decizionale: $V = \{ V_1, V_2, \ldots, V_m \};\ m \in N,\ m \geq 2;$

- mulţimea criteriilor de evaluare a variantelor din mulţimea V: $C = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \};\ n \in N,\ n \geq 2;$

- matricea consecinţelor este A,

$$\mathbf{A = (a_{ijk})},\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r;$$

unde:

a_{ijk} - reprezintă evaluarea variantei V_i prin criteriul C_j în starea naturii N_k care are probabilitatea de realizare p_k:

- trebuie determinată varianta optimă din punctul de vedere al celor n criterii de apreciere a variantelor.

A) <u>Determinarea utilităţii prin interpolare liniară</u>

Se notează cu $\mathbf{U = (u_{ijk})}$ matricea utilităţilor.

Se determină utilitatea u_{ijk} prin interpolare liniară, deci prin relaţia liniară:

$$\mathbf{u_{ijk} = U(\ a_{ijk}\ ) = A\ .\ a_{ijk} + B}\ , \qquad (11.\ 45)$$

A şi B se determină prin interpolare liniară, ştiind utilitatea maximă egală cu 1 şi utilitatea minimă egală cu 0 .

Se notează:

$$a_{ijkmax} = \max_{1 \le i \le m} a_{ijk} \qquad (11.\ 46)$$

$$a_{ijkmin} = \min_{1 \le i \le m} a_{ijk}$$

1. dacă *criteriul C_j se optimizează prin maxim*, atunci:

$$\mathbf{A.a_{ijkmax} + B = 1}$$

$$\mathbf{A\ .a_{ijkmin} + B = 0} \qquad (11.\ 47)$$

iar A şi B se determină rezolvând sistemul din relaţiile (11. 47).

$$A = \frac{1}{a_{ijk\max} - a_{ijk\min}}$$

$$B = \frac{-a_{ijk}}{a_{ijk\max} - a_{ijk\min}} \qquad (11.\ 48)$$

rezultă

$$u_{ijk} = \frac{a_{ijk} - a_{ijk\min}}{a_{ijk\max} - a_{ijk\min}} \qquad (11.\ 49)$$

2. dacă criteriul C_j se *optimizează prin minim*, atunci :

$$\mathbf{A\ .\ a_{ijkmin} + B = 1}$$

$$\mathbf{A\ .a_{ijkmax} + B = 0} \qquad (11.\ 50)$$

iar A şi B se obţin din sistemul de ecuaţii (11. 50).

$$A = \frac{1}{a_{ijk\min} - a_{ijk\max}} \qquad (11.51)$$

$$B = \frac{-a_{ijk\max}}{a_{ijk\min} - a_{ijk\max}}$$

se obţine

$$u_{ijk} = \frac{a_{ijk} - a_{ijk\max}}{a_{ijk\min} - a_{ijk\max}} \qquad (11.52)$$

Rezultă că la modul general, utilitatea $\mathbf{u_{ijk}}$ se calculează, indiferent dacă criteriul C_j este de maxim sau de minim, cu relaţia (11. 53).

$$u_{ijk} = \frac{a_{ijk} - a_{ijkpesim}}{a_{ijkoptim} - a_{ijkpesim}} \qquad (11.53)$$

unde:

$a_{ijkoptim} = \underset{1 \le i \le m}{\text{optim}}\, a_{ijk}$, optim { max, min };

$a_{ijkpesim} = \underset{1 \le i \le m}{\text{pesim}}\, a_{ijk}$, pesim = non optim.

B) <u>Determinarea utilităţii prin interpolare polinomială</u>

Interpolarea polinomială este o metodă mai precisă decât interpolarea liniară.

Dacă se dau (se cunosc) n + 1 puncte în care valorile unei funcţii f(x) sunt cunoscute,

$$f : [\, a , b \,] \to R \quad , a, b \in R,$$
$$f(x_i) = y_i \, , i = 1, 2, ..., n;$$

se pune problema determinării unui polinom F(x) de grad n care să treacă prin cele n + 1 puncte şi coincide cu f în aceste puncte, iar acest polinom se numeşte polinom de interpolare.

Deci:

$$F(x_i) = y_i = f(x_i) \, , i = 1, 2, ..., n.$$

Se va utiliza polinomul de interpolare Lagrange din relaţia (11. 54).

, $x \in [\, a, b \,]$, $a, b \in R$. (11. 54)

Pentru starea naturii N_k şi criteriul C_j , cunoscând utilităţile u_{ijk} ,

i = 1, 2, ..., p, p < m, polinomul de interpolare al lui Lagrange este (11. 55).

, pentru orice u[a, b], (11. 55)

$a = \underset{1 \le i \le p}{\min}\, u_{ijk}$;

$b = \underset{1 \le i \le p}{\max}\, u_{ijk}$.

Prin utilizarea polinomului lui Lagrange se poate determina utilitatea oricărei variante V_i , i = 1, 2, ..., m, cunoscând utilitatea a p variante, p N^* .

C) <u>Determinarea utilităţii sinteză</u>

Se calculează utilitatea sinteză a variantei V_i în starea naturii N_k , U_{ik} , obţinându-se matricea utilităţilor totale (sinteză) U_1 :

$$\mathbf{U_{ik}} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{u_{ijk}} \quad , i = 1, 2, \ldots , m; k = 1, 2, \ldots , r; \qquad (11.56)$$

$$\mathbf{U_1 = (U_{ik})} , i = 1, 2, \ldots , m; \; k = 1, 2, \ldots , r.$$

D) Detereminarea deciziei optime în condiţii de risc

Pentru fiecare stare de condiţii se estimează utilităţile (prin interpolare) , determinându-se utilităţile consecinţelor date de matricea U şi utilitatea sinteză a stării naturii respective, dată de matricea U_1.

$$\mathbf{A = (a_{ijk})} \;,$$

$$\mathbf{U = (u_{ijk})} \;,$$

$$\mathbf{U_1 = (U_{ik})} \;,$$

$$\mathbf{u_{ijk} = f(a_{ijk})} \;, i = 1, 2, \ldots , m; \; j = 1, 2, \ldots , n; \; k = 1, 2,..., r;$$

$$\mathbf{U_{ik}} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{u_{ijk}} \qquad (11.57)$$

unde: U_{ik} - reprezintă utilitatea sinteză a variantei V_i în starea de condiţii obiective N_k.

Varianta optimă se obţine pe baza relaţiilor (11.58).

$$\mathbf{U_{i0} = \max_{1 \le i \le m} \sum_{k=1}^{r} U_{ik} \cdot p_k} \qquad (11.58)$$

$$\mathbf{V_{ioptima} = V_{i0}}$$

O altă metodă de rezolvare a problemei deciziilor în condiţii de risc este *metoda arborelui de decizie*, care se bazează pe reprezentarea grafică a problemei printr-un arbore de decizie, fiecare variantă şi stare a naturii se reprezintă printr-o ramură a arborelui de decizie.

Exemplul nr. 11.3.

Problemă de decizii în condiţii de risc.

Sunt două stări ale naturii, N_1 şi N_2 , realizabile cu probabilităţile $p_1 = 0.9$ şi $p_2 = 0.1$

Pentru lansarea unui produs pe piaţă sunt $m = 4$ variante decizionale V_1 , V_2 , V_3 , V_4 şi $n = 3$ criterii de apreciere a variantelor C_1 , C_2 de maxim şi C_3 de minim.

Matricea consecinţelor este $A = (a_{ijk})$, $i = 1,4$; $j = 1,3$; $k = 1,2$;

a_{ijk} reprezintă aprecierea variantei V_i prin criteriul C_j în starea naturii N_k , $i = 1,4$; $j = 1,3$; $k = 1,2$;

Pentru $k = 1$ matricea consecinţelor A este dată de matricea bidimensională A_1 şi pentru $k = 2$ de matricea bidimensională A_2 .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 90 & 1 \\ 7 & 80 & 3 \\ 10 & 70 & 4 \\ 9 & 100 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 70 & 2 \\ 8 & 60 & 4 \\ 7 & 50 & 5 \\ 10 & 80 & 3 \end{pmatrix}$$

Matricea consecinţelor $A = (a_{ijk})$ se transformă în matricea utilitate $U = (u_{ijk})$, $i = 1,2, 3, 4$;

j = 1, 2, 3; k = 1,2.

Pentru k = 1 matricea utilitate U este dată de matricea bidimensională U_1 şi pentru k = 2 de matricea bidimensională U_2 , i = 1,4 ; pentru criteriile C_1 şi C_2 de maxim j = 1,2; se utilizează relaţiile (11.31), deci:

$$u_{ij1} = \frac{a_{ij1} - a_{ij1\min}}{a_{ij1\max} - a_{ij1\min}}$$

$$u_{ij2} = \frac{a_{ij2} - a_{ij2\min}}{a_{ij2\max} - a_{ij2\min}}$$

Pentru citeriul C_3 de minim se utilizează (11.34), deci:

$$u_{ij1} = \frac{a_{ij1} - a_{ij1\max}}{a_{ij1\min} - a_{ij1axn}}$$

$$u_{ij2} = \frac{a_{ij2} - a_{ij2\max}}{a_{ij2\min} - a_{ij2axn}}$$

, i = 1,4 ; j = 3. Se calculează coloanele matricilor U_1 şi U_2 .

$u_{111} = \frac{8-7}{10-7} = \frac{1}{3}$; $u_{211} = \frac{7-7}{10-7} = \frac{0}{3} = 0$; $u_{311} = \frac{10-7}{10-7} = \frac{3}{3} = 1$; $u_{411} = \frac{9-7}{10-7} = \frac{2}{3}$

$u_{121} = \frac{90-70}{100-70} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$; $u_{221} = \frac{80-70}{100-70} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$; $u_{321} = \frac{70-70}{100-70} = \frac{0}{30} = 0$;

$u_{421} = \frac{100-70}{100-70} = \frac{30}{30} = 1$

$u_{131} = \frac{1-4}{1-4} = 1$; $u_{231} = \frac{3-4}{1-4} = \frac{1}{3}$; $u_{331} = \frac{4-4}{1-4} = 0$; $u_{431} = \frac{2-4}{1-4} = \frac{2}{3}$

$$U^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad U^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Se calculează matricea sinteză U_1 cu relaţia (11.38).

$U_{11} = U_{111} + U_{121} + U_{131} = 1/3 + 2/3 + 1 = 2$

$U_{12} = U_{112} + U_{122} + U_{132} = 2/3 + 2/3 + 1 = 7/3$

$U_{21} = U_{211} + U_{221} + U_{231} = 0 + 1/3 + 1/3 = 2/3$

$U_{22} = U_{212} + U_{222} + U_{232} = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 3/3 = 1$

$U_{31} = U_{311} + U_{321} + U_{331} = 1 + 0 + 0 = 1$

$U_{32} = U_{312} + U_{322} + U_{332} = 0 + 0 + 0 = 0$

$U_{41} = U_{411} + U_{421} + U_{431} = 2/3 + 1 + 2/3 = 7/3$

$U_{42} = U_{412} + U_{422} + U_{432} = 1 + 1 + 2/3 = 8/3$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Se utilizează relaţia (11.40).

Max[(0.9 . 2 + 0.1 . 7/3), (0.9 . 2/3 + 0.1 .1), (0.9 . 1 + 0.1 . 0), (0.9 . 7/3 + 7/3 + 0.1 . 8/3)] = max (2.03 ; 0.7 ; 0.9 ; 2.36) = 2.36

Rezultă varianta V_4 optimă.

Metode matematice de modelare a fluxurilor materiale – C14 - 2018/2019

11. 5. DECIZII ÎN CONDIŢII DE INCERTITUDINE

Condiţiile de incertitudine presupun că nu se cunosc probabilităţile de realizare a stărilor de condiţii obiective, iar valoarea consecinţelor depinde de acţiunea unor factori imprevizibili.

Incertitudinea în procesul decizional este generată de diverse surse, care pot fi grupate, în două categorii principale:

- natura aleatoare a factorilor de mediu;
- aproximarea grosieră a evoluţiei comportamentului fenomenului, ca urmare a omisiunii unor factori importanţi de influenţă, a stabilirii incorecte a dependenţei dintre elementele procesului analizat şi factorii care le determină.

Lipsa informaţiilor necesită adoptarea deciziilor în condiţii de incertitudine şi în acest caz factorii psihologici au un rol important, ceea ce duce la dependenţa deciziei de principiile şi raţionamentele subiective ale decidenţilor. Deşi factorii subiectivi joacă un rol important în adoptarea deciziei în condiţii de incertitudine, totuşi trebuie utilizate metodele consacrate de optimizare a deciziilor pentru ca decizia să fie fundamentată şi raţională.

Deciziile în condiţii de incertitudine pot fi monocriteriale şi multicriteriale (multiatrbut). Se vor prezenta deciziile în condiţii de incertitudine multicriteriale (multiatrbut).

Se consideră un proces decizional în condiţii de incertitudine caracterizat de:

- sunt mai multe stări ale naturii:

  $\mathbf{\{ N_1, N_2, \ldots, N_r \}}$; $r \in N$, $r \geq 2$

- sunt date m variante decizionale:

  $\mathbf{V = \{ V_1, V_2, \ldots, V_m \}}$; $m \in N$, $m \geq 2$;

- sunt n criterii de evaluare a variantelor:

  $\mathbf{C = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}}$; $n \in N$, $n \geq 2$;

- matricea consecinţelor A :

  $\mathbf{A = (a_{ijk})}$, i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . ,r ;

unde: a_{ijk} - reprezintă evaluarea variantei V_i prin criteriul C_j în starea naturii N_k,

i = 1, 2, . . . , m ; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , r .

Matricea consecinţelor A se transformă în matricea utilitate U cu relaţiile (11.31) şi (11.34).

$$\mathbf{U = (u_{ijk})} \text{ , i = 1, 2, . . . , m; j = 1, 2, . . . , n; k = 1, 2, . . . , r;}$$

în care u_{ijk} reprezintă utilitatea variantei V_i evaluată prin criteriul C_j în starea naturii N_k .
Se calculează utilitatea sinteză a variantei V_i în starea naturii N_k , U_{ik} , obţinându-se matricea utilităţilor totale (sinteză) U_1 :

$$\mathbf{U_{ik}} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{u_{ijk}} \text{ , i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, ... , r;}$$

$$\mathbf{U_1 = (U_{ik})} \text{ , i = 1, 2, . . . , m; k = 1, 2, . . . ,r.}$$

Se vor prezenta metode de rezolvare a problemei de decizie în condiţii de incertitudine.

1.<u>Regula prudenţei sau pesimistă(Abraham WALD</u>) :

$$U_{i0\,,\,k0} = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le k \le r} U_{ik} \qquad \textbf{(11. 41)}$$

$$\mathbf{V_{ioptima} = V_{i0}}$$

sau altă variantă, 1', din relaţia (11.42) :

1'. <u>Regula superprudenţei</u>:

$$U_{i0\,,\,k0} = \min_{1 \le i \le m} \min_{1 \le k \le r} U_{ik} \qquad \text{(11. 42)}$$

$$\mathbf{V_{ioptima} = V_{i0}}$$

<u>2.Regula optimistă (Leonid Hurwicz):</u>

$$U_{i0\,,\,k0} = \max_{1 \le i \le m} (p_1 \,.\, \max_{1 \le k \le r} U_{ik} + p_2 \,.\, \min_{1 \le k \le r} U_{ik}) \qquad \textbf{(11. 43)}$$

$$\mathbf{V_{ioptima} = V_{i0}}$$

unde: $p_1+p_2 = 1$, p_1 , $p_2 \in [\,0\,;\,1\,]$, $p_1 > p_2$

p_1 - este probabilitatea optimistă de atingere a utilităţilor sinteză U_{ik} maxime, deci probabilitatea de apariţie a stării de condiţii cele mai favorabile;
p_2 - este probabilitatea pesimistă de atingere a utilităţii sinteză U_{ik} minime, respectiv de apariţie a stării de condiţii cele mai nefavorabile.

Altă variantă, regula superoptimistă, 2', din relaţia (11.44):

2'. <u>Regula superoptimistă</u>:

se iau valorile:

$p_1 = 1$, $p_2 = 0$ în regula optimistă, relaîia (11.43), rezultând:

$$\mathbf{U_{i0\,,\,k0} = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le k \le r} U_{ik}} \qquad \textbf{(11. 44)}$$

$$\mathbf{V_{ioptima} = V_{i0}}$$

<u>3. Regula echilibrului</u> (Bayes – Laplace, metoda speranţei matematice):

3.1. Criteriul lui Laplace.

Stările de condiţii obiective sunt considerate echiprobabile.

$$U_{i0} = \max_{1 \le i \le m} r^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{r} U_{ik} \qquad \textbf{(11. 45)}$$

$$V_{ioptima} = V_{i0}$$

3.2. Criteriul lui Bayes.

Se utilizează probabilităţile apariţiei diferitelor stări ale naturii.

$$U_{i0} = \max_{1 \le i \le m} \sum_{k=1}^{r} U_{ik} \cdot p_k \qquad \textbf{(11. 46)}$$

$$V_{ioptima} = V_{i0}$$

4. <u>Regula regretelor (Leonard Savage):</u>

Decizia se adoptă având la bază diferenţele dintre rezultatul maxim ce s-ar putea obţine prin manifestarea unei anumite stări a naturii şi rezultatele corespunzătoare celorlalte variante de acţiune in cazul manifestării aceleiaşi stări a naturii, iar aceste diferenţe sunt numite de L. Savage regrete.

se determină matricea regretelor R:

$$r_{ik} = \max_{1 \le i \le m} U_{ik} - U_{ik}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1,2,\ldots, r; \qquad \textbf{(11. 47)}$$

$$R = (r_{ik})\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, r;$$

varianta optimă $V_{ioptima}$ este dată de relaţia (11.48) :

$$r_{i0\,,\,k0} = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le k \le r} r_{ik} \qquad \textbf{(11. 48)}$$

$$V_{ioptima} = V_{i0} \quad ,$$

5. <u>Metoda combinată</u>

Rezolvarea problemei de decizie în condiţii de incertitudine prin diverse metode duce la diferite variante optime, în general diferite de la o metodă la alta, deci metodele de decizie sunt incompatibile. Se impune găsirea unei modalităţi de a decide, alta decât aplicarea unei metode din cele tratate în acest paragraf, iar soluţionarea se poate obţine prin aplicarea mai multor metode într-o anumită succesiune de etape, numită metoda combinată.

Etapele metodei combinate sunt:

1. se elimină riscurile inacceptabile prin utilizarea mai multor metode din acest paragraf (metodele 1– 4), înlăturând variantele care duc la riscuri inacceptabile;
2. după ce s-au eliminat variantele inacceptabile, se aplică metoda Bayes-Laplace (speranţei matematice, echilibrului), rezultând varianta optimă, alături de care se reţin următoarele câteva variante din clasamentul descrescător al variantelor;
3. variantelor selecţionate în etapa 2 li se va aplica metoda maxi-max, rezultând în final varianta optimă.

Prin colectarea şi prelucrarea unei cantităţi de informaţii suficient de mare se urmăreşte evitatea adoptării deciziilor în condiţii de incertitudine, urmărindu-se cunoaşterea problemelor în aşa măsură încât să fie posibil să se ia deciziile în condiţii de risc sau certitudine.

Metodele de rezolvare a problemelor de decizii în condiţii de risc şi în condiţii de incertitudine se pot aplica, de exemplu în studiul de marketing pentru un produs nou ce se va lansa pe piaţă sau în studiul de marketing pentru o piaţă nouă. De asemenea, în cadrul funcţiei de cercetare-dezvoltare a unei întreprinderi, dar şi a funcţiei comerciale există probleme de decizii în condiţii de risc şi în condiţii de incertitudine, fiind posibilă aplicarea metodelor prezentate .

Exemplul nr. 11.4.

Problemă de decizii în condiţii de incertitudine. Se reia exemplul nr.11.3 în condiţii de incertitudine.

Sunt două stări ale naturii, N_1 şi N_2 , nu se cunosc probabilităţile de realizare (apariţie) a acestor stări. Pentru lansarea unui produs pe piaţă sunt m = 4 variante decizionale V_1 , V_2 , V_3 , V_4 şi n = 3 criterii de apreciere a variantelor C_1 , C_2 de maxim şi C_3 de minim.

Matricea consecinţelor este $A = (a_{ijk})$, i = 1,4 ; j = 1,3; k = 1,2;

a_{ijk} reprezintă aprecierea variantei V_i prin criteriul C_j în starea naturii N_k , i = 1,4 ; j = 1,3; k =1,2;

Pentru k = 1 matricea consecinţelor A este dată de matricea bidimensională A_1 şi pentru k = 2 de matricea bidimensională A_2 .

$A_1 = (a_{ij1})$, $A_2 = (a_{ij2})$, i = 1,4 ; j = 1,3;

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 90 & 1 \\ 7 & 80 & 3 \\ 10 & 70 & 4 \\ 9 & 100 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 70 & 2 \\ 8 & 60 & 4 \\ 7 & 50 & 5 \\ 10 & 80 & 3 \end{pmatrix}$$

Matricea consecinţelor $A = (a_{ijk})$ se transformă în matricea utilitate $U = (u_{ijk})$, i = 1,4 ; j = 1,3; k = 1,2. Se reiau calculele din exemplul nr. 11.2 pentru calculul utilităţilor. Pentru k = 1 matricea utilitate U este dată de matricea bidimensională U^1 şi pentru k = 2 de matricea bidimensională U^2 .

$U_1 = (u_{ij1})$, $U_2 = (u_{ij2})$, i = 1,4 ; j = 1,3;

Pentru criteriile C_1 şi C_2 de maxim, i = 1,4 ; j = 1,2; se utilizează relaţiile (11.31), deci:

$$u_{ij1} = \frac{a_{ij1} - a_{ij1\min}}{a_{ij1\max} - a_{ij1\min}}$$

$$u_{ij2} = \frac{a_{ij2} - a_{ij2\min}}{a_{ij2\max} - a_{ij2\min}}$$

Pentru citeriul C_3 de minim se utilizează (11.34), deci:

$$u_{ij1} = \frac{a_{ij1} - a_{ij1\max}}{a_{ij1\min} - a_{ij1axn}}$$

$$u_{ij2} = \frac{a_{ij2} - a_{ij2\max}}{a_{ij2\min} - a_{ij2axn}} \quad , \quad i = 1,4 ; j = 3.$$

$U^1 = (t_{ij}) = (u_{ij1})$, $U^2 = (v_{ij}) = (u_{ij2})$, i = 1,4 ; j = 3.

Se calculează coloanele matricilor U^1 şi U^2 .

$$u_{111}=\frac{8-7}{10-7}=\frac{1}{3}\ ;\ u_{211}=\frac{7-7}{10-7}=\frac{0}{3}=0;\ u_{311}=\frac{10-7}{10-7}=\frac{3}{3}=1\ ;\ u_{411}=\frac{9-7}{10-7}=\frac{2}{3}$$

$$u_{121}=\frac{90-70}{100-70}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}\quad ;\quad u_{221}=\frac{80-70}{100-70}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}\quad ;\quad u_{321}=\frac{70-70}{100-70}=\frac{0}{30}=0;$$

$$u_{421}=\frac{100-70}{100-70}=\frac{30}{30}=1$$

$$u_{131}=\frac{1-4}{1-4}=1\ ;\ u_{231}=\frac{3-4}{1-4}=\frac{1}{3}\ ;\ u_{331}=\frac{4-4}{1-4}=0\ ;\ u_{431}=\frac{2-4}{1-4}=\frac{2}{3}$$

$$U^1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix},\qquad U^2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Se calculează matricea sinteză U_s cu relaţia (11.38).

$U_{11} = U_{111} + U_{121} + U_{131} = 1/3 + 2/3 + 1 = 2$

$U_{12} = U_{112} + U_{122} + U_{132} = 2/3 + 2/3 + 1 = 7/3$

$U_{21} = U_{211} + U_{221} + U_{231} = 0 + 1/3 + 1/3 = 2/3$

$U_{22} = U_{212} + U_{222} + U_{232} = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 3/3 = 1$

$U_{31} = U_{311} + U_{321} + U_{331} = 1 + 0 + 0 = 1$

$U_{32} = U_{312} + U_{322} + U_{332} = 0 + 0 + 0 = 0$

$U_{41} = U_{411} + U_{421} + U_{431} = 2/3 + 1 + 2/3 = 7/3$

$U_{42} = U_{412} + U_{422} + U_{432} = 1 + 1 + 2/3 = 8/3$

$$U_s = U_1 = \begin{pmatrix}2 & \frac{7}{3}\\ \frac{2}{3} & 1\\ 1 & 0\\ \frac{7}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

Se va rezolva prin mai multe metode.

1. *Regula prudenţei sau pesimistă* (Abraham WALD)

Se utilizează relaţia (11. 41).

$$U_{i0\,,\,k0} = \max_{1\ i\ 4}\ \min_{1\ k\ 2} U_{ik} = \max\,[\min(2, 7/3), \min(2/3, 1), \min(1, 0), \min(7/3, 8/3)] =$$

$= \max(2, 2/3, 0, 7/3) = 7/3 = U_{41}$

$V_{optima} = V_4$

1'. Regula superprudenţei

Se utilizează relaţia (11. 42).

$$U_{i0,\,k0} = \min_{1\,i4}\ \min_{1k2} U_{ik} = \min [\min (2, 7/3), \min(2/3, 1), \min(1, 0), \min(7/3, 8/3)] =$$

$$= \min(2, 2/3, 0, 7/3) = 0 = U_{32}$$

$$\mathbf{V_{optima} = V_3}$$

2'. *Regula superoptimistă*

In regula optimistă se utilizeaza relaţia (11.44), rezultând:

$$U_{i0\,,\,k0} = \max_{1\,i4}\ \max_{1k2} U_{ik} = \max [\max (2, 7/3), \max(2/3, 1), \max(1, 0), \max(7/3, 8/3)] =$$

$$= \max(7/3\ ,\ 1,\ 1,\ 8/3) = 8/3 = U_{42}$$

$$\mathbf{V_{optima} = V_4}$$

3.Regula echilibrului (Bayes – Laplace, metoda speranţei matematice)

Stările de condiţii obiective sunt considerate echiprobabile, se utilizează relaţia (11.45).

$$\mathbf{U_{i0} = \max_{1\,i4} r^{-1}} \cdot = \max \{(2 + 7/3)/2, (2/3 + 1)/2, (1 + 0)/2, (7/3 + 8/3)/2\} =$$

$$= \max (13/6, 5/6, ½, 15/6) = 15/6 = U_{40}$$

$$V_{optima} = V_4$$

4. *Regula regretelor* (Leonard Savage)

Se utilizează relaţiile (11. 47) şi (11. 48).

se determină matricea regretelor R cu (11. 47).

$$\mathbf{r_{ik} = \max_{1\,i4} U_{ik} - U_{ik}} \quad , i = 1, 4; k = 1,2;$$

Se calculează coloana 1, apoi coloana 2.

$$r_{11} = \max_{1\,i4} U_{i1} - U_{11} = \max(2, 2/3, 1, 7/3) – 2 = 7/3 – 2 = 1/3$$

$$r_{21} = \max_{1\,i4} U_{i1} - U_{21} = \max(2, 2/3, 1, 7/3) – 2/3 = 7/3 – 2/3 = 5/3$$

$$r_{31} = 7/3 – 1 = 4/3$$

$$r_{41} = 7/3 – 7/3 = 0$$

$$r_{12} = \max_{1\,i4} U_{i2} - U_{12} = \max(7/3, 1, 0, 8/3) – 7/3 = 8/3 – 7/3 = 1/3$$

$$r_{22} = 8/3 – 1 = 5/3$$

$$r_{32} = 8/3 – 0 = 8/3$$

$$r_{42} = 8/3 – 8/3 = 0$$

Matricea regretelor R:

$$R = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 5/3 & 5/3 \\ 4/3 & 8/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{r_{i0\,,\,k0} = \min\limits_{1\,i4}\ \max\limits_{1k2}\ r_{ik}}$ = min [max(1/3, 1/3), max(5/3, 5/3), max(4/3, 8/3), max(0, 0)] =

= min (1/3, 5/3, 8/3, 0) = 0 = r_{41} = r_{42}

$\mathbf{V_{optima} = V_4}$

12.1. ELEMENTE DE TEORIA STOCURILOR

Resursele disponibile dintr-o firmă , dar care în prezent nu sunt utilizate, formează o rezervă. Aceste reserve pot fi: bani, materiale, maşini, oameni, iar dacă resursele sunt materiale sau produse finite, rezerva se numeşte stoc. În problemele de stocuri se pune problema minimizării costurilor stocurilor, iar dacă stocurile influenţează cererea de produse ale firmei, obiectivul va fi maximizarea profitului firmei.

Variabilele care pot fi controlate de firmă într-o problemă de stocuri sunt:

a) Cantitatea intrată în stoc, prin cumpărare sau din producţia proprie, deci trebuie răspuns la întrebarea *cât?* Cantitatea intrată în stoc este limitată de capacitatea de depozitare, de transport şi de plată a stocului.
b) Frecvenţa sau momentul aprovizionării, deci trebuie răspuns la întrebarea *când?*
c) Gradul de prelucrare a produselor, iar cu cât bunurile păstrate în stoc sunt într-un stadiu mai avansat de finisare, cu atât mai repede pot fi satisfăcute comenzile clienţilor şi cu atât mai mari vor fi cheltuielile de stocare. Pentru a reduce influenţa factorilor nefavorabili este necesar să existe stocul tampon bine dimensionat.

Principalele tipuri de variabile care apar în problemele de stocuri şi care nu pot fi controlate în totalitate, sunt: cheltuielile de stocare, costurile de penurie, cheltuielile datorate variaţiilor ritmului de producţie, preţul de achiziţie sau cheltuielile directe de producţie, cererea de produse fabricate de firmă, timpul de livrare, cantitatea livrată.

1. *Cheltuielile de stocare* cresc proporţional cu mărimea stocului şi durata de stocare. Componentele sale sunt:
   a) costul capitalului investit în stocuri (capital propriu sau împrumutat). Capitalul investit în stocuri este neproductiv. Costul capitalului investit este dat de mărimea profitului ce s-ar putea obţine dacă acest capital ar fi fost investit în mod productiv sau de dobânda ce trebuie plătită de o bancă unde s-ar fi depus.
   b) Cheltuielile de manipulare a stocurilor, care cuprind costul forţei de muncă şi a energiei necesare pentru deplasarea stocurilor, a cărucioarelor, macaralelor şi a altor utilaje necesare.
   c) Cheltuieli de înmagazinare reprezintă chiria spaţiului de depozitare sau amortizarea în cazul unui spaţiu propriu.
   d) Impozite şi asigurări.
   e) Cheltuieli de depreciere, deteriorare, uzură morală şi fizică, iar acestea se referă la produsele la modă sau deteriorarea fizică, efectivă a produselor stocate.
2. Costurile de penurie sunt cheltuieli suplimentare care apar atunci când un material sau un produs este solicitat, este necesar şi lipseşte din stoc. Aceste cheltuieli apar datorită unor cheltuieli de urgenţă, suplimentare, cresc cheltuielile de transport, de exemplu prin folosirea avionului în loc de transport auto, cheltuieli de organizare a producţiei suplimentare prin organizarea unor schimburi suplimentare sau utilizarea unor utilaje de

rezervă, penalizări datorită faptului că nu se livrează la timp produsele la clienţi sau se pierd comenzi din cauza întârzierilor. Aceste pierderi sunt greu de estimat.

3. Cheltuieli datotate variaţiilor ritmului de producţie, cuprind cheltuieli cu angajarea şi instruirea personalului suplimentar angajat sau cu concedierea unor salariaţi., cheltuieli datorate rebuturilor care pot să crească.
4. Preţul de achiziţie sau cheltuielile directe de producţie depind de cantitatea achiziţionată sau fabricată (pentru producţie în serie mare sau de masă sunt mici).
5. Cererea influenţează costurile deoarece unele cereri pot rămâne nesatisfăcute datorită lipsei stocurilor sau întârzierilor în livrare.
6. Timpul de livrare este timpul între momentul lansării unei comenzi şi momentul primirii mărfurilor comandate. Dacă timpul de livrare este cunoscut şi diferit de zero, iar cererea este cunoscută, comanda trebuie lansată cu un avans de timp egal cu timpul de livrare. Timpul de livrare poate fi cunoscut, determinist sau o variabilă aleatoare, când problema stocurilor se complică.
7. Cantitartea livrată poate fi cunoscută, determinstă sau poate fi variabilă aleatoare când problema stocurilor se complică din nou.

Dacă firma are capitalul disponibil insuficient, se pot reduce cheltuielile pe termen scurt prin micşorarea stocurilor.

O altă problemă de stocuri se referă la cât de mare trebuie să fie capitalul lichid al firmei. Dacă capitalul disponibil este prea mare, deci stoc mare de bani, se pierd veniturile ce s-ar fi putut obţine prin investirea excesului de capital, deci apar cheltuieli de stocare a capitalului lichid . Dacă capitalul disponibil este prea mic sau blocat în stocuri, apar costuri de penurie datorită necesităţii de a împrumuta restul de capital cu o anumită dobândă.

Se pune problema optimizării stocurilor în sensul minimizării costurilor gestiunii acestora. Problemele de stocuri pot fi cu cererea cunoscută, deci deterministe şi cu cererea aleatoare. Se va analiza cazul stocurilor cu cererea cunoscută, se vor prezenta doar câteva formule.

Se utilizează următoarele notaţii:

a – cererea constantă pe unitatea de timp, astfel încât produsele sunt scoase din lot în mod continuu;

c – costuri unitare de cumpărare (fabricare);

h – costul de stocare pe unitatea de produs şi pe unitatea de timp;

k – costul de lansare a unei comenzi, plătit la începutul fiecărei perioade de timp;

u – costul lipsei de stoc pe unitatea de produs şi pe unitatea de timp;

Q – cantitatea cu care se face aprovizionarea (cantitatea produsă) pe o perioadă, această aprovizionare (producere) realizându-se în salturi constante de timp;

S – stocul de produse;

T – perioada de timp între două reîncărcări consecutive ale stocului, reîncărcarea stocului făcându-se de fiecare dată instantaneu;

C – costul total pe o perioadă a aprovizionării (producerii), stocării, lipsei de stoc.

Dacă *nu este permisă lipsa de stoc*, cantitatea cu care trebuie să se facă aprovizionarea (cantitatea fabricată) Q^* într-o perioadă de timp şi intervalul de timp T^* la care trebuie să se facă aprovizionarea (fabricarea) sunt date de relaţiile (12.1) şi (12.2).

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.a.k}{h}} \qquad (12.1)$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2.k}{a.h}} \qquad (12.2)$$

Cheltuielile minime C^* pe o perioadă sunt date de relaţia (12.3).

$$C^* = 2.k + c \cdot \sqrt{\frac{2.a.k}{h}} \qquad (12.3)$$

Dacă *este permisă lipsa de stoc*, cantitatea cu care trebuie să se facă aprovizionarea (cantitatea fabricată) Q^* într-o perioadă de timp, stocul maxim la începutul unei perioade (după aprovizionare, respectiv fabricare) şi intervalul de timp T^* dintre două aprovizionări (produceri) consecutive sunt date de relaţiile (12.4), (12.5) şi (12.6), iar cu aceste valori cheltuielile minime pe o perioadă dată sunt date de relaţia (12.7).

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.a.k}{h}} \cdot \sqrt{\frac{h+u}{u}} \qquad (12.4)$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2.a.k}{h}} \cdot \sqrt{\frac{u}{h+u}} \qquad (12.5)$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2.k}{a.h}} \cdot \sqrt{\frac{h+u}{u}} \qquad (12.6)$$

$$C^* = 2.k + c \cdot \sqrt{\frac{2.a.k}{h}} \cdot \sqrt{\frac{h+u}{u}} \qquad (12.7)$$

Dacă se utilizează metoda " Just in Time", deci " exact la timp" , în aprovizionarea firmei, rezultă un nivel scăzut al stocurilor, aproape zero stocuri.

Exemplul nr. 12.1.

Un produs este fabricat de o firmă şi are cererea de 1000 bucăţi pe lună, iar produsele sunt solicitate uniform. Costul lansării unei comenzi este de 5000 lei , costul producţiei este de 10 lei pe bucată, iar costul păstrării inventarului este de 1 leu pe bucată timp de o lună. Se cere :

a) Dacă se presupune că lipsa de stoc nu este permisă, să se determine la ce intervale să se fabrice produsul şi în ce cantităţi, astfel încât cheltuielile totale să fie minime.
b) Dacă se presupune că lipsa de stoc este permisă, cu uncoeficient de penalizare de 2 lei pe bucată în timp de o lună, să se determine intervalele de fabricaţie, cantităţile ce trebuie produse şi stocul maxim la început de lună, astfel încât cheltuielile totale să fie minime.

a) Este o problemă de stocuri cu cerere deterministă, care nu permite lipsa de stoc.

a = 1000 bucăţi/lună (cererea constantă pe unitatea de timp – adică pe lună) ,
c = 10 lei /bucată, (costuri unitare de cumpărare - fabricare)
k = 5000 lei (k – costul de lansare a unei comenzi, plătit la începutul fiecărei perioade de timp);
h = 1 bucată/lună (h – costul de stocare pe unitatea de produs şi pe unitatea de timp).
Se utilizează relaţiile (12.1) şi (12.2).

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.a.k}{h}} = \sqrt{\frac{2.1000.5000}{1}} \approx 3170 \text{ bucăţi}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{3170}{1000} = 3.17 \text{ luni} \approx 95 \text{ zile}$$

b) Se mai adaugă la datele de la a) u = 2 lei/bucată/lună, (u – costul lipsei de stoc pe unitatea de produs şi pe unitatea de timp) se utilizează relaţiile (12.4), (12.5), (12.6).

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.a.k}{h}} \cdot \sqrt{\frac{h+u}{u}} = 3170 \cdot \sqrt{\frac{1+2}{2}} \approx 3867 \text{ bucăţi}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2.a.k}{h}} \cdot \sqrt{\frac{u}{h+u}} = 3170 \cdot \sqrt{\frac{2}{1+2}} \approx 2590 \text{ bucăţi}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{3170}{1000} \approx 3.9 \text{ luni} \approx 117 \text{ zile}$$

12.2.ELEMENTE DE PROGRAMARE DINAMICĂ

Programarea dinamică este o metodă de rezolvare a unor probleme de optimizare al căror model matematic are caracteristica că este un proces de decizie secvenţial. Termenul "programarea dinamică" a fost introdus în 1940 de către matematicianul american Richard Bellman, care i-a dezvoltat metodele. O problemă ar putea fi rezolvată prin programare dinamică dacă poate fi descompusă în subprobleme asemănătoare de dimensiuni mai mici şi soluţia optimă a problemei depinde de soluţiile optime ale subproblemelor sale. Descompunerea secvenţială a problemei nu trebuie să fie în mod obligatoriu temporală, ci logică. Cu ajutorul unor relaţii de recurenţă şi a unor ecuaţii funcţionale, se analizează în mod secvenţial procesul de construcţie şi obţinere a soluţiei optime a unor astfel de probleme de optimizare, numite procese secvenţiale de decizie. Programarea dinamică nu are algoritmi proprii pentru rezolvarea unor probleme tip, dar rezolvă probleme complexe prin descompunerea acestora în subprobleme de optimizare mai simple şi cu mai puţine variabile.

Descompunerea unei probleme în subprobleme mai simple cu o etapă şi o singură variabilă, are la bază principiul optimalităţii al lui Bellman: *o mulţime optimală a deciziilor are proprietatea că oricare ar fi prima decizie, deciziile următoare trebuie să fie optimale cu privire la rezultatele primei decizii*.

Programarea dinamică este un proces de decizie secvenţial şi se bazează pe principiul de optimalitate al lui Bellman, care se enunţă şi altfel, dar echivalent cu precedentul: o strategie optimă are proprietatea că oricare ar fi starea iniţială şi decizia iniţială, celelalte decizii trebuie să constitue o strategie optimă în raport cu starea care rezultă din prima decizie.

Programarea dinamică are două metode de rezolvare: *progresivă, numită şi analiza prospectivă,* şi *regresivă, numită şi analiză retrospectivă*.

O soluţie progresivă (*prospectivă)* respectă ordinea temporală a procesului, iar prima etapă a programului dinamic corespunde cu prima decizie ce trebuie luată. Pentru o soluţie regresivă (*retrospectivă)*, prima etapă a programului dinamic dă ultima decizie ce trebuie luată în timp.

Exemplul nr.3.28.

O firmă comercială cunoaşte cererea pe o peirioadă de 6 luni . În tabelul nr. 3.50. este dată cererea şi preţul unitar pe fiecare lună.

Tabel nr.3.50.

Luna L_i	1	2	3	4	5	6
Cererea c_i	8	5	3	2	7	4
Preţul unitar p_i	11	18	13	17	20	10

La începutul fiecărei luni firma poate cumpăra de pe piaţă orice cantitate din produsul comercializat la un preţ ce diferă de la o lună la alta conform tabelului nr. 3.50. Firma nu poate să deţină în stoc o cantitate de produs care să depăşească 9 unităţi. Stocul iniţial este de 2 unităţi, iar la sfârşitul perioadei de 6 luni stocul trebuie să fie zero. Trebuie stabilită o politică optimă de aprovizionare cu produsul solicitat astfel încât costul total să fie minim.

La modul general se consideră că sunt n perioade (luni) analizate, s_0 este stocul iniţial şi s este capacitatea maximă de stocare.
Se notează cu c_i , p_i şi X_i cererile, preţurile, respectiv numărul de unităţi de produs ce trebuie aprovizionate (cumpărate) la începutul lunii, i = 1, 2, ..., n. Cererea de produs trebuie satisfăcută, deci la începutul fiecărei luni firma trebuie să posede o cantitate de produs cel puţin egală cu cererea din luna respectivă care începe. Cantitatea de produs pe care firma o deţine la începutul lunii k este egală cu diferenţa dintre toate cantităţile de produs cumpărate până în acel moment şi cantităţile de produs cerute în precedentele k – 1 luni. Cantitatea de produs aflată în firmă nu trebuie să depăşească în nici o lună , în nici un momement, s unităţi, deci se adaugă restricţia (3.105) .
Utilizând aceste notaţii, modelul matematic este (3.103) - (3.107).

$$s_0 + \sum_{j=1}^{k} X_j - \sum_{j=1}^{k-1} c_j \geq c_k \quad , \ k = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{3.103}$$

$$s_0 + \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n-1} c_j = c_n \tag{3.104}$$

$$s_0 + \sum_{j=1}^{k} X_j - \sum_{j=1}^{k-1} c_j \leq s \quad , \quad k = 1, 2, ..., n; \tag{3.105}$$

$$X_i \geq 0, \ i = 1, 2, ..., n; \tag{3.106}$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} p_i . X_i \tag{3.107}$$

min f

Se consideră cazul concret, n = 6 , s = 9 , s_0 = 2, iar la sfârşitul perioadei de 6 luni stocul trebuie să fie zero.
Deci:

$$s_0 + \sum_{j=1}^{k} X_j - \sum_{j=1}^{k-1} c_j \geq c_k \quad , \ k = 1, 2, \ldots, 5; \tag{3.108}$$

$$s_0 + \sum_{j=1}^{6} X_j - \sum_{j=1}^{5} c_j = c_6$$

$$s_0 + \sum_{j=1}^{i} X_j - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \leq 9 \quad , \quad i = 1, 2, ..., 6;$$

Pentru politica (X_1, X_2, ..., X_6) cheltuielile totale de cumpărare sunt:

$$f = \sum_{i=1}^{6} p_i . X_i \tag{3.109}$$

min f
Utilizând datele din tabelul nr. 3.50. , rezultă modelul matematic liniar (3.110) pentru rezolvarea problemei.

$$\begin{aligned}
&6 \leq X_1 \leq 7 \\
&11 \leq X_1 + X_2 \leq 15 \\
&14 \leq X_1 + X_2 + X_3 \leq 20 \\
&16 \leq X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 23 \\
&23 \leq X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 25 \\
&X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 27 \\
&X_i \geq 0, \ i = 1, 2, ..., 6; \\
&f = 11.X_1 + 18.X_2 + 13.X_3 + 17.X_4 + 20.X_5 + 10.X_6 \\
&\min f
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Soluţia optimă obţinută cu programul **Qsb** este:
X_1= 7 , X_2 = 4, X_3 = 9, X_4 = 3, X_5 = 0 , X_6 = 4, min f = 357

Exemplul nr.3.29. Problema rucsacului

Problema rucsacul este aplicabilă în probleme de logistică, determinarea încărcării optime a unor mijloace de transport, dar şi în determinarea investiţiei optime.

O persoană are un rucsac de capacitate maximă G (greutate, volum) pentru a transporta diverse obiecte. În rucsac trebuie puse diverse obiecte din n tipuri disponibile, iar fiecare obiect O_i din cele n obiecte are greutatea g_i şi valoarea v_i , i = 1, 2, ...n. Se cere să se determine ce obiecte trebuie puse în rucsac pentru a le transporta în aşa fel încât câştigul (valoarea) să fie maxim. Se consideră problema continuă (fracţionată) a rucsacului. Fiecare obiect ales poate fi pus parţial sau total în rucsac

Problema rucsacului este numită şi problema hoţului: un hoţ intră în magazin să fure. Ce va fura hoţul ? Lucruri scumpe care intră în rucsacul sau geanta sa.

Pentru rezolvare se notează cu X_i numărul de obiecte O_i , i = 1, 2, ..., n, ce se pun în rucsac.
Modelul matematic general:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i.X_i \le G \qquad (3.113)$$

$X_i \ge 0$, i = 1, 2, ..., n;

$$f = \sum_{i=1}^{n} v_i.X_i$$

max f

Problema rucsacului se poate rezolva prin programare dinamică. Se sortează descrescător cele n obiecte după raportul $\frac{v_i}{g_i}$. Se adaugă în rucsac fracţiuni din obiectul cu cel mai mare raport $\frac{v_i}{g_i}$ până se epuizează stocul şi apoi se adaugă fracţiuni din obiectul cu valoarea următoare a raportului $\frac{v_i}{g_i}$, continuându-se până ce rucsacul ajunge la greutatea G. Problema rucsacului se poate rezolva şi prin algoritmi greedy, dar nu se ajunge întotdeauna la soluţia optimă, uneori se obţine soluţie suboptimală.

Clasificări ale problemei rucsacului

1. După numărul de exemplare ale unui obiect care este pus în rucsac
1. 1. Problema 0-1 a rucsacului
Fiecare obiect poate apare cel mult o dată în rucsac
Model matematic:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i.X_i \le G$$

$X_i \ge 0$, i = 1, 2, ..., n;

$X_i \in \{0,1\}$, i = 1, 2, ..., n;

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i . X_i$$

1. 2. Problema mărginită a rucsacului
Fiecare obiect poate apare de cel mult n_i ori în rucsac , i = 1, 2, ..., n;

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i . X_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i . X_i \le G$$

$X_i \ge 0$, i = 1, 2, ..., n;
$X_i \le n_i$, i = 1, 2, ..., n;

1. 3. Problema nemărginită a rucsacului
Fiecare obiect poate apare de ori câte ori în rucsac

$$\sum_{i=1}^{n} g_i . X_i \le G$$

$X_i \ge 0$, i = 1, 2, ..., n;
$X_i \in N$, i = 1, 2, ..., n;

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i . X_i$$

2. După numărul de rucsaci
2. 1. Un singur rucsac
2. 2. Mai mulţi rucsaci

3. După tipul obiectelor
3. 1. Problema discretă a rucsacului
Fiecare obiect ales trebuie pus în întregime în rucsac

$$\sum_{i=1}^{n} g_i . X_i \le G$$

$X_i \ge 0$, i = 1, 2, ..., n;
$X_i \in N$, i = 1, 2, ..., n;

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i . X_i$$

3. 2. Problema continuă (fracţionată) a rucsacului
Fiecare obiect ales poate fi pus parţial sau total în rucsac

$$\sum_{i=1}^{n} g_i . X_i \le G$$

$X_i \ge 0$, i = 1, 2, ..., n;

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i . X_i$$

Se dau n obiecte O_i , i = 1, 2, ..., n; fiecare având o valoare v_i şi o greutate g_i , i = 1, 2, ..., n, dintre care trebuie puse cât mai multe obiecte într-un rucsac astfel încât valoarea rucsacului să fie maximă. Greutatea maximă suportată de rucsac este G.

$X_i \in \{0,1\}$, i = 1, 2, ..., n;

Sau

$X_i \in [0,1]$, i = 1, 2, ..., n;

Sau

$X_i \in N$, i = 1, 2, ..., n;

Problema rucsacului se poate aplica la determinarea încărcării cu containere a unui vapor, tren sau tir care au o capacitate maximă de încărcare G, astfel încât valoarea încărcării să fie maximă.

Aplicaţie concretă

Se consideră n = 3 tipuri de obiecte conform tabelului nr.3.51, capacitatea rucsacului este G = 10 Kg . Să se determine ce obiecte trebuie puse în rucsac pentru a le transporta în aşa fel încât valoarea (câştigul) să fie maximă.

Tabelul nr.3.51.

i	1	2	3
g_i	5	8	4
v_i	10	19	4
$\frac{v_i}{g_i}$	2	2.375	1

$5.X_1 + 8.X_2 + 4.X_3 \leq 10$

$X_i \geq 0$, i = 1, 2, 3;

$f = 10.X_1 + 19.X_2 + 4.X_3$

max f

$\frac{v_1}{g_1} = \frac{10}{5} = 2$; $\frac{v_2}{g_2} = \frac{19}{8} = 2.375$; $\frac{v_3}{g_3} = \frac{4}{4} = 1$;

Se aleg din obiectul O_2 8 kg şi 2 kg din obiectul O_1 . Valoarea maximă este 23 u.m.

f = 19 + 2 . 10/5 = 23 u.m.

SERII DE TIMP ÎN PREVIZIUNILE DIN FIRME

Cunoaşterea relativă a viitorului reprezintă o modalitate cu care organizaţia (firma) încearcă să se pregătească pentru a înfrunta neprevăzutul. Prevederea este o funcţie a managementului, enunţată de H. Fayol la începutul secolului XX , ea iniţiază procesul de management, stabileşte obiectivele , ce trebuie făcut pentru atingerea lor şi pregăteşte organizarea. Metodele de previziune se bazează pe ipoteza că procesele analizate îşi menţin în viitor caracteristicile esenţiale din trecut.

Intervalul de timp pentru care se face previziunea se numeşte orizont de previziune.

În funcţie de orizontul de previziune, previziunile se clasifică în trei categorii: previziuni pe termen scurt, previziuni pe termen mediu şi previziuni pe termen lung, dar aceste noţiuni sunt relative şi nu se referă în general la intervale de timp fixate, depind de natura procesului pentru care se face previziunea.

Din punct de vedere al complexităţii şi al nivelului de precizie asigurat de metode, există categoriile de metode de previziune:

1. Metode calitative;
2. Metode cantitative, care cuprind:

2.1. Metode simple de extrapolare a tendinţelor trecute: metoda grafică, metoda sporului mediu, metoda mediilor mobile;

2.2. Metode de extrapolare bazate pe serii temporale ;
2.3. Metode de previziune bazate pe analiza regresiei şi corelaţiei;
2.4. Metoda lanţurilor Markov.

Numele de "metode calitative" nu se referă la performanţele acestora, ci la faptul că nu operează cu date cantitative, doar folosesc raţionamentele şi părerile unor experţi pentru a prezice evenimentele viitoare. Metodele calitative cuprind: metoda scenariilor, metoda folosirii opiniei experţilor, metoda Delphi, metoda sondajelor, utilizându-se când nu se dispune de suficiente date pentru o analiză cantitativă a obiectului previziunii. Categoriile de metode 1 şi 2.1 se utilizează în previziuni pe termen scurt, iar 2.2, 2.3 şi 2.4 şi pentru previziuni pe termen mediu şi lung.

Etapele previziunii:

- stabilirea obiectului previziunii;
- stabilirea orizontului şi ariei previziunii;
- stabilirea datelor necesare previziunii, a metodelor de previziune şi realizarea previziunii;
- selectarea variantei care este cea mai probabilă din mulţimea de alternative viitoare;
- reactualizarea periodică pe baza noilor elemente care pot să apară după obţinerea variantelor de previziune.

O succesiune de valori observate în firma (organizaţie) la diferite momente de timp ale unei variabile de interes se numeşte **serie de timp (serie temporală, serie cronologică).** Valorile observate ale variabilei cercetate sunt în general aranjate în ordinea crescătoare a momentelor de observare, adică în ordine cronologică. Se presupune că se dispune de o succesiune de valori observate ale unei variabile Y , de exemplu volumul vânzărilor unei firme, la diferite momente de timp t_1 , t_2 , …, t_n , deci de o serie temporală asociată variabilei Y. În problemele din practică se consideră intervale de timp egale între două observări consecutive ale valorilor variabilei de interes, deci momentele sunt: 1, 2, …, n. Unei serii temporale y_1 , y_2 , …, y_n i se asociază o diagramă reprezentată în plan , fiecare termen al seriei date fiind identificat cu un punct de coordonate (t_i , y_i), i = 1, 2, …, n , unde de fapt t_i = 1, 2, …, n. Pentru a evidenţia evoluţia în timp a valorilor variabilei cercetate Y, punctele de coordonate (t, y_i) , (t+1, y_{i+1}) corespunzătoare la doi termeni consecutivi ai seriei, se unesc printr-un segment de dreaptă, obţinându-se un grafic în forma unei linii frânte, iar acest grafic este numit "cronogramă" asociată seriei temporale date.

Pentru a defini o serie temporală se consideră elementele :

- valorile observate ale unei variabile Y date ;
- intervalele de timp între două înregistrări consecutive, deci pasul înregistrării, care poate fi : un minut, o oră, o zi, o lună, un an etc.
- numărul total de termeni din seria considerată sau intervalul de timp dintre prima şi ultima înregistrare.

Studiul unei serii temporale urmăreşte identificarea componentelor corespunzătoare diferiţilor factori, care determină o alură specifică cronogramei asociate seriei respective.

Se consideră că o serie temporală are patru categorii de componente: trendul (tendinţa), fluctuaţii ciclice, fluctuaţii sezoniere, fluctuaţii neregulate.

Trendul, notat cu T, reflectă aspectul general al evoluţiei seriei temporale, deci se pune în evidenţă tendinţa de creştere sau de descreştere a valorilor variabilei analizate. În reprezentarea grafică a seriei temporale, trendul apare ca o curbă netedă care trece printre punctele diagramei asociate seriei date, iar această curbă poate fi stabilită empiric sau analitic.

Fluctuaţiile (variaţiile) ciclice, notate cu C, sunt oscilaţii periodice în jurul trendului cu o periodicitate relativ mare.

Fluctuaţiile (variaţiile) sezoniere, notate cu S, sunt tot oscilaţii periodice, dar se deosebesc de fluctuaţiile ciclice prin faptul că acestea se repetă la intervale mai scurte de timp.

Factorii care determină fluctuaţiile sezoniere pot fi : succesiunea ciclică a anotimpurilor, a lunilor, a sărbătorilor sau a zilelor.

Fluctuaţiile (variaţiile reziduale, aleatoare) neregulate, notate cu N, sunt variaţii în datele unei serii temporale care apar la intervale scurte de timp, în mod neregulat, fără a respecta o regulă.

Prin analiza unei serii temporale se înţelege determinarea tuturor sau a unora dintre componentele sale cu scopul de a le utiliza pentru previziuni.

Dacă amplitudinea fluctuaţiilor în jurul trendului este cu atât mai mare cu cât trendul are valori mai mari, se spune că succesiunea datelor din seria temporală considerată este de tip multiplicativ şi se notează:

$A = T \cdot C \cdot S \cdot N$,

unde A sau y_i reprezintă valorile observate la un moment dat, care este egală cu produsul componentelor sale. Pentru seriile temporale există de asemenea modele aditive, notate simbolic:

$A = T + C + S + N$

şi modele mixte.

Prin ajustarea unei serii temporale se înţelege înlocuirea valorilor observate ale variabilei studiate cu alte valori, noile valori fiind calculate prin metode euristice sau prin metode analitice. Se obţine astfel o serie de valori calculate ale seriei temporale care înlocuiesc seria empirică. Ajustarea analitică a seriei temporale se face pe baza unor funcţii matematice alese în aşa fel încât să descrie cel mai bine evoluţia fenomenului. În ajustare sunt luaţi în considerare toţi termenii seriei temporale şi metoda cea mai folosită este metoda celor mai mici pătrate. Valorile seriei temporale se notează cu y, iar cele calculate prin ajustare cu Y.

Fiecărei metode de ajustare îi corespunde o metodă de previziune care utilizează informaţiile obţinute prin aplicarea metodei de ajustare folosite.

Principala componentă a unei serii temporale foarte importantă în previziuni este trendul.

Trebuie aleasă o funcţie matematică corespunzătoare curbei empirice şi să i se estimeze parametrii pe baza datelor seriei temporale. Cele mai des utilizate sunt clasele de funcţii: funcţia liniară, polinoame, funcţii exponenţiale, funcţii logistice. Se vor prezenta modelele acestor funcţii.

1. Modelul liniar de trend: $Y = a + b.t$,
a şi b sunt parametri ce trebuie determinaţi.

2. Modelul funcţiei de gradul doi (parabolă) de trend : $Y = a + b.t + c.t^2$,
a, b şi c sunt parametri ce trebuie determinaţi.

3. Modelul polinomial de trend : $Y = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \ldots + a_p \cdot t^p$,
$p \in N$, $p > 2$, iar a_0 , a_1 , a_2 , …, a_p sunt parametri ce trebuie determinaţi.

4. Modelul exponenţial de trend: $Y = a \cdot b^t$
a şi b sunt parametri ce trebuie determinaţi.

5. Modelul exponenţial modificat de trend: $Y = k + a \cdot b^t$,
a, b şi k sunt parametri ce trebuie determinaţi.

6. Modelul funcţiei semilogaritmice de trend: $Y = a + b \cdot \lg t$,
a şi b sunt parametri ce trebuie determinaţi.

7. Modelul funcţiei logistice de trend:

$$Y = \frac{k}{1 + a.b^t} \ ,$$

a, b şi k sunt parametri ce trebuie determinaţi, $b \in (0, 1)$.

Se pot utiliza şi alte forme ale funcţiei logistice, cum ar fi:

$$Y = \frac{k}{1 + b.e^{-a.t}}$$

8. Modelul funcţiei lui Gompertz de trend:

$$Y = k.a^{b^t} \ ,$$

a, b şi k sunt parametri ce trebuie determinaţi, $b \in (0, 1)$.

Etape în aplicarea unei metode analitice de ajustare a trendului

1. Constituirea unei serii temporale cu un număr suficient de mare de termeni pentru ca rezultatele observaţiilor să intre sub incidenţa legii numerelor mari.
2. Reprezentarea grafică a seriei temporale.
3. Se analizează cronograma seriei şi se fac câteva prelucrări simple ale datelor, apoi se alege tipul de funcţie care corespunde cel mai bine procesului studiat. Pentru a se alege tipul de curbă de ajustare trebuie să se facă mai întâi o ajustare grafică ca să se evidenţieze caracterul tendinţei. Dacă tendinţa este neliniară, este indicat să se utilizeze scara semilogaritmică, deci z = lg y se reprezintă grafic, sau logaritmică, deci z = lg y şi u = lg t şi se reprezintă grafic z = f(u).
4. Se estimează parametrii funcţiei alese şi se calculează valorile ajustate ale seriei.
5. Se face analiza cantitativă şi calitativă a rezultatelor obţinute pentru a evalua alegerea tipului de trend.

Ajustarea analitică a trendului liniar

Se consideră seria temporală y_1 , y_2 , …, y_n care reprezintă valorile observate ale unei variabile Y, de exemplu volumul vânzărilor unei firme şi se apreciază că trendul său poate fi ajustat printr-o funcţie liniară:

$$Y = f(t) = a + b \ . \ t$$

Estimarea parametrilor a şi b se face cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate, astfel încât suma pătratelor abaterii datelor din seria temporală faţă de datele calculate pe baza ecuaţiei de trend alese să fie minimă.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(t_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b.t_i)^2 = \text{minim},$$

Se vor egala cu zero derivatele parţiale ale lui S în raport cu a şi b.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

Se obţine sistemul de două ecuaţii cu necunoscutele a şi b:

$$n.a + b \ . \ \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a \ . \ \sum_{i=1}^{n} t_i + b \ . \ \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i.y_i$$

Se rezolvă sistemul şi se obţine

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 . \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} t_i . \sum_{i=1}^{n} t_i.y_i}{n.\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} t_i)^2} \qquad (1)$$

$$b = \frac{n.\sum_{i=1}^{n} t_i.y_i - \sum_{i=1}^{n} t_i . \sum_{i=1}^{n} y_i}{n.\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} t_i)^2}$$

Ajustarea seriei temporale cu ajutorul exponenţialei

Se logaritmează:

$Y = a \cdot b^t$,

$\lg Y = \lg a + t \cdot \lg b$

Se notează: $Z = \lg Y$, $A = \lg a$, $B = \lg b$,

Şi se obţine: $Z = A + B \cdot t$

Se aplică formulele (1) de la funcţia liniară, rezultând:

$$A = \lg a = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 . \sum_{i=1}^{n} z_i - \sum_{i=1}^{n} t_i . \sum_{i=1}^{n} t_i . z_i}{n . \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} t_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 . \sum_{i=1}^{n} \lg y_i - \sum_{i=1}^{n} t_i . \sum_{i=1}^{n} t_i . \lg y_i}{n . \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} t_i)^2} \qquad (2)$$

$a = 10^A$

$$B = \lg b = \frac{n . \sum_{i=1}^{n} t_i . z_i - \sum_{i=1}^{n} t_i . \sum_{i=1}^{n} z_i}{n . \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} t_i)^2} = \frac{n . \sum_{i=1}^{n} t_i . \lg y_i - \sum_{i=1}^{n} t_i . \sum_{i=1}^{n} \lg y_i}{n . \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} t_i)^2}$$

$b = 10^B$

Ajustarea seriei temporale cu ajutorul exponenţialei modificate

Exponenţiala modificată descrie o tendinţă potrivit căreia cantitatea creşterii scade cu o rată procentuală constantă, dar în acelaşi timp curba se apropie de o limită superioară (asimptotă).

$$Y = k + a \cdot b^t$$

Se notează :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \ , \ S_2 = \sum_{i=n+1}^{2n} y_i \ , S_3 = \sum_{i=2n+1}^{3n} y_i$$

n – este numărul de ani în fiecare din cele trei totaluri parţiale notate respectiv cu S_1 , S_2 , S_3 . Se determină b, a şi în final k utilizând relaţiile (3):

$$b^n = \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}$$

$$a = (S_2 - S_1) . \frac{b - 1}{b^n - 1} \qquad (3)$$

$$k = \frac{1}{n} . (S_1 - a . \frac{b^n - 1}{b - 1}) = \frac{1}{n} . (\frac{S_1 . S_3 - S_2^2}{S_1 + S_3 - 2 . S_2})$$

Ajustarea seriei temporale cu ajutorul curbei Gompertz

Funcţia Gompertz se utilizează în previziuni ale vânzărilor cumulate pe produse. Curba Gompertz descrie o tendinţă în care sporurile (incrementele) creşterii logaritmilor scad cu o rată constantă.

Funcţia lui Gompertz este

$$Y = k . a^{b^t} \ ,$$

iar a, b şi k sunt parametri ce trebuie determinaţi, $b \in (0, 1)$.

Se logaritmează şi rezultă:

$\lg Y = \lg k + (\lg a) \cdot b^t$

Se notează: $Z = \lg Y$, $A = \lg a$, $K = \lg k$ şi rezultă:

$Z = K + A \cdot b^t$

Se aplică formulele de la exponenţiala modificată, relaţiile (3)

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} \lg y_i$$

$$S_2 = \sum_{i=n+1}^{2n} z_i = \sum_{i=n+1}^{2n} \lg y_i$$

$$S_3 = \sum_{i=2n+1}^{3n} z_i = \sum_{i=2n+1}^{3n} \lg y_i$$

$$b^n = \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1},$$

rezultă: $b = \sqrt[n]{\frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}}$

$$A = \lg a = (S_2 - S_1).\frac{b-1}{b^n - 1} \qquad (4)$$

rezultă: $a = 10^A$

$$K = \lg k = \frac{1}{n}.(\frac{S_1.S_3 - S_2^2}{S_1 + S_3 - 2.S_2})$$

rezultă: $k = 10^K$

Formula lui Gompertz se utilizează demografie, biometrie, economie, marketing.

Ajustarea seriei temporale cu ajutorul funcţiei logistice

Funcţia logistică a fost descoperită de matematicianul belgian P. F. Verhulst în 1838 şi redescoperită de biologii americani R. Pearl şi L. J. Reed în 1920, fiind cunoscută şi sub denumirea de funcţia Pearl – Reed. Funcţia logistică se utilizează în previziuni din demografie, economie, marketing, ecologie.

Se consideră una dintre variantele funcţiei logistice :

$$Y = \frac{k}{1 + e^{a+b.t}} = f(t)$$

Pentru determinarea parametrilor a, b, k se aleg 3 puncte (perioade) echidistante t_0 , t_1 , t_2 , astfel încât :

$t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = n$,

iar n este lungimea unei perioade, exprimată de obicei în ani.

Se rezolvă sistemul de ecuaţii:

$$y_0 = f(t_0) = \frac{k}{1 + e^a}$$

$$y_1 = f(t_1) = \frac{k}{1 + e^{a+b.n}}$$

$$y_2 = f(t_2) = \frac{k}{1 + e^{a+2.b.n}},$$

Rezultă:

$$k = \frac{2.y_0.y_1.y_2 - y_1^2.(y_0 + y_2)}{y_0.y_2 - y_1^2} \qquad (5)$$

$$a = \ln \frac{2.y_0.y_1.(y_1 - y_2) + y_2.(y_0^2 + y_1^2)}{y_0.(y_1^2 - y_0.y_2)}$$

$$b = \frac{1}{n}.\ln \frac{y_0(y_2 - y_1)}{y_2.(y_1 - y_0)}$$

Criterii de alegere a funcţiei matematice asociate unei serii de timp

Pentru a se alege tipul de curbă de ajustare trebuie să se facă mai întâi o ajustare grafică ca să se evidenţieze caracterul tendinţei. Dacă tendinţa este neliniară, este indicat să se utilizeze scara semilogaritmică, deci z = lg y se reprezintă grafic, sau logaritmică, deci z = lg y şi u = lg t şi se reprezintă grafic z = f(u).

1. Dacă primele diferenţe (Δ^1) au tendinţa de a fi constante, se recomandă funcţia liniară (dreapta):

$$\Delta^1 y_i = y_i - y_{i-1} = \text{constant}, \; i = 2, 3, \ldots, n,$$

atunci: $Y = a + b \cdot t$

2. Dacă diferenţele de ordinul doi (Δ^2) au tendinţa de a fi constante, se foloseşte un polinom de gradul doi (parabola):

$\Delta^2 y_i = \Delta^1 y_i - \Delta^1 y_{i-1} = \text{constant}$, $i = 3, 4, \ldots, n,$

atunci: $Y = a + b.t + c.t^2$.

3. Dacă diferenţele de ordinul p, $p \geq 2$, $p \in N$, $\Delta^p y_i$, sunt constante, atunci se utilizează un polinom de gradul p:

$$Y = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \ldots + a_p \cdot t^p$$

4. Dacă diferenţele de ordinul 1 , Δ^1 , formează o progresie geometrică

$$\Delta^1 y_i = y_i - y_{i-1} = \text{progresie geometrică} , , \; i = 2, 3, \ldots, n,$$

atunci se utilizează exponenţiala modificată,

$$Y = k + a \cdot b^t$$

5. Dacă tendinţa aproximată reprezentată pe o reţea semilogaritmică este o dreaptă, se foloseşte exponenţiala.

Deci, $y = a \cdot b^t$

se logaritmează :

$$z = \lg y = \lg a + t \cdot \lg b$$

şi dacă diferenţele de ordinul 1 pe o scară semilogaritmică sunt constante, se foloseşte exponenţiala,

$$\Delta^1 z_i = z_i - z_{i-1} = \Delta^1 \lg y_i = \lg y_i - \lg y_{i-1} = \text{constant}, \; i = 2, 3, \ldots, n,$$

atunci: $Y = a \cdot b^t$

Scara semilogaritmică utilizează axa ordonatelor ca scară logaritmică, deci se substituie funcţia z = lg y funcţiei y, iar axa absciselor este gradată aritmetic.

6. Dacă tendinţa aproximată, reprezentată pe o scară semilogaritmică, deci z = lg y se reprezintă grafic, seamănă cu o exponenţială modificată, se va utiliza curba Gompertz.

Pe calculatoare se pot utiliza programele: QSB, modulul Time series forecasting, pentru o parte din funcţiile analizate, DSSPOM sau alte programe.